Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 112–124.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин, Р. О. Шпилёв

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА О ВЫПУКЛОСТИ ДЛЯ ε-КВАЗИМЕР И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ О РАЗДЕЛЕ РЕСУРСОВ

В данной работе продолжаются начатые нами ранее исследования задачи о разделе ресурсов при условии пренебрежения достаточно малыми величинами. Введён новый аналог понятия меры множества — понятие ε-квазимеры. Для ε-квазимер доказан аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры в форме квазивыпуклости. На базе полученного результата показана разрешимость задачи о справедливом разделе ресурсов, причём не обязательно в равных отношениях.[1]

Ключевые слова: ε-квазимера, задача о разделе сокровищ, монотонность, промежуточная непрерывность, непрерывность сверху, квазивыпуклость, теорема А.А. Ляпунова.

Вступление

Мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Задача о справедливом разделе ресурсов (сокровищ) изучается математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для этих исследований, как правило, служит работа А. А. Ляпунова [1], в которой доказана теорема о выпуклости образа векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы Неймана [2] и Штейнгауза [3], в которых рассмотрены приложения основного результата Ляпунова к задаче о разделе сокровищ (ресурсов). Задачу о разделе ресурсов можно сформулировать следующим образом [2].

Задача. Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу поровну. При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей

[1]Первый автор поддержан грантом АР Крым для молодых учёных Крыма 2014 года

меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Оценку частей считаем неотрицательной. При каких условиях на добычу и функции множеств, используемые разбойниками, такой раздел будет возможным?

В известном результате [2, 3] о разрешимости такой задачи предполагалось, что для оценки сокровищ используются меры, а добыча бесконечно делима (каждый разбойник может разделить множество на произвольное число частей, равных с его точки зрения). Проблеме справедливого раздела ресурсов посвящено множество работ работ (см., например [4] — [13]). Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные, аддитивные, вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Однако можно встретить работы, в которых для моделирования соответствующих задач рассматриваются также и неаддитивные функции множества (например [13, 13]).

Использование мер также невозможно в случаях пренебрежения достаточно малыми или большими множествам, поскольку возникающие при этом функции множеств теряют аддитивность. Такая постановка задачи о разделе ресурсов рассматривалась в недавней работе [15] с использованием понятия квазимеры множества. Однако предложенный в [15] подход к проблеме не позволил получить аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости для квазимер и ввиду этого не удалось доказать возможность раздела объектов в любом отношении, а только лишь на равные части. Устранение данного недостатка направлена настоящая работа — одна из целей данной работы.

В разделе 1 работы напоминается подход к построению аналога понятия меры (квазимеры) из работы [15]. В разделе 2 вводится более сильное понятие — ε-квазимера множества и доказывается аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа для векторных ε-квазимер в форме квазивыпуклости (теорема 4). На базе полученного результата в разделе 3 установлена разрешимость задачи о разделе ресурсов при условии использования каждым лицом ε-квазимер для оценки частей делимых объектов (теорема 6).

1. Понятие квазимеры множества. Примеры квазимер

Напомним понятие квазимеры из [15]. Для этого сначала приведём вспомогательные понятия.

Определение 1. Функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$) ρ называется **монотонной**, если $\forall A, B \in \Phi : A \supset B \quad \rho(A) \geqslant \rho(B)$.

Также мы используем аналог свойства Дарбу, которое названо нами промежуточной непрерывностью.

Определение 2. Пусть ρ — функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$). Будем называть её **промежуточно непрерывной**, если для $\forall A, B \in \Phi : A \subset B$,
$\rho(A) = a \ (a > 0), \ \rho(B) = b \ \ (b > a) \ \ \forall c \in (a; b) \ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c, \ \ A \subset C \subset B$.

В работе также будет использовано и классическое свойство полунепрерывности сверху.

Определение 3. Функция множества $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ называется **полунепрерывной сверху**, если для $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots :$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Приведём теперь понятие квазимеры из работы [15].

Определение 4. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$.

Будем говорить, что ρ — **квазимера**, если:
1. $\forall A \in \Phi \colon \rho(A) \geqslant 0; \ \ \rho(\varnothing) = 0$;
2. ρ монотонна по определению 1;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 3.

Рассмотрим некоторые примеры квазимер над системой множеств, каждое из которых является объединением отрезков на прямой.

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m, \beta_m) \mid \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \bigcap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}, \text{ где } R = [0; 1).$$

Эта система является монотонным классом множеств.

Пример 1.

$$\rho_{\varepsilon}^{**}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon \end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.

$$\rho_{\varepsilon}^{2}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|\right)^2, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon \end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

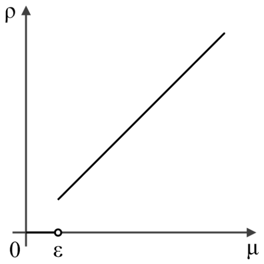

Рис. 1: иллюстрация к примеру 1

Пример 3.

$$\rho_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{m=1}^{n}[\alpha_m;\beta_m)\right)=\begin{cases}\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|}, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|\geqslant\varepsilon\\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|<\varepsilon\end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Эти примеры моделируют вышеупомянутые ситуации пренебрежения «малыми» множествами. При этом все вышеуказанные квазимеры не будут мерами, так как не удовлетворяют свойству аддитивности. Это можно легко обнаружить, если взять два множества, каждое из которых имеет нулевую оценку, но объединение которых имеет ненулевую оценку.

2. Определение ε-квазимеры и аналог теоремы А.А. Ляпунова

На базе понятия квазимеры в работе [15] удалось доказать разрешимость задачи о разделе ресурсов в равном отношении. В настоящей работе ставится задача так ввести аналог понятия меры для оценки частей делимых ресурсов, чтобы удалось получить возможность справедливого раздела не только в равных отношениях, но и в различных. Для этого необходимо получить фундаментальный результат — аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа меры в какой-то форме. А для такой задачи уже понятие квазимеры из [15] не подходит. В настоящем разделе работы мы предложим аналог понятия квазимеры, который позволяет учесть пренебрежение «малыми» множествами и при этом сохранить в некотором смысле свойство аддитивности. Начнём с определения понятия ε-квазимеры множества.

Определение 5. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция ρ $\quad(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$.

Будем говорить, что ρ — ε-**квазимера**, если:

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$
2. ρ монотонна по определению 1;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 3;
5. $\forall A, B \colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing \colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$.

Свойство 5 мы назовём *ε-квазиаддитивностью.* Как можно заметить, среди рассмотренных выше примеров 1 — 3 только отображение из примера 1 будет удовлетворять определению ε-квазимеры.

Основная задача данного раздела работы — получить аналог теорема А.А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры. Начнём со вспомогательного результата. Всюду мы полагаем, что Φ — монотонный класс множеств.

Теорема 1 (*Теорема о двух множествах*)**.** *Пусть ρ — ε-квазимера, $A \in \Phi$ и $\rho(A) = C$, $C > 2\varepsilon$. Тогда для произвольной пары множеств $A_1, A_2 \in \Phi \colon\ \rho(A_i) \neq \frac{1}{2}C, A_1 \cup A_2 = A; A_1 \cap A_2 = \varnothing$*

$$\exists k, l :\ \ \rho(A_k) > \frac{1}{2}C,\ \ \rho(A_l) < \frac{1}{2}C.$$

Доказательство. 1. Если $\exists k, l \colon\ \ \rho(A_k) > \frac{1}{2}C,\ \ \rho(A_l) < \frac{1}{2}C$, то теорема доказана. В этом случае выбираем A_k и A_l в качестве искомых множеств.

2. Иначе возможны два случая:

а) $\rho(A_1) > \frac{1}{2}C, \rho(A_2) > \frac{1}{2}C$;

б) $\rho(A_1) < \frac{1}{2}C, \rho(A_2) < \frac{1}{2}C$.

3. Докажем, что при сформулированных условиях теоремы случаи а) и б) невозможны.

а) Пусть $\rho(A_1) > \frac{1}{2}C, \rho(A_2) > \frac{1}{2}C$. Допустим, что $\rho(A_1) = \frac{1}{2}C + \delta_1$, $\rho(A_2) = \frac{1}{2}C + \delta_2$. Они заведомо больше ε ввиду малости последнего. $A = A_1 \dot\cup A_2 \colon A_2 = A \backslash A_1$. Отсюда получаем, что: $\rho(A_2) = \rho(A) - \rho(A_1) = C - (\frac{1}{2}C + \delta_1) = \frac{1}{2}C - \delta_1 < \frac{1}{2}C$. Противоречие.

б) Пусть $\rho(A_1) < \frac{1}{2}C, \rho(A_2) < \frac{1}{2}C$. Рассуждаем аналогично: допустим, что $\rho(A_1) = = \frac{1}{2}C - \delta_1$, $\rho(A_2) = \frac{1}{2}C - \delta_2$. Так как $A_2 = A \backslash A_1$, то $\rho(A_2) = \rho(A) - \rho(A_1) = C - (\frac{1}{2}C - \delta_1) = \frac{1}{2}C + \delta_1 > \frac{1}{2}C$ — противоречие. В случае, когда, например, $\rho(A_1) = 0 < \varepsilon$ имеем, что $\rho(A_2) \geqslant C - \varepsilon > \frac{1}{2}C$ ввиду условия на ε. Снова получаем противоречие.

Итак, случаи а) и б) невозможны и теорема 2 доказана.

Для дальнейших рассуждений мы будем использовать понятие плотной системы множеств.

Определение 6. Будем называть систему подмножеств $\Phi_0 = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **плотной в Φ для квазимеры** ρ, если для $\forall A \in \Phi_0\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists B \in \Phi_0\ \ (B \neq A):$

$$\rho\left(A \bigcup B\right) - \rho(B) < \varepsilon.$$

Пример 4. Пусть $R = [0;1)$

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m) | \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \bigcap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}.$$

Тогда система

$$\Phi_0 = \left\{ [\alpha_k, \beta_k) \mid \ \alpha_k, \beta_k \in Q, \ \beta_k - \alpha_k = \frac{1}{2} \right\}$$

будет плотной в Φ для функций множества из примеров 1 — 3, поскольку произвольное множество $A = [\alpha, \beta) \colon \beta - \alpha = \frac{1}{2}$ «покрывается» системой множеств Φ_0.

Заметим, что плотную систему множеств з некоторыми дополнительным условиями позволяет получить следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $T \in \Phi$ — монотонный класс множеств. ρ_1 — ε-квазимера, $\rho_1(T) = C > 2\varepsilon$. Тогда можно построить плотную систему множеств Φ_1 такую, что*

$$\Phi_1 = \left\{ A_i \in \Phi \colon \rho_1(A_i) = \frac{1}{2} C \right\} \colon \ \ \forall B \in \Phi_1 \quad \exists A \in \Phi_1 \colon T = A \dot\cup B.$$

Доказательство. Покажем, как можно построить Φ_1:

1. Возьмём некоторое подмножество $A \subset T \in \Phi\colon \ \rho(A) = \frac{1}{2}C$. Обозначим $B = T \backslash A$. $\rho(B) = \frac{1}{2}C$ в силу квазиаддитивности. Добавим оба множества в Φ_1.

2. Выполним следующие действия над парой A, B:

- В силу промежуточной непрерывности ρ_1, выберем $A' \subset A \colon \rho(A' \bigcup B) = = \frac{1}{2}C + \delta$ $(\delta < \varepsilon)$, затем перейдём к $B' \colon B' \subset A' \bigcup B \colon \rho(B') = \frac{1}{2}C$ (в силу непрерывности ρ_1). Добавим A' и B' в Φ_1.
- Далее из множеств A' и B' будем получать A'' и B'' : $\rho_1(A'') = \rho_1(B'') = \frac{1}{2}C$.

Аналогично можно получить $A''', B''', A^{(4)}, B^{(4)}, \ldots, A^{\left[\frac{C}{\delta}\right]}, B^{\left[\frac{C}{\delta}\right]}$ (где $\left[\frac{m}{n}\right]$ — целая часть дроби $\frac{m}{n}$). Все эти множества добавляем в Φ_1. Далее уменьшим δ (возьмём $\frac{1}{2}\delta$ вместо δ) и будем проводить аналогичные построения, начиная с пары A и B.

Таким образом, для $\forall i \colon \rho_1(A^{(i)} = \rho_1(B^{(i)} = \frac{1}{2}C$, то есть, мы получим плотную систему множеств, каждое из которых имеет оценку $\frac{1}{2}C$ с точки зрения ρ_1. Отсюда, Φ_1 — искомая система множеств.

Теперь переходим к построению необходимой плотной системы множеств для произвольного конечного числа ε-квазимер.

Теорема 3. *Пусть Φ — монотонный класс множеств, $T \in \Phi$. Пусть ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_n — ε-квазимеры и $\rho_l(T) > 2\varepsilon$ $\forall 1 \leqslant l \leqslant n$.*

Тогда $\exists A, B \in \Phi$: 1) $A \dot\cup B = T$;

2) $\rho_l(A) = \rho_l(B) = \frac{1}{2}\rho_l(T)$ $\forall 1 \leqslant l \leqslant n$.

Доказательство. Итак, нам необходимо показать то, что мы можем построить плотную систему множеств

$$\Phi_{1,2,\ldots,n} = \{S_i \in \Phi\colon \rho_j(S_i) = \frac{1}{2}\rho_j(T), \forall i, j\}\colon \quad \forall B \in \Phi_{1,2,\ldots,n} \quad \exists A \in \Phi_{1,2,\ldots,n}\colon T = A\dot{\cup}B.$$

В теореме 2 мы уже доказали возможность построения плотной системы множеств Φ_1:

$$\forall A \in \Phi_1\colon \quad \rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T); \quad \forall B \in \Phi_1 \quad \exists A \in \Phi_1\colon T = A\dot{\cup}B.$$

Теперь покажем возможность построения плотной системы множеств $\Phi_{1,2}$ ($\Phi_{1,2} \subset \Phi_1$) для двух квазимер ρ_1 и ρ_2.

Базис индукции. Приведём алгоритм выделения плотной системы множеств $\Phi_{1,2}$ для ρ_1, ρ_2. Пусть первый разбойник некоторым образом разделил T на A_0 и B_0: $A_0\dot{\cup}B_0 = T$, $\rho_1(A_0) = \rho_1(B_0) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$. Если $\rho_2(A_0) = \rho_2(B_0)$, то утверждение доказано. Пусть $\rho_2(A_0) \neq \rho_2(B_0)$. Будем считать, что $\rho_2(A_0) < \rho_2(B_0)$ (тогда, в силу аддитивности, $\rho_2(A_0) < \frac{1}{2}\rho_2(T)$ и $\rho_2(B_0) > \frac{1}{2}\rho_2(T)$).

Начнём обменивать между собой части A_0 и B_0 до тех пор, пока не получим множества равные как по мере ρ_1, так и по мере ρ_2.

1. Рассмотрим множества A_0 и $A_0 \cup B_0$. В силу промежуточной непрерывности выберем систему множеств $A'_1, \ldots, A'_k$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$), такую что $A_0 = A'_1 \subset \cdots \subset A'_k = A_0 \cup B_0$ и $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$\rho_1(A'_l) - \rho_1(A'_{l-1}) = \frac{\rho_1(A_0 \cup B_0) - \rho_1(A_0)}{k-1}.$$

2. Выберем систему подмножеств $S_1, \ldots, S_k$. таким образом, чтобы $\rho_1(S_1) = \cdots = \rho_1(S_k) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$ и при этом $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$A'_l \backslash A'_{l-1} \subset S_l \subset A'_l.$$

3. Будем поочерёдно измерять S_l по мере ρ_2, пока не наступит момент, когда $\rho_2(S_l) > \frac{1}{2}\rho_2(T)$. Это должно случиться, так как $S_k = B, (A \cup B)\backslash S_k = A$. Пусть знак меняется на шаге $i_0 + 1$.

4. Рассмотрим теперь множества S_{i_0} и $S_{i_0} \cup S_{i_0+1}$ (заметим ещё раз, что $\rho_1(S_{i_0+1}\backslash S_{i_0}) = \frac{\rho_1(A_0 \cup B_0) - \rho_1(A_0)}{k-1}$). Снова выберем систему множеств $A'_{i_0,1}, \ldots, A'_{i_0,k}$: $A'_{i_0,1} \subset \cdots \subset A'_{i_0,k}$ так, чтобы $S_{i_0} = A'_{i_0,1}$, $A'_{i_0,k} = S_{i_0} \cup S_{i_0+1}$, и $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$\rho_1(A'_{i_0,l}) - \rho_1(A'_{i_0,l-1}) = \frac{\rho_1(S_{i_0} \cup S_{i_0+1}) - \rho_1(S_{i_0})}{(k-1)^2}.$$

5. Теперь, аналогично пункту 2 алгоритма, выберем систему множеств $S_{i_0,1}, \ldots, S_{i_0,k}$ такую, что $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$A'_{i_0,l} \backslash A'_{i_0,l-1} \subset S_{i_0,l} \subset A'_{i_0,l}$$

и

$$\rho_1(S_{i_0,1}) = \dots = \rho_1(S_{i_0,k}) = \frac{1}{2}\rho_1(T).$$

6. Продолжим процесс измерения и выбора новых систем множеств:

$$A'_{i_0,i_1,\dots,1}, S_{i_0,i_1,\dots,1}, A'_{i_0,i_1,\dots,2}, S_{i_0,i_1,\dots,2}, \dots, A'_{i_0,i_1,\dots,k}, S_{i_0,i_1,\dots,k}.$$

При этом в условии на меру в знаменателе вместо $(k-1)$, $(k-1)^2$ будем получать $(k-1)^3$, $(k-1)^4$ и так далее.

7. В силу монотонности ρ_2 верным будет следующий ряд неравенств:

$$\rho_2(S_{i_0}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T);$$

$$\dots$$

$$\rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T).$$

В силу монотонности ρ_2:

$$\rho_2(S_{i_0} \cap S_{i_0+1}) < \rho_2(S_{i_0,i_1} \cap S_{i_0,i_1+1}) < \dots < \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cap S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);$$

$$\frac{1}{2}\rho_2(T) < \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cup S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) < \dots < \rho_2(S_{i_0,i_1} \cup S_{i_0,i_1+1}) < \rho_2(S_{i_0} \cup S_{i_0+1}).$$

В силу промежуточной непрерывности ρ_2

$$\exists A \in \Phi\colon \rho_2(A) = \frac{1}{2}\rho_2(T),$$

$S_{i_0} \cup S_{i_0+1} \supset \dots \supset S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cup S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \supset \dots \supset A \supset \dots \supset S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cap S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \supset \dots \supset S_{i_0} \cap S_{i_0+1}$.

8. Покажем теперь, что $\rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$. Во время распределения верно было следующее:

$$\rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,l+1}) - \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,l}) = \frac{\rho_1(T)}{2(k-1)^{n-1}}, \forall 1 \leqslant l \leqslant k-1,$$

а поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_1(T)}{2(k-1)^{n-1}} = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n}).$$

В силу монотонности построенной системы множеств и непрерывности меры ρ_1, получаем:

$$\rho_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \cup A'_{i_0,i_1,\dots,i_n})\right) = \frac{1}{2}\rho_1(T),$$

так как $\rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_{n-1},1} = \frac{1}{2}\rho_1(T)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,k}) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$, а значит, $\rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$.

Индуктивный переход. Пусть построена система множеств $\Phi_{1,\dots,t}$, плотная для каждой из t $(t < n)$ ε-квазимер $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$: $\forall X \in \Phi_{1,\dots,t}, 1 \leqslant i \leqslant t\colon \rho_i(X) = \frac{1}{2}\rho_i(T)$, и для $\forall B \in \Phi_{1,\dots,t}$ $\exists A \in \in \Phi_{1,\dots,t}\colon$ $T = A \dot\cup B$. Будем считать далее ε-квазимеры $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ «склеенными» и рассмотрим все возможные множества из $\Phi_{1,\dots,t}(A \in$

$\Phi_{1,\dots,t}\colon\ T = A\dot{\cup}B$) и строим плотную систему множеств $\Phi_{1,\dots,t,t+1}(\Phi_{1,\dots,t,t+1} \subset \Phi_{1,\dots,t})$ по $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{t+1}$ ($\forall X \in \Phi_{1,\dots,t,t+1}, 1 \leqslant i \leqslant t+1\colon \rho_i(X) = \frac{1}{2}\rho_i(T)$ и $\forall B \in \Phi_{1,\dots,t+1}\ \exists A \in \Phi_{1,\dots,t+1}\colon\ T = A\dot{\cup}B$). Делаем это аналогично построению $\Phi_{1,2}$ (при $t = 2$).

Примечание к теореме. Заметим, что благодаря построению плотной системы множеств мы получаем не только пару множеств, равных по всем ε-квазимерам, но и бесконечное количество таких пар.

Из предыдущего результата вытекает один из основных результатов работы — аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости множества значений векторной ε-квазимеры. Для удобства введём обозначение $\overrightarrow{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$. Если ρ_i — ε-квазимеры при всех $i = 1, ..., n$, то будем говорить, что $\overrightarrow{\rho}$ — есть *векторная ε-квазимера.*

Теорема 4. *Если $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, то множество $\vec{\rho}(\Phi)$* ***квазивыпукло****, то есть*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\ \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

3. Решение задачи о разделе сокровищ с использованием ε-квазимер

Теперь на основании построенной теории ε-квазимер предложим вариант решения задачи о разделе сокровищ разбойниками, если каждый из этих разбойников использует ε-квазимеру для оценки частей сокровищ. При этом ввиду полученного аналога теорема А.А. Ляпунова мы рассмотрим несколько усиленную формулировку задачи.

Задача. *Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу в некотором заданном отношении $\lambda_1 : \lambda_2 : ... : \lambda_n$ ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ и для определённости можно положить, что $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$). При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Будем полагать, что каждый работник использует для оценки сокровищ ε-квазимеры, заданные на монотонном классе множеств Φ. При каких условиях на ε-квазимеры, используемые разбойниками для оценки частей делимых сокровищ, такой раздел будет возможным?*

Докажем разрешимость поставленной задачи. Для начала из теоремы 4 можно вывести существование подмножества с одинаковой оценкой с точки зрения всех квазимер.

Теорема 5. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \dots, 1)$. Тогда $\forall \delta$ ($\varepsilon < \delta < 1$) $\exists D \subset A$: $\rho(\vec{D}) = (\delta, \delta, \dots, \delta)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2, будет существовать плотная система множеств, по ε-квазимере равных δ. Далее будем действовать по алгоритму, аналогичному доказательству теоремы 3, а именно: согласовывать множество поочерёдно по каждой из ε-квазимер.

Следствие 1. $\exists E \subset A\colon \overrightarrow{\rho}(E) = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Это очевидным образом следует из теоремы 5 и полунепрерывности ε-квазимер сверху.

Приведённые теоремы позволяют вывести последний финальный результат работы — разрешимость задачи о разделе ресурсов.

Теорема 6. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — набор чисел, причём $\lambda_i \geqslant \varepsilon$ $\forall i$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Тогда $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A\colon$, $L_i \in \Phi$*

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

где $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

Доказательство. Отметим, что процесс построения искомого разбиения множества А будет аналогичен таковому из доказательства теоремы 3. На первом шаге (для λ_1) мы получаем множество L_1: $\overrightarrow{\rho}(L_1) = (\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$, причём в силу ε-квазиаддитивности $\overrightarrow{\rho}(A \backslash L_1) = (1 - \lambda_1, 1 - \lambda_1, \ldots, 1 - \lambda_1)$. Продолжая отделение от A множеств L_i $(i = \overline{1, n})$, получаем в итоге искомое разбиение множества А.

Список литературы

[1] Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях. / А. А. Ляпунов. // Известия АН СССР. — 1940. — Т. 4. — С. 465 – 478.

[2] Neyman J. Un theor‘em d’existence / J. Neyman // C.R. Acad. Sci. Paris. — Vol. 222. — 1946. — P.843 — 845.

[3] Steinhaus H. Sur la division pragmatique / H. Steinhaus // Econometrica. — Vol. 17(Supplement: Report of the Washington Meeting). — 1949.— P. 315 – 319.

[4] Ляпунов А.Н. Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений мер // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 257 — 261.

[5] Кутателадзе С.С. Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 262 — 264.

[6] Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. — 1972. — т. 27, вып. 3. — С. 21 — 77.

[7] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — т. 23, вып. 6. — С. 51 — 116.

[8] Robertson J. Cake-cutting algorithms: Be fair if you can / J. Robertson and W. Webb. AK Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1998.

[9] Steven J. Brams Michael A. Jones Christian Klamler. Better Ways to Cut a Cake. – NY .– UNITED STATES – 2006.

[10] Arzi Orit. Throw One's Cake and Eat It Too / Orit Arzi, Yonatan Aumann Yair Dombb. // arXiv:1101.4401v2 [cs.GT] 11 Nov 2011.

[11] Mossel Elchanan. Truthful Fair Division / Elchanan Mossel, Omer Tamuz // arXiv:1003.5480v2 [cs.GT] 31 Jul 2010.

[12] Chen Y. Truth, justice, and cake cutting / Yiling Chen, John Lai, David C. Parkes, and Ariel D. — Procaccia.Association for the Advancement of Artificial Intelligence. 2010.

[13] Fabio Maccheroni. How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations / Maccheroni Fabio, Marinacci Massimo // Social Choice and Welfare. – Springer-Verlag GmbH — 2003. — P. 457 – 465.

[14] Husseinov F., Sagarab N. Concave measures and the fuzzy core of exchange economies with heterogeneous divisible commodities/ F. Husseinov, N. Sagarab // Fuzzy Sets and Systems. — 2012. — Vol. 198. — P. 70 -– 82

[15] Стонякин Ф. С., Магера М. В. Розв'язання задачі про розділ скарбів для довільної кількості розбійників // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — Т.: 26 (65). — 2013, № 1. — С. 109-128.

Аналог теореми Ляпунова про опуклість для е-квазимір та його застосівання до задачі про розподіл ресурсів

У даній роботі продовжено розпочаті нами раніше дослідження задачі про розділ ресурсів в умовах нехтування достатньо малими величинами. Введено новий аналог поняття міри множини — поняття ε-квазиміри. Для ε-квазимір доведено аналог теореми О.А. Ляпунова про опуклість образу міри у формі квазиопуклості. На базі одержанного результату показано розв'язність задачі про справедливий розділ ресурсів, причому не обов'язково у рівних відношеннях.

Ключові слова: ε-квазиміра, задача про розділ скарбів, монотонність, проміжна неперервність, неперервність зверху, квазиопуклість, теорема О.А. Ляпунова.

Analog Lyapunov convexity theorm for e-quasimeasures and its application to fair division problem.

This paper is devoted to new approach for the well-known fair division problem. The usual method to such problems is to consider that subjects use additive, nonatomic and probability measures for estimating of divided objects parts. But this convention isn't effective for many cases. For example, let's suppose that there are small enough sets with zero estimation. However, union

of some such negligible sets may be nonzero estimation. In this case estimation function is not additive and nonatomic. To investigate this problem we introduce a new generalization of measure, concept of ε-quasi-measure. Let's start with auxiliary definitions.

Definition 1. Set function $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ ρ is called **monotone**, if $\forall A, B \in \Phi:$ $A \supset B \quad \rho(A) \geq \rho(B)$.

In this paper we introduce the property of intermediate continuity for set functions.

Definition 2. Let ρ be a set function $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Let's call it **intermediately continuous**, if $\forall A, B \in \Phi: A \subset B,\ \rho(A) = a\ (a > 0),\ \rho(B) = b\ (b > a) \forall c \in (a; b)\ \exists C \in \Phi: \rho(C) = c,\ \ A \subset C \subset B$.

Also we need in classical property upper semicontinuity.

Definition 3. Set function $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ is called **upper semicontinuous**, if $\forall A_1, ..., A_n, ... \in \Phi: A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...:$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \rho(A_n).$$

Now we define a concept of quasi-measure.

Definition 4. Suppose that in some space (set) $\mathfrak{R}$ there is a set system and a function $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Say that ρ is a **ε-quasi-measure**, if:

1. $\forall A \in \Phi: \rho(A) \geq 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0$;
2. ρ is monotone by definition 1;
3. ρ is intermediately continuous by definition 2;
4. ρ is upper continuous by definition 3;
5. $\forall A, B\colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing\colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$.

The following Lyapunov Convexity Theorem's analogue is obtained for ε-quasi-measures. We say that $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ is a vector ε-quasi-measure if ρ_i is an ε-quasi-measure on a monotone class of sets Φ.

Theorem 1. *If $\vec{\rho}$ is a vector ε-quasi-measure then the set $\vec{\rho}(\Phi)$ is **quasi-convex**, i.e.*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\ \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

On the base of this result the fair division problem is solved for case of any finite number subjects. The final result is given by the following theorem.

Theorem 2. *Let Φ be a monotone class of sets, $A \in \Phi$ is a set of objects and $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ are such ε-quasi-measures that $\rho(A) = \rho_2(A) = ... = \rho_n(A) = 1.$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are such* *numbers that* $\lambda_i \geqslant \varepsilon$ $\forall i$ *and* $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$*. Then* $\exists L_1, L_2, \dots, L_n \subset A$:

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

where $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ *and* $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n) = \varnothing$.

The previous result gives sufficient conditions for solvability the fair division problem in the case of n *subjects using* ε*-quasi-measures for estimating parts of divided objects.*

Keywords: ε-quasi-measure, fair division problem, monotonicity, intermediate continuity, upper continuity, Lyapunov Convexity Theorem.