Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 58–64.

УДК 517.98: 517.984.4: 517.2: 517.927.2: 517.927.2

Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская

АБСТРАКТНЫЕ СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

В статье на базе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа рассмотрен новый класс смешанных краевых и спектральных задач и задач сопряжения.

Ключевые слова: формула Грина, липшицева граница, гильбертово пространство, слабое решение, вспомогательные задачи.

E-mail: kopachevsky@crimea.edu, radomirskaya@mail.ru

1. Введение

1.1. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств. Пусть $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$, $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ - сепарабельные гильбертовы пространства с введенными скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

(1) Пространство F плотно вложено в E, $F \hookrightarrow E$ и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ \forall u \in F. \tag{1}$$

(2) На пространстве F задан оператор γ, который называется абстрактным оператором следа и ограниченно действует из F в G. Причем $\gamma:\ F \to G_+ \hookrightarrow G$ и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F,\ b > 0,\ u \in F. \tag{2}$$

(3) Ядро $\ker\gamma$ оператора γ плотно в E.

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств* $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$, $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ *и для абстрактного оператора следа* γ *выполнены условия (1)-(3). Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение* $Lu \in F^*$ *и абстрактная* *производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяется однозначно.

Замечание 4. Косыми скобками $\langle \eta, u \rangle_E$ обозначают значение функционала $v \in F^*$ на элементе $\eta \in F$; аналогичный смысл имеет выражение $\langle \varphi, \psi \rangle_G$.

1.2. **Обобщенная формула Грина для оператора Лапласа.** Пусть $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\gamma u := u \mid_\Gamma$ $(\forall u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \partial\Omega$ - липшицева граница области Ω.

Теорема 2. *Если выполнены сформулированные выше условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$\begin{aligned}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\partial\Omega = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta,\ u \in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{4}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{5}$$

1.3. **Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач.** Пусть $\{p_k\}_{k=1}^q$ – непрерывные проекторы, действующие в G_+, причем $\sum_{k=1}^q p_k = I_+$ (единичный оператор в G_+). Пусть также выполнены условия

$$p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,q}, \quad \rho_k \omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,q}, \tag{6}$$

где $(I_+)_k$ – единичный оператор в $(G_+)_k := \rho_k G_+$, ρ_k – непрерывный оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k – непрерывный оператор продолжения с $(G_+)_k$ на G_+. Тогда

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \quad \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*,\ k = \overline{1,q}, \tag{7}$$

причем ω_k^* – оператор сужения, а ρ_k^* – оператор продолжения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1)-(3), а также условие* (6) *либо* (7) *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ \gamma_k\eta := \rho_k \gamma\eta \in (G_+)_k, \\ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,q}.\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь γ_k *- абстрактный оператор следа на часть границы области, а* ∂_k *- абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.*

1.4. **Обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач.** Рассмотрим в условиях п. (1.2) ситуацию, когда липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на непересекающиеся куски Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k,\ k=\overline{1,q}$.

Теорема 4. *Если выполнены сформулированные условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \forall\ \eta,\ u \in H^1(\Omega), \qquad (10)$$

$$\gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u := \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,q}. \qquad (11)$$

2. Смешанные краевые задачи сопряжения

2.1. **Постановка задачи.** Теорема (4) позволяет исследовать разрешимость смешанных краевых задач сопряжения для нескольких примыкающих друг к другу областей, на общих границах которых заданы условия сопряжения.

Аналогичные построения могут быть проведены и в абстрактной форме на основе теоремы (3).

Будем для определенности считать, что в $\mathbb{R}^m$ имеются три области $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$, примыкающие друг к другу по липшицевым кускам границ $\Gamma_{jk},\ \Gamma_{jk} = \Gamma_{kj},\ j,k = 1,2,3$, и имеющие внешние (свободные) границы $\Gamma_{kk},\ k=\overline{1,3}$. Через $\gamma_{jk}u_k$ будем обозначать след функции u_k на Γ_{jk}, через $\partial_{jk}u_k$ - соответствующую производную по внешней нормали к области Ω_k.

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу (конфигурирация – разрезанный на три части арбуз с тремя примыкающими друг к другу внутренними границами):

$$\begin{array}{ll} u_1 - \triangle u_1 = f_1 \quad (\Omega_1), & \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_2 - \triangle u_2 = f_2 \quad (\Omega_2), & \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_3 - \triangle u_3 = f_3 \quad (\Omega_3), & \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\Gamma_{33}). \end{array} \qquad (12)$$

В качестве условий сопряжения выберем следующие условия:

$$\begin{array}{lll} \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, & \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{23}, & \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ -\gamma_{31}u_1 + \gamma_{13}u_3 = \varphi_{31}, & \partial_{31}u_1 + \partial_{13}u_3 = -\psi_{13} & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array} \qquad (13)$$

Наша цель - выяснить необходимые и достаточные условия на заданные функции $f_k,\ \varphi_k,\ k=\overline{1,3}$, а также φ_{jk} и ψ_{jk}, при которых задача (12), (13) имеет слабое решение в пространстве

$$H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) \oplus H^1(\Omega_3). \tag{14}$$

В силу линейности задачи ее решение может быть представлено в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородности в уравнениях либо в краевых условиях лишь в одном месте (т. е. либо в уравнении, либо в краевом условии).

2.2. **Вспомогательные задачи Зарембы.** Пусть $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})$ - решение задачи

$$\begin{aligned} u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \quad (\Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \quad (\Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \quad (\Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 \quad (\Gamma_{33}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{21} u_{11} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31} u_{11} = 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \\ \partial_{12} u_{12} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{32} u_{12} = 0 \quad (\Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \\ \partial_{13} u_{13} = 0 \quad (\Gamma_{13} = \Gamma_{31}), \quad \partial_{23} u_{13} = 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

Теорема 5. *Каждая из задач Зарембы имеет слабое решение из подпространства квазигармонических функций $H_h^1(\Omega_k) \subset H^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$, тогда и только тогда, когда $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk})$, $k = \overline{1,3}$. При этом*

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \varphi_k, \ \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathfrak{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), H_h^1(\Omega_k)), \ k = \overline{1,3}. \tag{15}$$

2.3. **Вспомогательная задача Стеклова.** Она формулируется для набора функций $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})$ в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{21} = 0 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{22} = 0 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{33}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, \quad \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}) \\ \gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, \quad \partial_{32} u_{22} + \partial_{23} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}) \\ -\gamma_{31} u_{21} + \gamma_{13} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13} u_{13} + \gamma_{31} u_{11}, \quad \partial_{31} u_{21} + \partial_{13} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

Теорема 6. *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы* (12) *имеет слабое решение $u_{(2)} \in H_h^1(\Omega) := H_h^1(\Omega_1) \oplus H_h^1(\Omega_2) \oplus H_h^1(\Omega_3)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \ \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}), \ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \tag{16}$$

2.4. **Первая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})$ задача формулируется следующим образом:

$$\begin{array}{llll} u_{31} - \triangle u_{31} = f_1 & (\Omega_1) & \gamma_{11} u_{31} = 0 & (\Gamma_{11}) \\ u_{32} - \triangle u_{32} = f_2 & (\Omega_2) & \gamma_{22} u_{32} = 0 & (\Gamma_{22}) \\ u_{33} - \triangle u_{33} = f_3 & (\Omega_3) & \gamma_{33} u_{33} = 0 & (\Gamma_{33}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \quad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0, \quad \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = 0 \ (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31} u_{31} - \gamma_{13} u_{33} = 0, \quad \partial_{31} u_{31} + \partial_{13} u_{33} = 0 \ (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Введем в рассмотрение подпространство

$$V_\Gamma^1(\Omega) := \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) : \ \gamma_{jj} u_j = 0 \ (\Gamma_{jj}), \ j = \overline{1,3}; \\ \gamma_{jk} u_k - \gamma_{kj} u_j = 0 \ (\Gamma_{jk}), \quad j,k = \overline{1,3}\} \subset H^1(\Omega)$$

Теорема 7. *Первая вспомогательная задача С. Крейна имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in V_\Gamma^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (V_\Gamma^1(\Omega))^*, \ \ V_\Gamma^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (V_\Gamma^1(\Omega))^*. \tag{17}$$

В частности, если

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (V_\Gamma^1(\Omega))^*, \tag{18}$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

2.5. **Вторая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций $u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})$ задача формулируется так:

$$\begin{array}{llll} u_{41} - \triangle u_{41} = 0 & (\Omega_1), & \gamma_{11} u_{41} = 0 & (\Gamma_{11}), \\ u_{42} - \triangle u_{42} = 0 & (\Omega_2), & \gamma_{22} u_{42} = 0 & (\Gamma_{22}), \\ u_{43} - \triangle u_{43} = 0 & (\Omega_3), & \gamma_{33} u_{43} = 0 & (\Gamma_{33}), \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31} u_{41} - \gamma_{13} u_{43} = 0, & \partial_{31} u_{41} + \partial_{13} u_{43} = -\psi_{31} & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Теорема 8. *Вторая вспомогательная задача С. Крейна имеет слабое решение $u_{(4)} \in V_\Gamma^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{12} \in H^{-1/2}(\Gamma_{12}), \ \psi_{23} \in H^{-1/2}(\Gamma_{23}), \ \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \tag{19}$$

Итогом рассмотрения смешанной краевой задачи сопряжения (12), (13) является следующее утверждение.

Теорема 9. *Эта задача имеет единственное слабое решение из пространства* $H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (15)-(17), (19). *Решение задачи* (12), (13) *является суммой решений вспомогательных задач, рассмотренных в пп.* (13)- (2.5).

3. О спектральных задачах сопряжения

Методы, рассмотренные в параграфе (2), позволяют исследовать не только краевые, но и спектральные задачи сопряжения для одной, двух, трех и более примыкающих друг к другу областей.

3.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим для простоты случай лишь одной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$.

Требуется найти решения следующей однородной смешанной задачи:

$$\begin{array}{ll} u - \triangle u = \lambda u & (\Omega), \\ \gamma_1 u = 0 & (\Gamma_1), \\ \partial_2 u = \lambda\gamma_2 u & (\Gamma_2), \\ \partial_3 u = \mu\gamma_3 u & (\Gamma_3), \\ \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u & (\Gamma_4). \end{array} \tag{20}$$

Здесь λ и μ – комплексные параметры, один из которых можно считать спектральным, а другой – фиксированным. Решения задачи (20) будем считать принадлежащими пространству $H^1(\Omega)$.

3.2. **Переход к спектральной задаче для операторного пучка.** Представим решение задачи (20) в виде суммы решений четырех вспомогательных задач: одной – типа первой вспомогательной задачи С. Крейна, а трех других – типа второй вспомогательной задачи С. Крейна.

Теорема 10. *Задача* (20) *равносильна спектральной проблеме*

$$u = \lambda A^{-1}u + \lambda T_2\gamma_2 u + \mu T_3\gamma_3 u + \lambda^{-1}T_4\gamma_4 u,\ u \in H^1(\Omega), \tag{21}$$

где A – оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega),\ L_2(\Omega))$, а T_j, $j = \overline{2,4}$ – операторы вторых вспомогательных задач С. Крейна.

Теорема 11. *Задача* (21) *равносильна спектральной задаче для операторного пучка*

$$L(\lambda,\mu) := I - \lambda(A^{-1} + B_2) - \mu B_3 - \lambda^{-1}B_4, \tag{22}$$

действующего в пространстве $L_2(\Omega)$, при этом

$$B_j := (A^{1/2}T_j)(\gamma_j A^{-1/2}) = B_j^* \geqslant 0,\ \ B_j \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ j = \overline{2,4} \tag{23}$$

В частности, если $\mu \leqslant 0$, то приходим к известному пучку С. Крейна; если $\mu > 0$, то возникает индефинитная метрика в спектральной проблеме об устойчивости конвективных движений жидкости; при $Im\mu \neq 0$ получаем слабые возмущения пучка С. Крейна; при $B_4 = 0$ – задачу сопряжения в теории дифракции.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи.* – Симферополь: КНЦ ТНУ, – 2011.

[2] Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций.* – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.Ф. – 2011 – С. 136.

[3] Агранович М.С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук.* – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С.3-78.

[4] Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* – М.:МЦНМО, – 2013 – С. 379.

Абстрактні змішані крайові та спектральні задачі спряження

У статті на базі абстрактної формули Гріна для трійки гільбертових просторів і узагальненої формули Гріна для оператора Лапласа розглянуто новий клас змішаних крайових, спектральних задач і задач спряження.

Ключові слова: формула Гріна, ліпшіцева межа, гильбертовий простір, слабкий розв'язок, допоміжні задачі.

Abstract mixed boundary and spectral transmission problems

On the basis of the abstract Green's formula for the triple of Hilbert spaces and the generalized Green's formula for the Laplace operator we consider a new class of mixed boundary value and spectral transmission problems.

Keywords: Green's formula, Lipschitz boundary, Hilbert space, weak solution, supporting tasks.