Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 45–57.

УДК 517.9[72.5+27.25+84.52]

Э. Л. Газиев

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ

Изучается спектральная задача, возникающая в проблеме малых движений системы "идеальная капиллярная жидкость–газ" в прямоугольном канале с твердой стенкой. Рассматривается случай экспоненциальной стратификации газа вдоль направления гравитационных сил и условий сопряжения для потенциалов смещений, сформулированных на поверхности жидкости, которая в состоянии покоя не является горизонтальной. Предлагается проекционный метод, основанный на вариационном подходе.

Ключевые слова: капиллярная жидкость, газ, стратификация, спектральная задача, условие сопряжения, проекционный метод, обобщенное решение.

1. Введение

Эволюционные и спектральные задачи гидродинамики описываются начально-краевыми и краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, для большинства которых не удается получить точное аналитическое решение. Поэтому особый интерес представляют прямые методы нахождения искомых величин. Среди них отметим проекционные, вариационные и численно-аналитические методы, см., например, работы [1]–[12], в которых при разработке и обосновании метода используются вариационная формулировка исследуемой задачи, энергетические или вариационные соотношения. В общем случае выбор координатных (пробных) функций проекционного метода является достаточно сложной проблемой и осуществляется по-разному. В частности, в [2] в задаче о собственных колебаниях идеальной жидкости выбор координатных функций основан на применении ортогонального проектирования собственных элементов задачи на функциональные подпространства, естественно возникающие при использовании метода разделения переменных.

В настоящей работе рассматривается спектральная задача, порожденная проблемой собственных колебаний в прямоугольном канале гидросистемы, состоящей из несжимаемой капиллярной жидкости и газа, стратифицированного по плотности. Эволюционная проблема описывается краевой задачей для потенциалов смещений в средах с кинематическим и динамическим условиями сопряжения третьего рода на границе раздела сред. Операторный подход в общем случае, когда граница раздела сред в состоянии покоя не обязательно является является плоской, предложен в работе [10]. В случае горизонтальной равновесной поверхности жидкости спектральная проблема была изучена в [13], а приближенный метод для вычисления криволинейной равновесной поверхности раздела сред был предложен в [14]–[16].

Наша цель — предложить проекционный метод для приближенного вычисления значений спектрального параметра в плоской (двумерной) проблеме с условиями сопряжения на криволинейной границе раздела сред.

2. Формулировка двумерной спектральной задачи и основные предположения

В декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим прямоугольный канал, геометрия поперечного сечения канала (плоскостью $y = \mathrm{const}$) представлена на рис. 1. Канал заполнен идеальной капиллярной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ и баротропным газом, плотность которого изменяется по закону

$$\rho_{2,0} := \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0)\exp(-2\varepsilon z), \ \ \varepsilon := \beta g_0/(2a^2) \ll 1,$$

где $a^2 = \mathrm{const}$ — квадрат скорости звука в газе, g_0 — стандартное ускорение свободного падения в земных условиях, β — коэффициент перегрузки.

Пусть гравитационное поле действует вдоль оси Oz сверху вниз с интенсивностью $\vec{g} = -\beta g_0 \vec{e}_3$, $\beta > 0$ ($\vec{e}_3$ — орт оси Oz). В этом случае трехмерная проблема сводится к двумерной (плоской) проблеме в поперечном сечении канала. Область Ω_1, занятая жидкостью, ограничена частью S_1 твердой стенки канала и границей Γ, разделяющей области "жидкость" и "газ", в состоянии покоя. Соответственно газ расположен в области Ω_2, ограниченной Γ и частью S_2 стенки $S = S_1 \cup S_2$. Считаем также, что уравнение дуги Γ задано в параметрической форме

$$\begin{aligned} &x = x(s), \quad z = z(s), \quad -s_0 \le s \le s_0, \\ &x(s_0) = l, \quad x(-s_0) = -l, \\ &-h_1 < z(s) < h_2, \quad -s_0 \le s \le s_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где в качестве параметра s выбрана длина дуги Γ, отсчитываемая от ее середины, l — полуширина канала, H — высота канала, V_0 — заданный объем жидкости, $h_1 = V_0/(2l)$ — условная высота жидкости, $h_2 = (H - h_1)$ — условная высота газа.

Пусть ω — частота колебаний, $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ; $\vec{n}$ — вектор нормали к Γ, направленный из Ω_1; $\vec{n}_0$ — вектор касательной к Γ

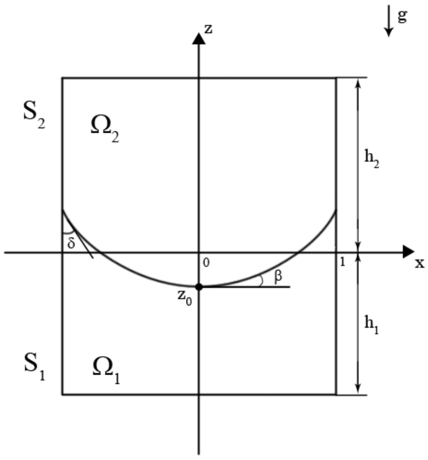

Рис. 1. Поперечное сечение канала.

в точках $s = \pm s_0$ (т.е. $x = \pm 1$); $\zeta = \zeta(s)$ — отклонение в точке s дуги Γ вдоль $\vec{n}$ от равновесного состояния; $k(s)$ — кривизна дуги Γ, $0 < \delta < \pi$ — угол смачивания.

Следуя [10], введем ортопроектор $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$, $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus 1_\Gamma$, по закону

$$P_\Gamma \zeta := \zeta - \frac{1}{2s_0} \int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds. \tag{2}$$

Тогда для потенциалов смещений $\Phi_1 := \Phi_1(x,z)$ в жидкости и $\Phi_2 := \Phi_2(x,z)$ в газе получаем следующую линеаризованную спектральную задачу

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \ \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \tag{3}$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda a^{-2} \Phi_2 \ (\text{в } \Omega_2), \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2), \ \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2), \ \lambda := \omega^2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \ \ (\text{на}\, \Gamma), \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \ \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0,$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma(-\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a(s)\zeta) = \lambda(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \ \ (\text{на } \ \Gamma),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_0} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{при } \ s = \pm s_0), \tag{5}$$

$$a(s) := -\sigma (k(s))^2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \ \ \chi := -k(s) \cos\delta / \sin\delta. \tag{6}$$

Отметим, что в спектральной задаче сопряжения (3)–(6) искомый спектральный параметр λ входит в уравнение (4) и граничное условие (5). Кроме того, оператор Δ_Γ в динамическом условии (5) и соответствующий ему оператор градиента ∇_Γ вычисляются на криволинейной дуге Γ.

Добавим еще, что в [14]–[16] для отыскания Γ получена краевая задача

$$z'' = x'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \;\; 0 \le s \le s_0, \tag{7}$$

$$x'' = -z'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \;\; 0 \le s \le s_0,$$

$$z(0) = -z_0, \quad z'(0) = 0, \;\; x(0) = 0, \;\; x'(0) = 1,$$

$$x(s_0) = l, \quad 2\int\limits_0^{s_0} (z(s) + h_1)x' ds = V_0 = 2h_1 l, \tag{8}$$

где z_0 — максимальный прогиб равновесной дуги Γ в точке $s = 0$, $f_\varepsilon(z) := \rho_{2,0}(0)(\exp(-2\varepsilon z) - 1)/(2\varepsilon)$. О смысле параметров B_0 и b_0 будет сказано ниже.

Далее считаем, что проблема (7)–(8) решена, и равновесная дуга Γ найдена.

Замечание 3. Для вычисления производной по нормали на известной Γ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n} = x' \frac{\partial}{\partial z} - z' \frac{\partial}{\partial x}. \tag{9}$$

□

Выберем l и ρ_1 в качестве характерных величин и осуществим в задаче (3)–(6) переход к безразмерным переменным с помощью замен

$$x \mapsto x\, l, \quad \rho_{2,0}(0) \mapsto \rho_{2,0}(0)\, \rho_1, \quad \varepsilon \mapsto \varepsilon l.$$

Тогда проблема (3)–(6) преобразуется к спектральным задачам Неймана

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \;\; (\text{на } S_1), \tag{10}$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda \alpha^2 \Phi_2 \;\; (\text{в } \Omega_2), \;\; \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \;\; (\text{на } S_2),$$

с условиями сопряжения искомых функций Φ_1 и Φ_2 на криволинейной (в общем случае) дуге Γ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta, \quad -s_0 < s < s_0,$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma[-\Delta_\Gamma \zeta + a(s)\zeta] = \lambda[\Phi_1 - \rho_{2,0}(0) P_\Gamma(\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2)], \;\; -s_0 < s < s_0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_0} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{при } \; s = \pm s_0),$$

и условиями нормировки

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \; \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \; \int\limits_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z)\Phi_2 d\Omega_2 = 0. \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda := \frac{\rho_1 \omega^2 l^3}{\sigma}, \ \ \alpha^2 := \frac{\sigma}{\rho_1 l a^2},$$

$$a(s) := -(k(s))^2 + (B_0 - b_0 \exp(-2\varepsilon z)) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \varepsilon = \beta\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 := g_0 l/(2a^2),$$

$$B_0 := \frac{\rho_1 g l^2}{\sigma} = \beta \widehat{B}_0, \ \ \widehat{B}_0 := \frac{\rho_1 g_0 l^2}{\sigma}, \quad b_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g l^2}{\sigma} = \beta \widehat{b}_0, \ \ \widehat{b}_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g_0 l^2}{\sigma}.$$

С учетом [1], см. с. 527 для оператора Лапласа–Бельтрами Δ_Γ на криволинейной границе Γ, заданной в виде (1), получаем

$$\Delta_\Gamma \zeta = d^2\zeta/ds^2.$$

3. Определение обобщенного решения

Определение 1. Будем говорить, что задача (10)–(11) имеет единственное обобщенное решение $\Phi := (\Phi_1; \Phi_2; \zeta)$, $\Phi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, если при любых функциях $\Psi := (\Psi_1; \Psi_2; \psi)$, $\Psi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\psi \in L_{2,\Gamma}$, выполнены следующие интегральные тождества:

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1 \, d\Omega_1 = \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big(\Psi_1\Big)\Big|_\Gamma \zeta ds, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big(\rho_{2,0}\Psi_2\Big)\Big|_\Gamma \zeta ds = \lambda\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Psi_2 \Phi_2 \, d\Omega_2, \tag{13}$$

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} [\psi'\zeta' + a(s)\psi\zeta] ds + \chi(s)\psi(s)\zeta(s)\Big|_{s=-s_0}^{s=s_0} = \int\limits_{-s_0}^{s_0} \psi\Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma ds. \tag{14}$$

□

Рассмотрим случай, когда оператор B_σ потенциальной энергии гидросистемы является положительно определенным. Если выполнено условие

$$\zeta = \lambda B_\sigma^{-1} \Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma,$$

т.е. соотношение (14) удовлетворяется точно, то из (12), (13) для обобщенного решения получаем интегральные тождества, в которых не присутствует функция ζ:

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1 \, d\Omega_1 = \lambda \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[\Psi_1 \Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_2 + \lambda \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[\rho_{2,0}\Psi_2 \Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds =$$

$$= \lambda\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2 \, d\Omega_2, \quad \forall\Psi_1 \in H^1(\Omega_1), \ \forall\Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (16)$$

Отметим также, что тождества (15), (16) равносильны соотношению

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1 \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_2 = \lambda\Big\{\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2 \, d\Omega_2 +$$
$$+ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Psi_1 - \rho_{2,0}\Psi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds\Big\}. \quad (17)$$

Определение 1 обобщает определение обобщенного решения, предложенное М.Я. Барняком для изучения проблемы колебаний идеальной жидкости в сосуде (см. [2], а также [5]–[7], [9]) на случай, когда контейнер заполнен гидросистемой "жидкость–баротропный газ".

4. Вариационный подход

Рассмотрим задачу на экстремум квадратичного функционала

$$\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2, \quad \Phi_1 \in H^1(\Omega_1), \ \ \Phi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) \quad (18)$$

при условии

$$\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - \rho_{2,0}\Phi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds = \mathrm{const} \quad (19)$$

и соответствующую ей задачу на безусловный экстремум

$$F(\Phi_1, \Phi_2) := \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2 - \lambda\Big\{\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2 d\Omega_2 +$$
$$+ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - \rho_{2,0}\Phi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds\Big\}. \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что соотношение (17) суть равенство нулю первой вариации функционала (20). Проблема (18), (19), в свою очередь, является задачей о минимуме квадратичного функционала

$$\frac{\displaystyle\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2 \, d\Omega_2}{\displaystyle\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2 \, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\,(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)))ds\Big]}$$

на функциях $(\Phi_1; \Phi_2) \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, отвечающих условиям нормировки

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1\, ds = 0, \quad \int\limits_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z)\Phi_2\, d\Omega_2 = 0,$$

который достигается на собственных значениях задачи (10)–(11). Таким образом, можно отыскивать обобщенное решение исходной задачи, решая задачу о минимуме функционала (20). Заметим, что при $B_\sigma \gg 0$ спектр задачи является дискретным, расположен на положительной полуоси и имеет предельную точку на $+\infty$ (см. [10]).

5. Проекционный метод нахождения обобщенного решения

Будем искать обобщенное решение, на котором достигается минимальное значение функционала (20). Представим приближенное решение задачи (10)–(11) в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} c_k \Phi_k, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} \Phi_{1k} \\ \Phi_{2k} \end{pmatrix}, \quad \zeta := \sum_{k=1}^{N} c_k \zeta_k, \tag{21}$$

где c_k — неизвестные коэффициенты, Φ_k — пробные функции, а функции ζ_k на Γ определены с учетом (9) (см. замечание 3):

$$\zeta_k := \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial n} = x' \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial z} - z' \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial x}. \tag{22}$$

Поскольку первая вариация функционала (20) на λ и $c := (c_1, \ldots, c_N)$, на которых достигается минимум функционала, должна быть равна нулю, то для нахождения коэффициентов c_k и спектрального параметра λ получаем систему уравнений

$$l = \overline{1, N}, \quad 0 = \sum_{k=1}^{N} c_k \Big(\int\limits_{\Omega_1} \nabla\Phi_{1k} \cdot \nabla\Phi_{1l}\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{2k} \cdot \nabla\Phi_{2l}\, d\Omega_2 \Big) -$$

$$- \lambda \sum_{k=1}^{N} c_k \Big(\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \Phi_{2l}\, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} (\Phi_{1l} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2l})) B_\sigma^{-1} (\Phi_{1k} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2k})) ds \Big). \tag{23}$$

Для существования нетривиального решения однородной системы уравнений (23) необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Отсюда и следует характеристическое уравнение для вычисления λ:

$$\det \widehat{A} = 0, \tag{24}$$

$$\widehat{A} = \{\widehat{A}_{lk}\}_{l,k=1}^{N}, \quad \widehat{A}_{lk} := \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Phi_{1k} \cdot \nabla\Phi_{1l}\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{2k} \cdot \nabla\Phi_{2l}\, d\Omega_2 -$$

$$- \lambda \Big(\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \Phi_{2l}\, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} (\Phi_{1l} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2l})) B_\sigma^{-1} (\Phi_{1k} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2k})) ds \Big). \tag{25}$$

В соотношениях (25) с учетом (2) $P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2j})$ вычисляются по формуле

$$P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2j}) = \rho_{2,0}\Phi_{2j} - \frac{1}{2s_0}\int\limits_{-s_0}^{s_0} \rho_{2,0}\Phi_{2j}\,ds, \quad j = \overline{1,N}.$$

6. Выбор координатных функций

Рассмотрим теперь проблему нахождения системы координатных функций. Учтем, что искомое решение в общем случае (при необязательно горизонтальной Γ) должно удовлетворять аналогичной задаче и в частном случае, при горизонтальной границе Γ. Потому естественно выбрать в качестве координатных функций $\Phi_{1k} = \Phi_{1k}(x,z)$, $\Phi_{2k} = \Phi_{2k}(x,z)$, $k = 1,2,\ldots$, решения задачи, полученные при условии горизонтальности Γ (т.е. при угле смачивания $\delta = \pi/2$), а именно:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\Phi_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_{1k}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_1 = (-1,1)\times(-h_1,0), \\ \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial z}\Big|_{z=-h_1,\,x\in(-1,1)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial x}\Big|_{x=\pm1,\,z\in(-h_1,0)} = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} -\Big(\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial x^2} - 2\varepsilon\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial z^2}\Big) = \alpha^2\lambda\Phi_{2k} \quad \text{в } \Omega_2 = (-1,1)\times(0,h_2), \\ \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z}\Big|_{z=h_2,\,x\in(-1,1)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial x}\Big|_{x=\pm1,\,z\in(0,h_2)} = 0, \end{gathered} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial z} =: \zeta_k \quad \text{при } (z=0)\times(-1<x<1), \quad \zeta_k = \zeta_k(x),$$

$$B_\sigma\zeta_k = \lambda(\Phi_{1k} - \rho_{2,0}(0)\Phi_{2k}), \quad (z=0)\times(-1<x<1), \quad (\zeta_k)'\Big|_{x=\pm1} = 0, \tag{28}$$

где

$$B_\sigma\zeta_k := -(\zeta_k)'' + (B_0 - b_0)\zeta_k.$$

Для решения задачи (26)–(28) обобщим на рассматриваемый случай методику исследования, предложенную в [13]. Будем искать решение задачи (26) в виде $\Phi_{1k} = v_{1k}(z)u_k(x)$. Нетрудно видеть, что $u_k = u_k(x)$ являются решениями вспомогательных спектральных задач

$$u_k'' + \mu_k^2 u_k = 0 \ \text{ при } \ -1<x<1, \quad u_k'(1) = u_k'(-1) = 0,$$

откуда следует, что

$$\mu_k = \left\{ \begin{array}{c} \pi(k-1/2) \\ \pi k \end{array} \right. , \quad u_k = \left\{ \begin{array}{c} \sin(\pi(k-1/2)x) \\ \cos(\pi k x) \end{array} \right. , \quad k = 1,2,\ldots .$$

С учетом уравнения и первого граничного условия задачи (26) получаем, что

$$v_{1k} = b_{1k}\mathrm{ch}(\mu_k(z+h_1)) \implies \Phi_{1k} = b_{1k}\mathrm{ch}(\mu_k(z+h_1))u_k(x),$$

$$\zeta_k = b_{1k}\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k(z+h_1))u_k(x),$$

и собственные значения оператора B_σ вычисляются по формуле

$$\lambda_k(B_\sigma) = \mu_k^2 + (B_0 - b_0) > 0.$$

Решение задачи (27)–(28) будем искать в виде $\Phi_{2k} = v_{2k}(z)u_k(x)$. С использованием метода разделения переменных для функций $v_{2k}(z)$ имеем уравнение

$$v_{2k}'' - 2\varepsilon v_{2k}' + (\alpha^2\lambda_k - \mu_k^2)v_{2k} = 0. \tag{29}$$

Для краткости введем обозначение

$$D_k := (\alpha^2\lambda_k - \mu_k^2) - \varepsilon^2. \tag{30}$$

Тогда общее решение уравнения (29) при $D_k > 0$ имеет вид

$$v_{2k} = \exp(\varepsilon z)[b_{2k}\cos(\gamma_k z) + b_{3k}\sin(\gamma_k z)], \quad \gamma_k^2 := D_k, \tag{31}$$

а при $D_k < 0$

$$v_{2k} = \exp(\varepsilon z)[b_{2k}\exp(\xi_k z) + b_{3k}\exp(-\xi_k z)], \quad \xi_k^2 := -D_k.$$

С учетом граничных условий при $D_k > 0$ для коэффициентов b_{1k}, b_{2k} и b_{3k} получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
b_{2k}\{\varepsilon\cos(\gamma_k h_2) - \gamma_k\sin(\gamma_k h_2)\} + b_{3k}\{\varepsilon\sin(\gamma_k h_2) + \gamma_k\cos(\gamma_k h_2)\} = 0,\\
b_{1k}\mu_k \mathrm{sh}(\mu_k h_1) - b_{2k}(\varepsilon^2 + \gamma_k^2)\sin(\gamma_k h_2) = 0,\\
b_{1k}\{\lambda_k(B_\sigma)\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1) - \lambda\rho_1\mathrm{ch}(\mu_k h_1)\} + b_{2k}\lambda\rho_{2,0}(0)\{\varepsilon\sin(\gamma_k h_2) + \gamma_k\cos(\gamma_k h_2)\} = 0,
\end{gathered} \tag{32}$$

откуда с учетом нетривиальности искомого решения приходим к характеристическому уравнению для определения γ_k:

$$\varepsilon + \gamma_k\,\mathrm{ctg}(\gamma_k h_2) = \left(-\frac{\alpha^2\lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2 + \varepsilon^2 + \gamma_k^2)} + \frac{\rho_1\,\mathrm{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k\rho_{2,0}(0)}\right)(\varepsilon^2 + \gamma_k^2). \tag{33}$$

Графическое решение уравнения (33) показывает, что при фиксированном $k = 1, 2, \ldots$ оно имеет счетное множество решений γ_{kp}, $p = 1, 2, \ldots$. Значение $p = 1$ соответствует первому корню уравнения (33). Отметим, что отыскание γ_{kp} с учетом (30), (31) позволяет легко найти значение искомого спектрального параметра:

$$\lambda_{kp} = \alpha^{-2}(\varepsilon^2 + \mu_k^2 + \gamma_{kp}^2).$$

Далее, из соотношений (32) при $D_k > 0$ вычисляем коэффициенты b_{2kp} и b_{3kp}:

$$b_{2kp} = b_{1k}\frac{(\varepsilon\sin(\gamma_{kp}h_2) + \gamma_{kp}\cos(\gamma_{kp}h_2))\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{(\varepsilon^2 + \gamma_{kp}^2)\sin(\gamma_{kp}h_2)},$$

$$b_{3kp} = -b_{1k}\frac{(\varepsilon\cos(\gamma_{kp}h_2) - \gamma_{kp}\sin(\gamma_{kp}h_2))\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{(\varepsilon^2 + \gamma_{kp}^2)\sin(\gamma_{kp}h_2)}.$$

Следовательно, координатные функции Φ_{2kp} можно выбрать в виде

$$\Phi_{2kp}=b_{1k}\frac{\mu_k\operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{\sin(\gamma_{kp}h_2)(\varepsilon^2+\gamma_{kp}^2)}\Big\{(\varepsilon\sin(\gamma_{kp}h_2)+\gamma_{kp}\cos(\gamma_{kp}h_2))\cos(\gamma_{kp}z)-$$
$$-(\varepsilon\cos(\gamma_{kp}h_2)-\gamma_{kp}\sin(\gamma_{kp}h_2))\sin(\gamma_{kp}z)\Big\}\exp(\varepsilon z)u_k(x).$$

Аналогичные выкладки при $D_k<0$ приводят к соотношениям

$$b_{2k}(\varepsilon+\xi_k)\exp(\xi_k h_2)+b_{3k}(\varepsilon-\xi_k)\exp(-\xi_k h_2)=0,$$
$$b_{1k}\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1)-b_{2k}(\varepsilon+\xi_k)-b_{3k}(\varepsilon-\xi_k)=0,$$
$$b_{1k}\{\lambda_k(B_\sigma)\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1)-\lambda_k\rho_1\mathrm{ch}(\mu_k h_1)\}+b_{2k}\lambda\rho_{2,0}(0)+b_{3k}\lambda\rho_{2,0}(0)=0,$$

из которых следует характеристическое уравнение для определения ξ_k:

$$\varepsilon+\xi_k\operatorname{cth}(\xi_k h_2)=\left(-\frac{\alpha^2\lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2+\varepsilon^2-\xi_k^2)}+\frac{\rho_1\operatorname{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k\rho_{2,0}(0)}\right)(\varepsilon^2-\xi_k^2). \tag{34}$$

Анализ уравнения (34) показывает, что при фиксированном $k=1,2,\ldots$ оно имеет единственный корень $\xi_{k0}\in(0,\sqrt{\varepsilon^2+\mu_k^2})$ (см. знаменатель первого слагаемого в правой части). Соответствующие коэффициенты и пробные функции имеют вид

$$b_{2k0}=-b_{1k}\frac{\exp(-\xi_{k0}h_2)\mu_k\operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2(\varepsilon+\xi_{k0})\operatorname{sh}(\xi_{k0}h_2)},\qquad b_{3k0}=-b_{1k}\frac{\exp(\xi_{k0}h_2)\mu_k\operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2(\xi_{k0}-\varepsilon)\operatorname{sh}(\xi_{k0}h_2)},$$

$$\Phi_{2k0}=-b_{1k}\frac{\mu_k\operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2\operatorname{sh}(\xi_{k0}h_2)}\Big\{\frac{\exp(\xi_{k0}(z-h_2))}{(\varepsilon+\xi_{k0})}+\frac{\exp(-\xi_{k0}(z-h_2))}{(\xi_{k0}-\varepsilon)h_2)}\Big\}\exp(\varepsilon z)u_k(x).$$

Отметим, наконец, что при $D_k=0$ нетривиальное решение Φ_2 отсутствует.

Теперь с учетом полученных результатов, а именно, наличия при каждом фиксированном $k=1,2,\ldots$ единственного решения Φ_{2k0} (поверхностная волна) и счетного множества решений Φ_{2kp}, $p=1,2,\ldots$, (акустические волны), уточним представление приближенного решения и вид характеристического уравнения (24), (25) для нахождения значений спектрального параметра $\lambda=\lambda_{kp}$.

Зафиксируем значения $N\geq 1$, $M\geq 0$ и перенумеруем наборы координатных функций $\{\Phi_{kp}:=(\Phi_{1k};\Phi_{2kp})\}$, $k=1,2\ldots,N$, $p=0,1,\ldots,M$, следующим способом:

$$\Phi_1:=(\Phi_{11};\Phi_{210}),\ \Phi_1:=(\Phi_{11};\Phi_{211}),\ \ \Phi_{M+1}:=(\Phi_{11};\Phi_{21M}),$$
$$\Phi_{M+2}:=(\Phi_{12};\Phi_{220}),\ \Phi_{M+3}:=(\Phi_{12};\Phi_{221}),\ldots,\ \Phi_{2M+2}:=(\Phi_{12};\Phi_{22M}),\ \ \ldots,$$
$$\Phi_{(N-1)(M+1)+1}:=(\Phi_{1N};\Phi_{2N0}),\ \ldots,\ \Phi_{N(M+1)}:=(\Phi_{1N};\Phi_{2NM}), \tag{35}$$

т.е. двумерному индексу kp поставим во взаимнооднозначное соответствие одномерный индекс $t=(M+1)(k-1)+p+1$. Тогда, с учетом условии нормировки (4), конечномерная аппроксимация (21) обобщенного решения переписывается в виде

$$\Phi=\sum_{t=1}^{N(M+1)}c_t f_t,\ \Phi_t=\begin{pmatrix} f_{1t}\\ f_{2t}\end{pmatrix}:=a_t\begin{pmatrix}\Phi_{1k}-d_k^{(1)}\\ \Phi_{2kp}-d_{kp}^{(2)}\rho_{2,0}^{-1}\end{pmatrix},\ d_{kp}^{(2)}=\frac{1}{|\Omega_2|}\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{2kp}\,d\Omega_2,$$

$$d_k^{(1)} = \frac{1}{2s_0}\int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_{1k} ds, \quad k = k(t) = t \div (M+1) + 1, \quad p = p(t) = t - (k-1)(M+1) - 1.$$

где a_t — дополнительные нормировочные коэффициенты пропорциональности, необходимость введения которых вызывается тем обстоятельством, что числа $\widehat{A}_{lk}$ выражаются через множители $\mu_k = \pi(k-1/2)$, $\exp(\pm\mu_k(z+h_1)$, $k = \overline{1, N(M+1)}$, что может вызвать неустойчивость вычислительного процесса.

Теперь соотношения (25) переписываются в виде

$$\widehat{\mathcal{A}}_{t\nu} := \Big(\int\limits_{\Omega_1} \nabla f_{1t} \cdot \nabla f_{1\nu}\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla f_{2t} \cdot \nabla f_{2\nu}\, d\Omega_2 -$$
$$- \lambda\Big(\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} f_{2t} f_{2\nu}\, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} (f_{1t} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2t})) B_\sigma^{-1} (f_{1\nu} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2\nu})) ds \Big)\Big). \quad (36)$$

Таким образом, исходная спектральная задача сведена к задаче (24)–(25) на собственные значения λ в конечномерном пространстве размерности $N^2(M+1)^2$.

Дополнительные нормировочные коэффициенты a_t определяются так, чтобы на решениях задачи с горизонтальной границей Γ выполнялось соотношение $\alpha_{tt} \equiv 1$. Наконец, отметим, что слагаемые вида

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} (f_{1t} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2t})) B_\sigma^{-1} (f_{1\nu} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2\nu})) ds$$

можно вычислить способом, предложенным в [1, с. 317-319].

7. Выводы

В данной работе разработан проекционный метод решения двумерной спектральной задачи с граничными условиями Неймана и условиями сопряжения на негоризонтальной границе, возникающей в проблеме малых колебаний гидросистемы "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ" в прямоугольном канале. Этот метод основан на вариационном подходе и может быть использован для решения спектральной задачи сопряжения, порожденной аналогичной эволюционной проблемой в осесимметричном сосуде.

Автор выражает благодарность Н.Д. Копачевскому за постановку проблемы и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / [В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, А. Д. Мышкис, Н. Д. Копачевский, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов]; под ред. А. Д. Мышкиса. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.

[2] Барняк М. Я. Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде / М. Я. Барняк // Математическая физика в нелинейной механике. — 1988. — Т. 10(44). — С. 37–43.

[3] Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[4] Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил / Н. Д. Копачевский // ЖВМиМФ. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 128-146.

[5] Луковский И. А. Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей / И. А. Луковский, А. Н. Тимоха // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 7–10.

[6] Луковский И. А. Модифікація варіаційного методу розв'язку задач про власні коливання рідини в похилому циліндрі / И. А. Луковский, М. Я. Барняк // Доповіді НАН України. — 1997. — № 5. — С. 62—66.

[7] Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко. — К.: Наукова думка, 1984. — 229 с.

[8] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

[9] Barnyak M. Ya. Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form / M. Ya. Barnyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 57, No 12. — pp. 1853-1869.

[10] Gaziev E. L. Small motions and eigenoscillations of a "fluid-barothropic gas" hydrosystem / E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 192, № 4, July, 2013. — pp. 389-416.

[11] Gavrilyuk I. P. Evolutional problems of the contained fluid / I. P. Gavrilyuk, I. A. Lukovsky, V. L. Makarov, A. N. Timokha. — К.: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 58. — 233 с.

[12] Low-Gravity Fluid Mechanics / [A. D. Myshkis, V. G. Babckii, N. D. Kopachevsky, L. A. Slobozhanin, A. D. Tyuptsov.] — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio, 1987. — 583 p.

[13] Газиев Э. Л. Собственные колебания гидросистемы "жидкость–газ" в цилиндрической области / Э. Л. Газиев // Динамические системы. — 2012. — Т. 2(30), № 1–2. — С. 3–22.

[14] Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Труды ИПММ. — 2010. — Т. 20. — С. 39–47.

[15] Газиев Э. Л. О вычислительных схемах определения равновесной поверхности жидкости в гидросистеме "жидкость-газ" для сосудов различных форм / Э. Л. Газиев //

Матер. XLII научн. конф. "Дни науки ТНУ им. В.И. Вернадского". — Симферополь: ДИАЙПИ, 2013. — С. 289-291.

[16] Gaziev E. On the Modelling of Static Equilibrium of the System "Ideal Fluid–Barothropic Gas"/ E. Gaziev // International Conference "Analysis and Mathematical Physics". Book of Abstracts. — Kharkiv: Institute for Low Temperature Physics of NASU, 2013. — C. 34-35.

Спектральна задача з умовами спряження на криволінійній межі

Вивчається спектральна проблема, яка виникає в проблемі власних коливань системи "ідеальна капілярна рідина–газ", що заповнює прямокутний канал з твердою стінкою. Розглядається випадок, коли газ стратифікований за густиною уздовж напрямку гравітаційних сил, а умови сполучення для потенціалів зміщень сформульовано на поверхні рідини, яка в стані спокою не є горизонтальною. Представлено проекційний метод для знаходження узагальненого розв'язку.

Ключові слова: капілярна рідина, газ, стратіфикація, спектральна задача, умова спряження, проекційний метод, узагальнений розв'язок.

Spectral problem with transmission conditions on curvilinear interface

This paper deals with a spectral problem arising in a problem of small motions of a system "ideal capillary fluid–gas" in a rectangular vessel with the solid walls. We suppose that a gas density is exponentially stratified opposite to the direction of gravitational forces and conjugation conditions for potential displacement are formulated on the fluid surface which is not horizontal at rest. A projection method for finding a generalized solution is offered.

Keywords: capillary fluid, gas, stratification, spectral problem, conjugation condition, projection method, generalized solution.