Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 177–197.

УДК 519.833 MSC2000: 91A80

В. И. Жуковский, П. К. Ахрамеев

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО РИСКУ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВКЛАДА ПО ТРЕМ ДЕПОЗИТАМ (РУБЛЕВОМУ, В ДОЛЛАРАХ И ЕВРО)

Рассматриваются задачи распределения некоторой суммы (в рублях) на три депозита (в рублях, долларах и евро) с целью получения максимального годового дохода (в пересчете на рубли). При этом ЛПР (вкладчик) не знает курсов доллара и евро в конце года и ориентируется только на некоторые границы их возможных изменений. Решение этой задачи зависит и от отношения ЛПР к риску. Построение гарантированного по риску решения составляет содержание настоящей статьи.

Ключевые слова: многошаговая бескоалиционная игра, позиционная стратегия, равновесие по Нэшу, метод динамического программирования.

E-mail: zhkvlad@yandex.ru, p.akhrameev@gmail.com

1. Математическая модель

Если в начале рассматриваемого периода времени (для определенности года) ЛПР знает, как распределять один рубль по трем депозитам (рублевому, в долларах и евро), то таким образом он распределит по этим депозитам и любую сумму.

Итак, пусть K_d и K_e – курсы доллара и евро в начале года по отношению к рублю, $(1 - x_d - x_e,\ x_d,\ x_e)$ - размеры рублевого, долларового и евро депозитов соответственно (в пересчете на рубли). Известны соответствующие процентные ставки r, d_d, d_e по каждому из трех видов вклада. Однако курсы валют y_d (в долларах) и y_e (в евро) в конце периода депонирования точно неизвестны. Они для рассматриваемой задачи являются неопределенными и относительно них предполагаются известными лишь границы возможных изменений $y_i \in [a_i, b_i]$ $(i = d, e)$. Доход ЛПР в конце года после конвертации определяется как планом диверсификации $(1 - x_d - x_e,\ x_d,\ x_e)$, так и неопределенностями (курсами валют в конце года)

$y = (y_d, y_e) \in Y = [a_d, b_d] \times [a_e, b_e]$. Этот доход можно представить в виде:

$$f(x,y) = (1+r)(1 - x_d - x_e) + x_d \frac{1+d_d}{K_d} y_d + x_e \frac{1+d_e}{K_e} y_e. \tag{1}$$

На содержательном уровне задачей ЛПР (лица, принимающего решение) являются аналитическое конструирование такой стратегии $x = (x_d, x_e) \in X = \{x_d + x_e \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\ (i = d, e)\}$, чтобы добиться наибольшего итогового результата (исхода) $f(x, y)$. При этом ЛПР вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$. Неопределенность – это неточность или неполнота информации о результатах предпринятых ЛПРом действий (стратегий).

Итак, математическая модель рассматриваемой задачи о диверсификации представляется упорядоченной тройкой $\Gamma = < X, Y, f(x,y) >$, где множество X стратегий x и множество Y неопределенностей y имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} X &= \{x = (x_d, x_e) |\ x_d + x_e \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\ (i = d, e)\}, \\ Y &= \{y = (y_d, y_e) |\ y_i \in [a_i, b_i]\ (i = d, e)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно терминологии теории исследования операций Γ является однокритериальной задачей при неопределенности. Именно принятие решений в Γ, базируясь только на риске и составляет содержание настоящей статьи. В экономической литературе (например, в [1, с. 102-103]) разные ЛПР по разному относятся к риску (именно в этом и состоит *субъективная природа риска*). Есть рискофобы (индивидуумы, которые относятся к риску отрицательно, и таких индивидуумов, в том числе предпринимателей, большинство: греч. phobos - страх), рискофилы (индивидуумы, относящиеся к риску положительно, то есть любят рисковать: греч. philos - любящий) и рисконейтралы (индивидуумы, которые стремятся *одновременно* увеличить исход (как рискофобы) и уменьшить риск (как рискофилы)) [1, с.102-103]. Для рискофоба при решении задач типа Γ естественно применять принцип гарантированного результата (по Абрахаму Вальду [3]). Согласно этому подходу *гарантированным по исходам решением* Γ (ГИР) называем пару $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$, определяемую цепочкой равенств

$$\underset{x \in X}{max} \underset{y \in Y}{min} f(x,y) = \underset{y \in Y}{min} f(x^g, y) = f^g. \tag{3}$$

Согласно (3), операция *внутреннего минимума* $\underset{y \in Y}{min} f(x,y) = f[x]$ реализует для каждой стратегии $x \in X$ гарантию $f[x]$, ибо $f[x] \leqslant f(x,y)\ \forall y \in Y$; операция *внешнего максимума* $\underset{x \in X}{max} f[x] = f[x^g] = f^g$ выделяет из всех гарантий $f[x]$ наибольшую, так как $f[x^g] \geqslant f[x]\ \forall x \in X$ и $f[x^g] = f^g \leqslant f(x^g, y)\ \forall y \in Y$. Стратегию

x^g из ГИР предлагается ЛПРу использовать, ибо она «обеспечит» ЛПР наибольшую гарантию f^g. В [2] получены достаточные условия существования и явный вид ГИР для рискофоба в задаче Г. Именно, имеет место

Утверждение 1. *Гарантированное по исходам решение задачи* Г *имеет вид*

$$(x^g, f^g) = (1 - x_d^g - x_e^g, x_d^g, x_e^g, f^g) =$$

$$= \begin{cases} (1, 0, 0, 1 + r) \text{ при } \gamma_i \leqslant 0 \ (i = g, r), \\ (0, 1, 0, \frac{1+d_d}{K_d} a_d) \text{ при } \{\gamma_d > 0, \gamma_e \leqslant 0\} \vee \{\gamma_d > \gamma_e > 0\}, \\ (0, 0, 1, \frac{1+d_e}{K_e} a_e) \text{ при } \{\gamma_d \leqslant 0, \gamma_e > 0\} \vee \{\gamma_e > \gamma_d > 0\}, \\ (0, x_d^g, 1 - x_d^g, \frac{1+d_i}{K_i} a_i) \ \forall x_d^g \in [0, 1] \ (i = d, e) \text{ при } \gamma_d = \gamma_e > 0, \end{cases}$$

где $\gamma_i = \frac{1+d_i}{K_i}(a_i - \frac{1+r}{1+d_i} K_i)$ $(i = d, e)$, *знак* $\vee$ *означает "или".*

2. Принцип минимаксного сожаления (по Сэвиджу)

Перейдем к способу принятия решения в Г для рискофила. Особенность Г в том, то в ней о неопределенностях у ЛПР известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам. Такие неопределенности названы в [4] Еленой Сергеевной Вентцель «дурными» (из-за неопределенности их реализаций). Наличие неопределенности в Г как раз и позволяет говорить о риске ЛПР, возникающим при использовании любых стратегий $x \in X$. В экономической литературе (например, в [5, с.15]) приводятся многочисленные различные понятия риска. Более того, известный специалист по теории управления Сиразетдинов Р.Т. считает: «строгого математического определения риска в настоящее время не существует» [6, с.31]. Мы будем использовать следующее понятие риска: «риск – это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемый значений», а под мерой риска будем понимать «разницу между желаемым значением показателя качества функционирования процесса и реализовавшимся значением». Заметим, что именно такое понятие широко используются для оценки микроэкономических рисков [7, с. 38, 45-50].

Наконец, указанному виду неопределенностей как раз и отвечает принцип минимаксного сожаления, предложенный Леонардом Сэвиджем в 1951 г. в статье [8]. Согласно этому принципу, *гарантированным по риску решением* (ГРР) задачи Г будем называть пару (x^r, Φ^r), определяемую цепочкой равенств

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max_{y \in Y} \Phi(x^r, y) = \Phi^r, \tag{4}$$

где функция риска (сожаления)

$$\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y), \tag{5}$$

значение которой называют *риском (по Сэвиджу).*

Заметим, что

a) из (5) получаем $\Phi(x,y) \geqslant 0 \ \forall x \in X, y \in Y$ (наилучший риск - нулевой);

b) если $f(x,y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$, то ГРР существует в задаче Г;

c) согласно операции *внутреннего максимума* из (4) $(\max\limits_{y\in Y} \Phi(x,y) = \Phi[x])$ каждой стратегии $x \in X$ отвечает «своя» гарантия по риску $\Phi[x] \geqslant \Phi(x,y) \ \forall y \in Y$, и из таких гарантий операция *внешнего минимума* в (4) $\min\limits_{x\in X} \Phi[x] = \Phi[x^r] = \Phi^r$ выделяет наименьшую, ибо $\Phi^r \leqslant \Phi[x] \ \forall x \in X$ и $\Phi^r = \Phi[x^r] \geqslant \Phi(x,y) \ \forall y \in Y$. Здесь, в отличие от ГИР, гарантии по риску $\Phi[x]$ ограничивают функцию риска $\Phi(x,y)$ сверху. Таким образом, ЛПР, являясь рискофилом, стремится в Г за счет выбора своей стратегии $x \in X$ уменьшить свой риск $\Phi(x,y)$. При этом он вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$ («самый хороший» риск - нулевой).

Замечание 1. *Итак, построение ГРР (гарантированного по рискам решения) в задаче* Г *проводится в 4 этапа.*

Этап 1. *Каждой ситуации $x \in X$ ставится в соответствие функция $f[y] = \max\limits_{x\in X} f(x,y)$.*

Этап 2. *Строится функция риска $\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y)$.*

Этап 3. *В результате операции внутреннего максимума из (4) определяется гарантия по риску $\max\limits_{y\in Y} \Phi(x,y) = \max\limits_{y\in Y} (f[y] - - f(x,y)) = \Phi[x] \geqslant \Phi(x,y) \ \forall y \in Y$ для каждой стратегии $x \in X$.*

Этап 4. *Согласно операции внешнего минимума из (4) находится наименьший гарантированный риск $\Phi^r = \min\limits_{x\in X} \Phi[x] = \Phi[x^r]$, и тогда пара: план диверсификации $(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r)$ и гарантия Φ^r объявляются ГРР задачи* Г

Остановимся на «оптимизирующем смысле» гарантированного по риску решения (x^r, Φ^r) задачи Г, именно, что означает (или что «обеспечивает»?) такая стратегия $x^r = (x_d^r, x_e^r)$ и такой риск Φ^r (с точки зрения ЛПР)? Ответ в том, что согласно этапу 1, каждой неопределенности $y \in Y$ ставится в соответствие максимальный годовой доход $f[y] = \max\limits_{x} f(x,y)$, если бы неопределенность y в задаче Г реализовались бы на самом деле.

А согласно этапу 2 функция риска $\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y)$ характеризует, насколько исход $f(x,y)$ «не дотягивает» до вышеупомянутого максимального дохода $f[y]$, и как раз поэтому ЛПР стремится разность $f[y] - f(x, y)$ возможно уменьшить (за счет выбора $x \in X$).

Далее, согласно этапу 3, каждой стратегии $x \in X$ ставится в соответствие наибольшая (по y) такая разность $\Phi[x] = \max_{y \in Y}(f[y] - f(x, y))$ – наибольший (гарантированный) «зазор» между «самым хорошим для ЛПР» доходом $f[y]$ и реализующимся при фиксированной стратегии $x \in X$ доходом $f(x, y)$.

Наконец, следуя этапу 4, из всех таких «зазоров» $\Phi[x]$ ЛПР выбирает наименьший «зазор» $\Phi^r = \Phi[x^r]$, который «обеспечивается» стратегией $x^r = (x_d^r, x_e^r)$ из ГРР (x^r, Φ^r). Итак, ЛПР, следуя стратегии $x^r \in X$, «одним выстрелом убивает сразу двух зайцев», именно,

во-первых, при любых колебаниях курсов доллара и евро $y \in Y$ (к концу года) число Φ^r ограничивает сверху все возможные «зазоры» $\Phi(x^r, y)$, ибо $\Phi(x^r, y) \leqslant \Phi^r = \Phi[x^r]\ \forall y \in Y$;

во-вторых, «зазор» $\Phi^r = \Phi[x^r]$ будет «самым маленьким» из всех $\Phi[x]$, ибо $\Phi[x] \leqslant \Phi^r = \Phi[x^r]\ \forall x \in X$.

Построение явного вида ГИР и ГГР для задачи диверсификации только по двум депозитам (рублевому и валютному) на конец года в [9, с. 58], такая же задача, но уже и для рисконейтрала в [10, с.117-135], гарантированным по риску решениям в многокритериальных задачах и бескоалиционных играх посвящены книги [11, 12, 13]. В следующем разделе как раз, следуя этапам 1-4, и найдем явный вид гарантированного по риску решения задачи Г.

3. Явный вид гарантированного по риску решения задачи Г

Итак, пусть в Г множества стратегий X и неопределенностей Y заданы в (2), а критерий $f(x, y)$ определен в (1). Для построения ГРР будем следовать этапам 1-4 из замечания 1.

<u>Этап 1.</u> В задаче Г каждой неопределенности $y = (y_d, y_e) \in Y = [a_d, b_d] \times \times [a_e, b_e]$ ставится в соответствие множество X, которое представляет собой прямоугольный треугольник AOB (рис. 1).

Для всякого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ из (1) линейна по компонентам вектора $x = (x_d, x_e)$ и поэтому может достигать своего $\max_{x \in X} f(x, y)$ лишь в угловых точках – вершинах треугольника OAB. Поэтому, с учетом явного вида $f(x, y)$ из (1), будет

$$\max_{x \in X} f(x, y) = \{(1 + r) \vee [\frac{1 + d_d}{K_d} y_d] \vee [\frac{1 + d_e}{K_e} y_e]\} = f[y],$$

здесь «$\vee$» - бинарная связка «или».

<u>Этап 2.</u> Согласно (5) тогда функция риска будет

$\Phi(x, y) = f[y] - f(x, y) =$

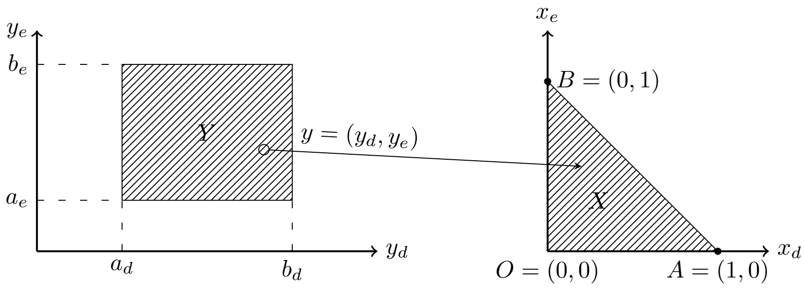

Рис. 1

$$
=\begin{cases}\Phi_1(x,y)=1+r-f(x,y)=[1+r-\frac{1+d_d}{K_d}y_d]x_d+[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}y_e]x_e,\\ \vee\Phi_2(x,y)=\frac{1+d_d}{K_d}y_d-f(x,y)=(1-x_d)[\frac{1+d_d}{K_d}y_d-(1+r)]+[(1+r)-\frac{1+d_e}{K_e}y_e]x_e,\\ \vee\Phi_3(x,y)=\frac{1+d_e}{K_e}y_e-f(x,y)=[1+r-\frac{1+d_d}{K_d}y_d]x_d+[\frac{1+d_e}{K_e}y_e-(1+r)]x_e.\end{cases}
$$

Этап 3. Для каждой стратегии $x\in X$ найдем гарантированный риск

$$
\Phi[x]=\max_{y\in Y}\Phi(x,y)=
$$

$$
=\max_{y\in Y}\left\{\begin{array}{c}[1+r-\frac{1+d_d}{K_d}y_d]x_d+[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}y_e]x_e,\\ [\frac{1+d_d}{K_d}y_d-(1+r)](1-x_d)+[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}y_e]x_e,\\ [1+r-\frac{1+d_d}{K_d}y_d]x_d+[\frac{1+d_e}{K_e}y_e-(1+r)](1-x_e),\end{array}\right\}=
$$

$$
=\max\left\{\begin{array}{c}[1+r-\frac{1+d_d}{K_d}a_d]x_d+[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}a_e]x_e=\Phi_1[x],\\ [\frac{1+d_d}{K_d}b_d-(1+r)](1-x_d)+[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}a_e]x_e=\Phi_2[x],\\ [1+r-\frac{1+d_d}{K_d}a_d]x_d+[\frac{1+d_e}{K_e}b_e-(1+r)](1-x_e)=\Phi_3[x],\end{array}\right\}=
$$

$$
=\max_{i=1,2,3}\{\Phi_i[x]\}. \tag{6}
$$

т.к. постоянные $r>0, d_i>0, b_i>a_i>0, K_i>0 (i=d,e)$.

Замечание 2. *Далее, для сокращения записей, будем использовать обозначения*

$$
\alpha_d=[1+r-\frac{1+d_d}{K_d}a_d],\ \alpha_e=[1+r-\frac{1+d_e}{K_e}a_e],
$$

$$
\beta_d=[\frac{1+d_d}{K_d}b_d-(1+r)],\ \beta_e=[\frac{1+d_e}{K_e}b_e-(1+r)]. \tag{7}
$$

Отсюда,

$$
\alpha_e+\beta_d=\frac{1+d_d}{K_d}b_d-\frac{1+d_e}{K_e}a_e,\ \alpha_d+\beta_e=\frac{1+d_e}{K_e}b_e-\frac{1+d_d}{K_d}a_d,
$$

$$
\alpha_d+\beta_d=\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d),\ \alpha_e+\beta_e=\frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e),
$$

$$\beta_d - \alpha_d = \frac{1+d_d}{K_d}(b_d + a_d) - 2(1+r),\ \beta_e - \alpha_e = \frac{1+d_e}{K_e}(b_e + a_e) - 2(1+r),$$

$$\alpha_d - \beta_e = 2(1+r) - (\frac{1+d_d}{K_d}a_d + \frac{1+d_e}{K_e}b_e), \tag{8}$$

$$\alpha_e - \beta_d = 2(1+r) - (\frac{1+d_e}{K_e}a_e + \frac{1+d_d}{K_d}b_d),$$

$$\alpha_e - \alpha_d = \frac{1+d_d}{K_d}a_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e.$$

Лемма 1. *Если постоянные $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$, то справедливо*

$$[\alpha_i \leqslant \beta_i\ (i = d, e)] \Longrightarrow [\alpha_e\alpha_d \leqslant \beta_e\beta_d].$$

В самом деле, имеет место цепочка импликаций

$$[(\alpha_e \leqslant \beta_e) \wedge (\alpha_d \leqslant \beta_d)] \Longrightarrow [(\alpha_e\alpha_d \leqslant \beta_e\alpha_d) \wedge (\alpha_d\beta_e \leqslant \beta_e\beta_d)] \Longrightarrow [\alpha_e\alpha_d \leqslant \beta_e\beta_d]. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если постоянные $\alpha_i \geqslant 0 \wedge \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$, то*

$$\frac{1+d_d}{K_d}b_d \geqslant \frac{1+d_e}{K_e}a_e,\ \frac{1+d_e}{K_e}b_e \geqslant \frac{1+d_d}{K_d}a_d,$$

$$\frac{1+d_d}{K_d}b_d \geqslant \frac{1+d_d}{K_d}a_d,\ \frac{1+d_e}{K_e}b_e \geqslant \frac{1+d_e}{K_e}a_e. \tag{10}$$

Доказательство 1. *Так как $[\alpha_i \geqslant 0] \Longrightarrow [1+r \geqslant \frac{1+d_i}{K_i}a_i] \wedge [\frac{1+d_j}{K_i}b_j \geqslant (1+r)]$ $(i, j = d, e)$, то отсюда сразу получаем справедливость (10).*

Замечание 3. *С учетом обозначений (8), а также $x_e = 1 - x_d$, для (6) имеем*

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x] = \alpha_d x_d + \alpha_e x_e,\ \Phi_2[x] = \beta_d(1 - x_d) + \alpha_e x_e,$$

$$\Phi_3[x] = \alpha_d x_d + \beta_e(1 - x_e)\}\ \forall x \in X.$$

Этап 4. Чтобы обеспечить, согласно (5) и (6), неравенство $\Phi(x, y) \geqslant 0$ $\forall (x, y) \in X \times Y$, достаточно считать выполненным

Условие 1. *Постоянные $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$. Очевидно, что условие 1 имеет место, если*

$$\alpha_i \leqslant \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \quad (i = d, e).$$

В теории исследований операций установлено [14, с. 55], что максимум выпуклой (и, в частности, линейной) функции на выпуклом многограннике (здесь треугольник AOB из рис. 2) достигается на его границе. Поэтому далее находим минимизаторы $x^r = arg\min_x \Phi[x]$ из (6) на сторонах OA, OB и AB треугольника AOB отдельно, и затем, в качестве Φ^r используем наименьшее из $\min_{x \in X}\Phi[x]$. С этой целью выделим три случая.

Случай 1 (сторона $AO = \{x_d \in [0,1],\ x_e = 0\}$. Тогда стратегия $x = (x_d, 0)$). Возвращаясь теперь к (6), с учетом $x_e = 0$, получаем

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x_d,0] = \alpha_d x_d = \Phi_3[x_d,0],\ \Phi_2[x_d,0] = (1-x_d)\beta_d\}.$$

При выполнении условия 1 график $\Phi[x]$ представлен на рис. 2, где выделен жирной линией.

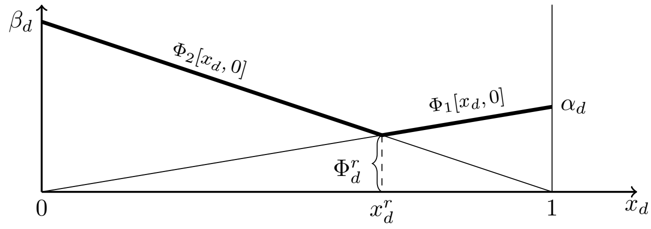

Рис. 2

Из этого рисунка следует, что $\min\limits_{x_d} \Phi[x] = \Phi[x_d^r, 0] = \Phi_d^r$. *Тогда* $\alpha_d x_d^r = (1 - x_d^r)\beta_d$, *и поэтому*

$$x_d^r = \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{\frac{1+d_d}{K_d} b_d - (1+r)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d)} = \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d}{b_d - a_d},$$

$$1 - x_d^r = \frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d}{b_d - a_d}.$$

Наконец,

$$\Phi_g^r = \Phi_1[x_d^r, 0] = \alpha_d x_d^r = \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{[\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d]\frac{1+d_d}{K_d}}{b_d - a_d}.$$

Итак, получили

Утверждение 2. *Если в задаче*

$$\Gamma_d = \langle X = X_d = [0,1],\ Y = Y_d = [a_d, b_d], f(x_d,\,0,\,y_d)\rangle$$

имеет место цепочка неравенств

$$a_d < \frac{1+r}{1+d_d} K_d < b_d,$$

то гарантированное по риску решение Γ_d *будет*

$$(1 - x_d^r, x_d^r, 0, \Phi_d^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d}, 0, \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d}{b_d - a_d}, \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d}{b_d - a_d}, 0, \frac{[\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d]\frac{1+d_d}{K_d}}{b_d - a_d}). \quad (11)$$

Утверждение 2а. *Если в той же задаче* Γ_d

a) $b_d \leqslant K_d \frac{1+r}{1+d_d}$, *то гарантированное по риску решение (ГРР) имеет вид (0,1,0,0),*

b) $a_d \geqslant K_d \frac{1+r}{1+d_d}$, *то ГРР задачи* Γ_d *будет (1,0,0,0).*

Справедливость утверждения 2а фактически установлена (при переобозначениях $a = a_d, b = b_d, K = K_d$) на стр. 123-124 книги [10].

Аналогично устанавливается справедливость для

Случай 2 (Сторона $BO = \{x_d = 0, x_e \in [0,1]\}$).

Утверждение 3. *Если в задаче*

$$\Gamma_e = \langle X = X_e = [0,1], Y = Y_e = [a_e, b_e], f(0, x_e, y_e)\rangle$$

имеет место

$$a_e < \frac{1+r}{1+d_e} K_e < b_e,$$

то гарантированное по риску решение Γ_e *будет*

$$(1 - x_e^r, 0, x_e^r, \Phi_e^r) = (\frac{\alpha_e}{\alpha_e + \beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e + \beta_e}, \frac{\alpha_e \beta_e}{\alpha_e + \beta_e}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_e} K_e - a_e}{b_e - a_e}, 0, \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e} K_e}{b_e - a_e}, \frac{[\frac{1+r}{1+d_e} K_e - a_e][b_e - \frac{1+r}{1+d_e} K_e] \frac{1+d_e}{K_e}}{b_e - a_e}). \qquad (12)$$

Аналогично утверждению 2а справедливо

Утверждение 3а. *Если в задаче* Γ_d

a) $b_e \leqslant K_e \frac{1+r}{1+d_e}$, *то ГРР имеет вид (0,0,1,0),*

b) $a_e \geqslant K_e \frac{1+r}{1+d_e}$, *то ГРР задачи* Γ_d *будет (1,0,0,0).*

Случай 3 (гипотенуза $AB = \{x_d + x_e = 1, x_i \geqslant 0 \ (i = d, e)\}$) В этом случае (6) примет, с учетом $x_d = 1 - x_e$, вид

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x] = \alpha_d + (\alpha_e - \alpha_d)x_e, \Phi_2[x] = (\beta_d + \alpha_e)x_e, \Phi_3[x] = (\alpha_d + \beta_e)(1 - x_e)\}.$$

Рассмотрим здесь три варианта.

Вариант 3а

Введем M - точку пересечения отрезков $\Phi_2[x]$ и $\Phi_3[x]$ (рис. 3). Здесь и далее для сокращения записи будем обозначать $\Phi_i[x] = \Phi_i[x_e]$ (на самом деле в нашем случае $x = (1 - x_e, x_e)$), и потребуем, чтобы $\Phi_2[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]$, т.е. (см. рис. 3) выполнялось неравенство

$$MN \geqslant KN$$

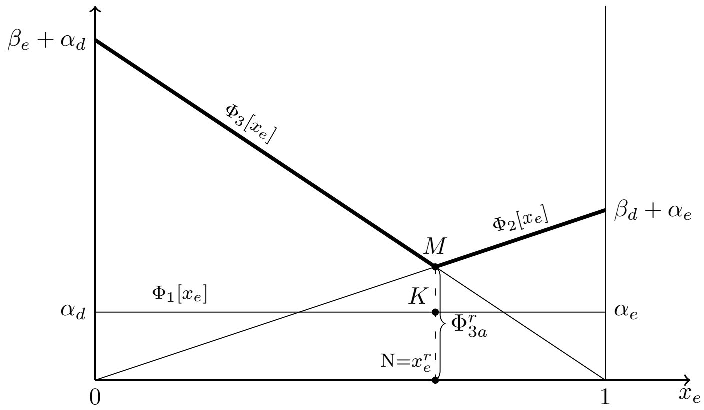

Рис. 3

Лемма 3. *Если*

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i = d, e), \tag{13}$$

то $MN \geqslant KN$*, т.е., напомним,* $\Phi_2[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]$.

В самом деле, из $\{\Phi_2[x_e^r] = \Phi_3[x_e^r]\} \Longleftrightarrow \{(\beta_d+\alpha_e)x_e^r = (\beta_e+\alpha_d)(1-x_e^r)\}$ находим, с учетом (8),

$$x_e^r = \frac{\beta_e+\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d} = \frac{\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}. \tag{14}$$

Так как, согласно (10), (13), (14) будет $x_e^r \geqslant 0$, а

$$1-x_e^r = \frac{\beta_d+\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d} = \frac{\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)},$$

то тогда

$$\Phi_1[x_e^r] = \alpha_d(1-x_e^r) + \alpha_e x_e^r = \frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d} =$$

$$= \frac{\alpha_d\alpha_e+\alpha_d\beta_d+\alpha_e\beta_e+\alpha_e\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}.$$

Но

$$\Phi_{3a}^r = \Phi_2[x_e^r] = (\beta_d+\alpha_e)x_e^r = \frac{(\beta_d+\alpha_e)(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d} =$$

$$= \frac{\beta_e\beta_d+\alpha_e\beta_e+\alpha_d\beta_d+\alpha_e\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d} = \frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}. \tag{15}$$

Наконец, согласно лемме 1, имеет место импликация

$$[0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i = d, e)] \Longrightarrow [\alpha_e \alpha_d \leqslant \beta_e \beta_d],$$

что и доказывает лемму 3.

Лемма 4. *Если*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i \leqslant \frac{b_i + a_i}{2} \ (i = d, e), \tag{16}$$

то

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i = d, e). \tag{17}$$

Доказательство 2. *Из (16) и $a_i < b_i$ следует, что*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i \ (i = d, e).$$

Тогда

$$[\frac{1+r}{1+d_i} K_i - a_i] \, \frac{1+d_i}{K_i} = \alpha_i \geqslant 0,$$

$$[b_i - \frac{1+r}{1+d_i} K_i] \, \frac{1+d_i}{K_i} = \beta_i > 0,$$

т.е.

$$\alpha_i \geqslant 0, \beta > 0 \ (i = d, e).$$

Далее используем цепочку эквиваленций

$$[\beta_i \geqslant \alpha_i] \Longleftrightarrow [\beta_i - \alpha_i \geqslant 0] \Longleftrightarrow [\frac{1+d_i}{K_i}(b_i + a_i) - 2(1+r) \geqslant 0] \Longleftrightarrow [\frac{b_i + a_i}{2}] \geqslant [\frac{1+r}{1+d_i} K_i] \ (i = d, e).$$

Итак, если выполняется цепочка неравенств (16), то имеет место (17).

Утверждение 4. *Если в задаче* Γ

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i \leqslant \frac{b_i + a_i}{2} \ (i = d, e),$$

то гарантированное по риску решение задачи Γ *имеет вид*

$$(0, 1 - x_e^r, x_e^r, \Phi_{3a}^r) = (0, \frac{\beta_d + \alpha_e}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}, \frac{\beta_e + \alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d + \alpha_e) + \alpha_e(\beta_e + \alpha_d)}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+d_e}{K_e} b_e - \frac{1+d_d}{K_d} a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)}, \frac{\frac{1+d_d}{K_d} b_d - \frac{1+d_e}{K_e} a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)},$$

$$\frac{(\frac{1+d_d}{K_d} b_d - \frac{1+d_e}{K_e} a_e)(\frac{1+d_e}{K_e} b_e - \frac{1+d_d}{K_d} a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)}). \tag{18}$$

Доказательство 3. *Функция* $\Phi[x] = \max\limits_{i=1,2,3}\{\Phi_i[x]\}$ *выделена на рис. 3 жирной линией. Но тогда* $\min\limits_{x\in X}\Phi[x]$ *достигается в точке* x_e^r*. Поэтому, гарантированный риск* $\Phi_{3a}^r = \Phi_1[x_e^r] = MN$, *т.к.* $\{MN \geqslant KN\} \Longleftrightarrow \{\Phi_j[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]\ (j = 2, 3)\}$.

Итак, при выполнении (16) вкладчик, имея в распоряжении 1 рубль, в случае 3a ничего не вкладывает в рублевый депозит, в долларовый вносит $1 - x_e^r$ *и, наконец, оставшуюся часть* x_e^r *на депозит в евро. В этом случае в конце года вкладчик получит максимально возможную наращенную (гарантированную) сумму вклада с риском, не большим* Φ_{3a}^r *(при любых курсах валют* $y = (y_d, y_e) \in Y$*).* Вариант 3b.

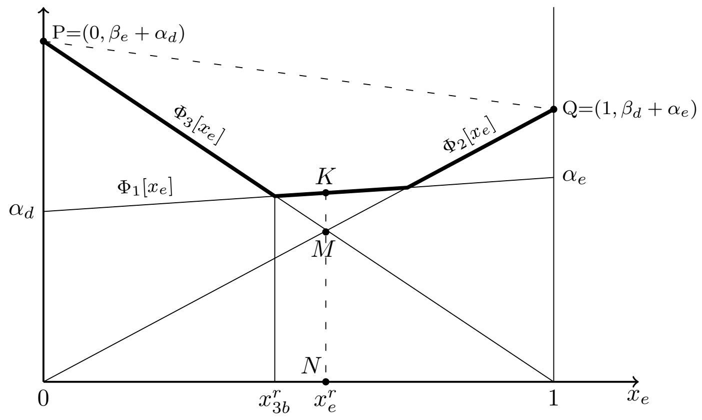

Рис. 4

Следующие заключительные варианты 3b и 3c относятся к случаю, когда $KN > MN$ (см. рис. 4), т.е. $\Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r] = \Phi_3[x_e^r]$. Заметим, что вследствие $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$ будет $\beta_d + \alpha_e \geqslant \alpha_e$ и $\beta_e + \alpha_d \geqslant \alpha_d$, и поэтому точки отрезка $\Phi_1[x_e]$ не могут находиться выше отрезка PQ. В связи с этим дальнейшие и заключительные варианты будут различаться лишь условиями $\alpha_d < \alpha_e$, $\alpha_d > \alpha_e$, $\alpha_d = \alpha_e$.

Итак, в варианте 3b предполагаем, что $\alpha_d < \alpha_e$ и, конечно, $KN > MN$.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 5. *Если*

$$0 < \beta_i < \alpha_i\ (i = d, e),$$

то

$$KN > MN \Longleftrightarrow \Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r] = \Phi_3[x_e^r].$$

В самом деле, в доказательстве леммы 3 установлено,

$$\Phi_2[x_e^r] = \frac{\beta_e\beta_d + \alpha_e\beta_e + \alpha_d\beta_d + \alpha_e\alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d},$$

$$\Phi_1[x_e^r] = \frac{\alpha_e\alpha_d + \alpha_e\beta_e + \alpha_d\beta_d + \alpha_e\alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}.$$

Тогда $KN > MN \Longleftrightarrow \Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r]$ и это условие имеет место, если

$$\alpha_d\alpha_e > \beta_d\beta_e.$$

Такое строгое неравенство выполнено при

$$\alpha_i > \beta_i > 0 \ (i = d, e).$$

Доказательство этого факта проводится также, как в лемме 1, в помощью цепочки импликаций

$$[(\alpha_d > \beta_d) \wedge (\alpha_e > \beta_e)] \Longrightarrow [(\alpha_d\alpha_e > \beta_d\alpha_e) \wedge (\beta_d\alpha_e > \beta_e\beta_d)] \Longrightarrow (\alpha_d\alpha_e > \beta_e\beta_d).$$

Лемма 6. *Если*

$$\frac{b_i + a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \ (i = d, e), \tag{19}$$

то

$$0 \leqslant \beta_i < \alpha_i \ (i = d, e). \tag{20}$$

Доказательство 4. *Из (19) и $a_i < b_i$ следует, что*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \ (i = d, e),$$

поэтому

$$[\frac{1+r}{1+d_i}K_i - a_i]\frac{1+d_i}{K_i} = 1 + r - \frac{1+d_i}{K_i}a_i = \alpha_i > 0,$$

$$[b_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i]\frac{1+d_i}{K_i} = \frac{1+d_i}{K_i}b_i - (1+r) \geqslant 0,$$

т.е. $\alpha_i > 0$ и $\beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$.

Далее, справедливость (20) устанавливается с помощью цепочки эквиваленций и (8):

$$(\alpha_i > \beta_i) \Longleftrightarrow (\alpha_i - \beta_i > 0) \Longleftrightarrow (2(1+r) - \frac{1+d_i}{K_i}(a_i + b_i) > 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\frac{1+r}{1+d_i}K_i - \frac{a_i + b_i}{2} > 0) \Longleftrightarrow (\frac{1+r}{1+d_i}K_i > \frac{a_i + b_i}{2}) \ (i = d, e).$$

Утверждение 5 *Если в задаче Γ выполняются условия*

1^0. $\frac{b_i+a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i \ (i = d, e),$

2^0. $\frac{1+d_d}{K_d}a_d > \frac{1+d_e}{K_e}a_e$,

то гарантированное по риску решение примет вид

$$(0, 1-x^r_{3b}, x^r_{3b}, \Phi^r_{3b}) = (0, \frac{\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e}, \frac{\beta_e}{\beta_e+\alpha_e}, \frac{\alpha_d\alpha_e+\alpha_e\beta_e}{\beta_e+\alpha_e}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e-a_e}, \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e-a_e}, \frac{(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)(\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e)}{b_e-a_e}). \tag{21}$$

Доказательство 5. *Требование (1^0) утверждения 5 обеспечивает неравенство $KN > MN$, а условие (2^0) и (8) приводит к $\alpha_d < \alpha_e$, в результате чего график функции риска $\Phi[x_e] = \max\limits_{i=1,2,3} \Phi_i[x_e]$ примет вид ломаной, выделенной на рис. 4 жирной линией. Тогда для построения $\min\limits_x \Phi[x_e] = \Phi^r_{3b}$ следует найти x^r_{3b}, исходя из равенства $\Phi_3[x^r_{3b}] = \Phi_1[x^r_{3b}]$, т.е. из*

$$(\alpha_d+\beta_e)(1-x^r_{3b}) = \alpha_d + (\alpha_e-\alpha_d)x^r_{3b}.$$

Отсюда

$$x^r_{3b} = \frac{\beta_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e-a_e},$$

$$(1-x^r_{3b}) = \frac{\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e-a_e},$$

тогда

$$\Phi^r_{3b} = \Phi_3[x^r_{3b}] = \frac{(\alpha_d+\beta_e)\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)(\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e)}{b_e-a_e}$$

и $\Phi^r_{3b} > 0$, т.к. $\alpha_i > 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$. Вариант 3c. Здесь, в отличие от предыдущего варианта 3b, будем считать $\alpha_d > \alpha_e$ (см. рис. 5).

Аналогично утверждению 5 доказывается

Утверждение 6. *Если в задаче* Γ

1^0. $\frac{b_i+a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ $(i = d, e)$,

2^0. $\frac{1+d_d}{K_d}a_d < \frac{1+d_e}{K_e}a_e$,

то гарантированное по риску решение имеет вид

$$(0, 1-x^r_{3c}, x^r_{3c}, \Phi^r_{3c}) = (0, \frac{\beta_d}{\beta_d+\alpha_d}, \frac{\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d}, \frac{\beta_d\alpha_d+\alpha_e\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d-a_d}, \frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d-a_d}, \frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d)}{b_d-a_d}). \tag{22}$$

Доказательство 6. *Как и при варианте 3b требование (1^0) обеспечивает неравенство $KN > MN$, а (2^0) и (8) приводит к $\alpha_d > \alpha_e$ (см рис. 5). Поэтому функция*

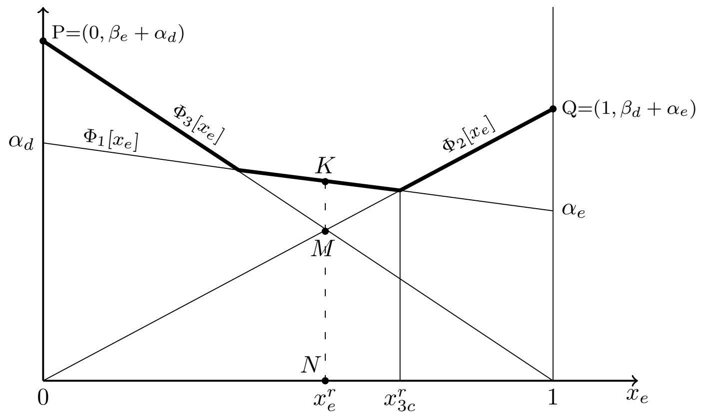

Рис. 5

риска $\Phi[x_e] = \max\limits_{i=1,2,3} \Phi_i[x_e]$ *в этом случае имеет вид ломаной, выделенной на рис. 5 жирной линией. Отсюда минимизатор* x_{3c}^r *функции* $\Phi[x_e]$ *находится из равенства* $\Phi_1[x_{3c}^r] =$
$= \Phi_2[x_{3c}^r]$, *т.е.*

$$\alpha_d + (\alpha_e - \alpha_d)x_{3c}^r = (\beta_d + \alpha_e)x_{3c}^r.$$

Итак,

$$x_{3c}^r = \frac{\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d} = \frac{1+r-\frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d)} = \frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d-a_d},$$

$$1 - x_{3c}^r = \frac{\beta_d}{\beta_d+\alpha_d} = \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d-a_d},$$

$$\Phi_{3c}^r = \Phi_2[x_{3c}^r] = \frac{(\beta_d+\alpha_e)\alpha_e}{\beta_d+\alpha_d} = \frac{\beta_d\alpha_d+\alpha_e\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d} = \frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d)}{b_d-a_d}.$$

Замечание 4. *Пусть в* Γ

$$\frac{b_i+a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}a_i \leqslant b_i \ (i=d,e),$$

$$\frac{1+d_d}{K_d}a_d = \frac{1+d_e}{K_e}a_e.$$

Тогда гарантированное по риску решение Γ *будет*

$$(0, 1-x_e^*, x_e^*, \alpha_d) = (0, 1-x_e^*, x_e^*, 1+r-\frac{1+d_i}{K_i}a_i)\ (i=d,e) \tag{23}$$

при $\forall\, x_e^* \in [x_e^{(1)}, x_e^{(2)}] = [\frac{\beta_e}{\alpha_d+\beta_e}, \frac{\alpha_d}{\alpha_e+\beta_d}]$.

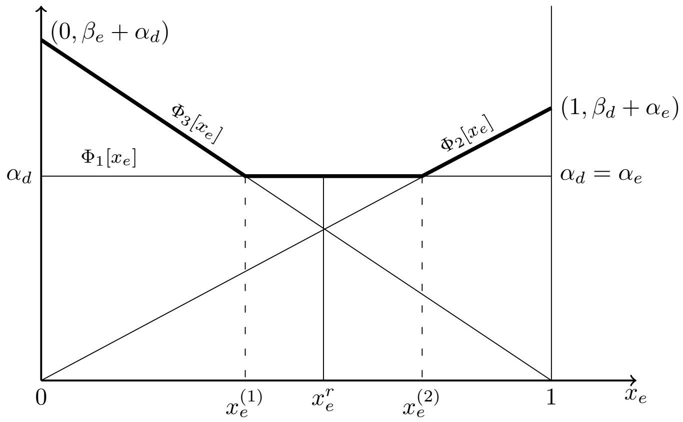

Рис. 6

Доказательство проводится с помощью рис. 6, число $x_e^{(1)}$ определяется из равенства $\Phi_3[x_e^{(1)}]=\Phi_1[x_e^{(1)}]=\alpha_d$, а $x_e^{(2)}$ – из условия $\Phi_2[x_e^{(2)}]=\alpha_d$.

4. Заключение

Переходим к завершению этапа 4, именно к построению минимальной из гарантий с помощью утверждений 2-6, отличающихся ограничениями на $\frac{1+r}{1+d_i}K_i$ $(i=d,e)$. Для этого,

во-первых, объединяем требования утверждений 2, 3 и 4,

во-вторых, то же самое проделываем с утверждениями 2, 3 и 5 (или 6).

Объединение утверждений 2, 3 и 4.

Итак, при $a_i<\frac{1+r}{a+d_i}K_i\leqslant\frac{a_i+b_i}{2}$ $(i=d,e)$, строим минимум из гарантий Φ_d^r,Φ_e^r (из утверждений 2 и 3) и Φ_{3a}^r (из утверждения 4). Таким образом, найдем минимум из трех чисел

$$\Phi^*=min\{\Phi_d^r,\Phi_e^r,\Phi_{3a}^r\}.$$

a) если этот минимум равен Φ_d^r, то гарантированное по риску решение (ГРР) задачи Г примет вид (11),

b) если $\Phi^*=\Phi_e^r$, то ГРР задачи Г доставляет формула (12),

c) если такой минимум Φ^* совпадает с Φ_{3a}^r, то явный вид ГРР в (18).

В результате первая итоговая

Теорема 1. *Пусть в задаче* Г *имеет место*

$$a_i<\frac{1+r}{1+d_i}K_i\leqslant\frac{a_i+b_i}{2}\ (i=d,e).$$

Тогда,

если (a) $min\{\Phi_d^r,\Phi_e^r,\Phi_{3a}^r\}=\Phi_d^r$, *то ГРР примет вид*

$$(1-x_d^r, x_d^r, 0, \Phi_d^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}, 0, \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d - a_d}, \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d - a_d}, 0, \frac{\frac{1+d_d}{K_d}[\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_e}K_d]}{b_d - a_d} = \Phi_d^r \geqslant 0); \quad (24)$$

если (b) $min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\} = \Phi_e^r$, *то ГРР будет*

$$(1-x_e^r, 0, x_e^r, \Phi_e^r) = (\frac{\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}, \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e - a_e}, 0, \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e - a_e}, \frac{\frac{1+d_e}{K_e}[\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e][b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e]}{b_e - a_e} = \Phi_e^r \geqslant 0); \quad (25)$$

если (c) $min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\} = \Phi_{3a}^r$, *то ГРР имеет вид*

$$(0, 1-x_e^r, x_e^r, \Phi_{3a}^r) = (0, \frac{\beta_d+\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}, \frac{\beta_e+\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}, \frac{\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)},$$
$$\frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}), \quad (26)$$

здесь $\alpha_i = \frac{1+d_i}{K_i}(\frac{1+r}{1+d_i}K_i - a_i)$, $\beta_i = \frac{1+d_i}{K_i}(b_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i)$ $(i = d, e)$.

Объединение утверждений 2, 3 и 5.

Итак, пусть теперь $0 < \frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ $(i = d, e)$. Снова находим $min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3b}^r\}$ и $min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3c}^r\}$.

Лемма 7. *При* $\frac{a_i+b_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ *имеют место*

$$\Phi_e^r < \Phi_{3b}^r,$$

$$\Phi_d^r < \Phi_{3c}^r.$$

Доказательство 7. *Действительно,* $\alpha_i = K\frac{1+r}{1+d_i} - a_i > 0$ $(i = d, e)$ *и тогда*

$$\Phi_e^r = \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e} < \frac{\alpha_e\beta_e + \alpha_d\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e} = \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e} + \frac{\alpha_d\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e} = \Phi_{3b}^r = \Phi_e^r + \frac{\alpha_d\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e},$$

$$\Phi_d^r = \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d} < \frac{\alpha_d\beta_d + \alpha_e\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d} = \Phi_{3b}^r = \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d} + \frac{\alpha_d\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d} = \Phi_d^r + \frac{\alpha_e\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d},$$

т.к. имеет место импликация

$$[\alpha_i > 0, \beta_i \geqslant 0\ (i = d, e)] \Longrightarrow [\frac{\alpha_e \alpha_d}{\alpha_d + \beta_d} > 0].$$

С учетом леммы 7 получаем

Теорема 2. *Если выполнено*

$$\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i\ (i = d, e),$$

то гарантированное по риску решение задачи Γ

a) *при* $\Phi_d^r \leqslant \Phi_e^r$ *имеет вид (24),*
b) *при* $\Phi_d^r \geqslant \Phi_e^r$ *имеет вид (25).*

Доказательство 8. *В случае* $\Phi_d^r \leqslant \Phi_e^r$*, с учетом леммы 7, имеем*

$$min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3b}^r\} = \Phi_d^r,$$

а в случае $\Phi_d^r \geqslant \Phi_e^r$ -

$$min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3c}^r\} = \Phi_e^r.$$

Отсюда и из этапа 4, а также из утверждений 2 и 3 следует справедливость теоремы 2.

Объединение утверждений 2, 3 и 6.

Как и в предыдущем случае предполагаем, что $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i\ (i = d, e)$ и $\frac{1+d_d}{K_d} a_d = \frac{1+d_e}{K_e} a_e$.

Здесь, как и в теореме 1, следует найти $min\,\{\Phi_d^r, \Phi_{3b}^r, \alpha_d = \alpha_e\}$ и затем, в зависимости от того, при каком из этих трех чисел данный минимум достигается и с помощью соответствующему ему утверждению (2, 3 или 6) построим ГРР. Именно, имеет место

Теорема 3. *Пусть в задаче* Γ *имеет место*

$$\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i\ (i = d, e),$$

$$\left[\frac{1+d_d}{K_d} a_d = \frac{1+d_e}{K_e} a_e\right] \Longleftrightarrow \left[\alpha = \alpha_e = \alpha_d\right].$$

Тогда, если

a) $min\ \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_d^r$, *то ГРР имеет вид (24);*
b) $min\ \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_e^r$, *то ГРР имеет вид (25),*
c) $min\ \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \alpha$, *то ГРР имеет вид (23).*

5. Выводы

Статью завершим рекомендациями к использованию ЛПРом теорем 1, 2 и 3 для практического построения гарантированного по риску решения (ГРР) в задаче Г.

Шаг 1 Выписать действующие в настоящий момент, числовые значения r, d_e, d_r, K_e, K_d, а также (с помощью экспертов, рекомендаций экономистов или собственных предположений) задать численные значения границ изменения (через год) курсов доллара $[a_d, b_d]$ и евро $[a_e, b_e]$.

Шаг 2 Вычислить семь чисел

$$\alpha_i = K_i\frac{1+r}{1+d_i} - a_i, \beta_i = b_i - K_i\frac{1+r}{1+d_i},$$

$$\Phi_i = \frac{\alpha_i\beta_i}{\alpha_i+\beta_i}\ (i=d,e), \Phi^r_{3a} = \frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}.$$

Шаг 3 Определить $\Phi^0 = min\{\Phi_d, \Phi_e\}$.

Шаг 4 - вариант 1. Если $a_i < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < \frac{\alpha_i+\beta_i}{2}$ $(i=d,e)$, то (согласно теореме 1 и утверждению 4) построить $\Phi^* = min\{\Phi^0, \Phi^r_{3a}\}$ и затем, если

a) $\Phi^* = \Phi^r_d$, то ГРР будет

$$(1 - x^r_d - x^r_e, x^r_d, x^r_e, \Phi^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}, 0, \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d});$$

b) $\Phi^* = \Phi^r_e$, то ГРР имеет вид

$$(\frac{\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}, \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e});$$

c) $\Phi^* = \Phi^r_{3a}$, то ГРР станет

$$(0, \frac{\beta_d+\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e+\alpha_d+\beta_d}, \frac{\beta_e+\alpha_d}{\alpha_e+\beta_e+\alpha_d+\beta_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\alpha_e+\beta_e+\alpha_d+\beta_d}).$$

Шаг 4 - вариант 2. Если $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ $(i=d,e)$ и $\alpha_e \neq \alpha_d$, то (согласно теореме 2),

a) при $\Phi^r_d \leqslant \Phi^r_e$ искомое ГРР примет вид

$$(1 - x^r_d - x^r_e, x^r_d, x^r_e, \Phi^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}, 0, \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d});$$

b) при $\Phi^r_d > \Phi^r_e$ ГРР задачи Г будет

$$(\frac{\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}, \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}).$$

Шаг 4 - вариант 3. Если $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i$ $(i=d,e)$ и $\alpha = \alpha_e = \alpha_d$, то (согласно теореме 3), ГРР имеет вид

$$(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = \begin{cases} (24) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_d^r, \\ (25) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_e^r, \\ (23) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \alpha. \end{cases}$$

Наконец (согласно утверждениям 2а и 3а) гарантированное по риску решение (ГРР) будет

$$(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = \begin{cases} (1,0,0,0) \text{ при } a_d \geqslant K_d \frac{1+r}{1+d_d}, \\ (1,0,0,0) \text{ при } a_e \geqslant K_e \frac{1+r}{1+d_e}, \\ (0,1,0,0) \text{ при } b_d \leqslant K_d \frac{1+r}{1+d_d}, \\ (0,0,1,0) \text{ при } b_e \leqslant K_e \frac{1+r}{1+d_e}. \end{cases}$$

Таким образом, в отличие от вариантов 1-3 шага 4, в данном случае все деньги направляются только в один депозит (рублевый (1,0,0,0), долларовый (0,1,0,0) и евро (0,0,1,0)) и с нулевым риском (т.е. «наверняка!») обеспечат себе «самый большой» гарантированный выигрыш: при рублевом $(1 + r)$, при долларовом $\frac{1+d_d}{K_d} a_d$ и в евро $\frac{1+d_e}{K_e} a_e$ соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-90408).

Список литературы

[1] Черемных Ю.Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень.* - М.: ИНФА-М, 2008.

[2] Жуковский В.И., Солдатов Н.Г. *К задаче диверсификации по трем депозитам.* // Вестник Удмурского университета. "Математика, механика, компьютерные науки", 2013, вып. 4, с. 55-61.

[3] Wald A. *Statistical Decision Functions.* - N.Y.: Wiley, 1950.

[4] Венцель Е.С. *Исследование операций.* - М.: Знания, 1976.

[5] Шахов В.В. *Введение в страхование. Экономический аспект.* - М.: Финансы и статистика, 1994.

[6] Спразетдинов Т.К., Спразетдинов Р.Т. *Проблема риска и его моделирование.* // Проблемы человеческого риска, 2007, №1, с. 31-43.

[7] Цветкова Е.В., Орлюкова И.О. *Риски в экономической деятельности.* - Санкт-Петербург: СПбИВЭСЭП, 2002.

[8] Sawage L.Y. *The theory of statistical decision.* // J. American Statistic Association, 1951, №46, p. 55-67.

[9] Капитоненко В.В. *Финансовая матиматика и её приложения.* - М.: Изд-во ПРИОР, 2000.

[10] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов и приложения.* - М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012.

[11] Жуковский В.И., Жуковская Л.В. *Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенностях.* - М.: Едиториал URSS, 2004.

[12] Zhukovskiy V.I.*Lyapunov Functions in Differential Games.* - London and N.Y.: Taylor and Francis, 2003.

[13] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector - Valued Maximin.* - N.Y., etc.: Academic Press, 1994.

[14] Морозов В.В., Сухарев А.Г. и Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* - М.: Высшая школа, 1986.

Guaranteed on risk solution in problem of sum distribution into three deposits (in rubles, dollars and euros) *We are looking at problems of sum distribution (in rubles) into three deposits (in rubles, dollars and euros) in order to obtain the maximum annual income (in terms of rubles). The decision maker (investor) does not know the real dollar and the euro rates at the end of the year, and has to look at some possible rate boundaries or limits for them. The solution of this problem depends on the readiness of the decision-maker to take risks. The contents of this article are the ways to construct the decisions of guaranteed risks onto account. This paper is actually devoted to constructing of a guaranteed on risk solution.*

Keywords: probability measure, mixed strategy, weak compactness in itself, guarantee, Berge-Vaisman equilibrium, Nash equilibrium, maximin.