Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 21–30.

УДК 517.98+517.954 MSC2000: 28C20+35R15

Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский

ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Для функций на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H ($\dim H \leqslant \infty$) предложена версия оператора Лапласа, порождённого заданной на H (борелевской неотрицательной конечной) мерой μ. Исследованы существование и единственность решений (в т.ч. "слабых") задачи Дирихле для эллиптического уравнения в области G, согласованной с исходной мерой μ. Приведён модельный пример согласования меры μ с областью G.

Ключевые слова: гильбертово пространство, борелевская мера, дифференцирование мер, эллиптические уравнения, задача Дирихле.

E-mail: bogd__@ukr.net, jamfoteur@gmail.com

1. Предварительные сведения

Пусть H - сепарабельное вещественное гильбертово пространство ($\dim H \leqslant \infty$); μ — конечная (неотрицательная) борелевская мера на H.

Обозначим через $C_b = C_b(H)$ пространство всех ограниченных и непрерывных функций $f\colon H \to \mathbb{R}$; символом $C_b(H;H)$ обозначим пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей $H \to H$; через $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)$) обозначим пространство всех функций $f \in C_b$ (соответственно, векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)$), дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с непрерывной и ограниченной на всём H производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$).

Пусть $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ — поток векторного поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$. Пусть мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z}$ в сильном смысле (по Фомину). Это означает, что для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ существует предел $\vartheta(A) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)\right)$, откуда следует, что $\vartheta = d_{\mathbf{Z}}\mu$ является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Соответствующую плотность $\frac{d\vartheta}{d\mu}$ принято называть логарифмической производной меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры μ): $\operatorname{div}\mathbf{Z} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z} = \frac{d\vartheta}{d\mu}$.

Сильная дифференцируемость меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ равносильна существованию функции $\rho = \rho_\mu^{\mathbf{Z}} \in L_1(H,\, \mu)$, которая для всех функций $u \in C_b^1(H)$ удовлетворяет равенству:

$$\int\limits_H u \cdot \rho \, d\mu = -\int\limits_H (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z}) \, d\mu.$$

При этом $\rho = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$.

Пусть G — ограниченная область в H с границей $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на H до функций класса C_b^1; символом $C_0^1(G)$ обозначим семейство функций из $C^1(G)$, носители которых лежат в G. Аналогично определяем $C(G)$ и $C(G; H)$.

Через $L_2(G) = L_2(G, \mu)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом измеримых функций на G по отношению к мере $\mu|_G$. Аналогично через $L_2(G; H) = L_2(G; H, \mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых векторных полей на G. Норму в $L_2(G; H)$ задаём формулой: $\|\mathbf{Z}\|^2 = \int\limits_G \|\mathbf{Z}(x)\|^2$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера).

Граница S области G предполагается гладким вложеным в H подмногообразием коразмерности 1; поле единичной внешней нормали границы S предполагается продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H; H)$.

Дополнительно предполагаем также, что мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о “согласованности S с мерой μ” (см. [1]).

Пусть $\varepsilon > 0$. Символом S_ε обозначим ε-окрестность множества S. В работе [2] (формула (13)) доказано, что при согласованности S с мерой μ, имеет место равенство: $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)\, (\varepsilon \to 0)$, а потому ([1], предложение 1) $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную меру [1, 2], которую обозначим μ_S. Если u — ограниченная непрерывная функция на S и $\hat{u}$ — её продолжение до функции $\hat{u} \in C_b(H)$, постоянной на траекториях поля $\mathbf{n}$, то поверхностная мера μ_S корректно определяется следующей формулой, которая должна выполняться для всех ограниченных непрерывных функций на S:

$$\int\limits_S u \, d\mu_S = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \hat{u} \, d\mu = \int\limits_G \hat{u} \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} \, d\mu,$$

(см. [1]).

Далее предлагается следующая L_2-версия оператора Лапласа. Рассматривается оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \to L_2(G; H)$ с естественной областью определения $C^1(G)$ ($C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in C(G;\, H)$). Для корректного задания этого оператора следует проверить, что условия: $u,\, v \in C^1(G)$; $u = v (\operatorname{mod} \mu)$ влекут за собой равенство:

$\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v (\mathrm{mod}\ \mu)$. Данное требование выполнено для тех мер μ, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества U. Последнее условие выполнено для квазиинвариантной меры μ, т.е. такой меры μ, для которой множество квазиинвариантных сдвигов h ($\mu_h(A) \coloneqq \mu(A+h)$; $\mu_h \sim \mu$) содержит плотное в H линейное подмногообразие $\mathcal{L}$. Примером такой меры является гауссова мера $\mu = \mu_A$ в H, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Дальнейшие построения предполагают выполнение следующих двух дополнительных условий на меру μ:

а) оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G; H)$ с областью определения $C^1(G)$ корректно определён и допускает замыкание;

б) $\rho_\mu^{\mathbf{n}}|_G \in L_\infty(G)$.

Модельный пример меры, согласованной с поверхностью S, для которой выполняются также одновременно условия а) и б) предложен в заключительной части работы.

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа $\gamma\colon L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S, \mu_S)$ с областью определения $D(\overline{\mathbf{grad}})$ (см. [1]). При этом для функций $u \in C^1(G)\colon \gamma(u) = u|_S$; γ представляет собой ограниченный оператор из банахова в норме графика пространства $D(\overline{\mathbf{grad}})$ в $L_2(S)$.

Пусть μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H; H)$; $u \in C_b^1(H)$. В работе [1] получена формула:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u\, d\mu = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u,\, \mathbf{Z})\; d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{Z}}\, d\mu.$$

В работе [2] доказаны следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u\, d\mu = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{(\mathbf{Z},\,\mathbf{n})\mathbf{n}} G} u\, d\mu =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} (\mathbf{Z},\, \mathbf{n}) \cdot u\, d\mu = \int\limits_S (\mathbf{Z},\, \mathbf{n}) \cdot u\, d\mu_S.$$

(в силу равномерной непрерывности функции $(\mathbf{Z},\, \mathbf{n})\, u$ в окрестности поверхности S — см. [1]).

Тем самым доказана формула:

$$\int\limits_S (\mathbf{Z},\, \mathbf{n})\, u\, d\mu_S = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u,\, \mathbf{Z})\; d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{Z}}\, d\mu \tag{1}$$

Поскольку левая часть в формуле (1) обращается в ноль для функций $u \in C_b^1(H)$, для которых $u|_S = 0$, а $\operatorname{Ker}\gamma \supset C_0^1(G)$, то $\operatorname{Ker}\gamma$ плотно в $L_2(G)$. Формула (1) оправдывает введение L_2-версии оператора div в одном из следующих двух вариантов.

Вариант 1. Оператор $\operatorname{div}\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ определим формулой: $\operatorname{div} = -\left(\overline{\mathbf{grad}}\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*$.

Вариант 2. Оператор $\operatorname{div}\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ определим формулой: $\operatorname{div} = -\left(\mathbf{grad}\big|_{C_0^1(G)}\right)^*$.

В обоих случаях оператор Лапласа вводим формулой: $\triangle u = \operatorname{div} \circ \overline{\mathbf{grad}} u$.

В отличие от работы [3] в данной работе рассматриваем второй вариант L_2-версии оператора div.

2. Исследование задачи Дирихле

В данном разделе предполагаем согласованность границы S ограниченной области G с мерой μ и выполнение условий а) и б), наложенных на меру μ.

Лемма 1. *Пусть* $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$; $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $u \cdot \varphi \in D(\overline{\mathbf{grad}})$ *и при этом* $\overline{\mathbf{grad}}(u\varphi) = u\, \mathbf{grad}\, \varphi + \varphi\, \overline{\mathbf{grad}} u$.

Доказательство. Пусть последовательность $u_n \in C^1(G)$ такова, что $u_n \to u$ (в $L_2(G)$); $\mathbf{grad}\, u_n \to \mathbf{Z} = \overline{\mathbf{grad}} u$ (в $L_2(G;H)$). Поскольку $\varphi \in L_\infty(G)$, то имеют место соотношения: $u_n \cdot \varphi \to u \cdot \varphi$; $\mathbf{grad}(u_n \cdot \varphi) = \mathbf{grad}\, u_n \cdot \varphi + u_n \cdot \mathbf{grad}\, \varphi \to \varphi \cdot \overline{\mathbf{grad}} u + u \cdot \mathbf{grad}\, \varphi$, откуда и следует утверждение леммы.

□

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$; $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $\varphi \mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$ *и при этом:* $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{X}) = (\mathbf{grad}\, \varphi, \mathbf{X}) + \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}$.

Доказательство. По определению оператора div для каждой функции $u \in C_0^1(G)$ имеет место равенство:

$$\int_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{X})\, d\mu = -\int_G u \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}\, d\mu.$$

Но $\varphi \cdot u \in C_0^1(G)$ и, следовательно, $\int_G (\mathbf{grad}(u \cdot \varphi), \mathbf{X})\, d\mu = -\int_G u \cdot \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}\, d\mu$, откуда, в силу леммы 1, следует равенство:

$$\int_G (\mathbf{grad}\, u, \varphi \mathbf{X})\, d\mu = -\int_G (u\, (\mathbf{grad}\, \varphi, \mathbf{X}) + \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X})\, d\mu,$$

что и доказывает лемму.

□

Пусть $f \in L_2(G)$; $k \in C^1(G)$; $a \in C(G)$; $k(x) \geqslant \delta > 0\, (\forall x \in G)$; $a(x) \geqslant \alpha > 0\, (\forall x \in G)$.

Пусть $u \in D(\triangle)$. Тогда $\overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$; в силу леммы 2 имеет место включение: $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$. Для $u \in D(\triangle)$ рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\right) - a \cdot u = f \tag{2}$$

и поставим вопрос о поиске решения задачи Дирихле для уравнения (2) с краевым условием.

$$\gamma(u) = \varphi, \tag{3}$$

(здесь $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$).

Конечномерный вариант поставленной задачи в случае инвариантной меры исследован, например, в [4].

Рассмотрим сначала случай $\varphi = 0$. Тогда u является решением задачи (2)–(3) с $\varphi = 0$ в том и лишь в том случае, если $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_G v \cdot \big(\mathrm{div}\,\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\big) - au\big)\, d\mu = \int\limits_G vf\, d\mu. \tag{4}$$

Это следует из плотности $C_0^1(G)$ в $L_2(G)$.

Уравнение (4) преобразуем в следующее:

$$\int\limits_G \big(k\, \big(\overline{\mathbf{grad}} u,\, \mathbf{grad}\, v\big) + a \cdot uv\big)\, d\mu = -\int\limits_G vf\, d\mu. \tag{5}$$

При данных условиях на функции k и a левая часть уравнения (5) представляет собой скалярное произведение $(u,\, v)_1$ в $D(\overline{\mathbf{grad}})$; норма $\|\cdot\|_1$, индуцированная этим произведением эквивалентна норме графика. При этом существует число $C > 0$ такое, что при всех $v \in C_0^1(G)$ выполняются неравенства: $\Big|\int\limits_G vf\, d\mu\Big| \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot \|v\|_{L_2(G)} \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot C\|v\|_1$.

Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ — замыкание $C_0^1(G)$ в $D(\overline{\mathbf{grad}})$ в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$. $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ — гильбертово пространство, наделённое скалярным произведением $(\cdot,\, \cdot)_1$. Потому в силу теоремы Рисса существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(G) \subset \operatorname{Ker}\gamma$, которая удовлетворяет уравнению (5) при всех $v \in C_0^1(G)$.

Пусть u — решение (5) при всех $v \in C_0^1(G)$. Перепишем (5) в виде:

$$\int\limits_G \big(k\, \overline{\mathbf{grad}} u,\, \mathbf{grad}\, v\big)\, d\mu = -\int\limits_G v\,(f + a\,u)\, d\mu.$$

Справедливость последнего равенства при всех $v \in C_0^1(G)$ означает, что $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u \in D(\mathrm{div})$ и при этом $\mathrm{div}\,\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\big) = f + a\,u$. Поскольку $\frac{1}{k} \in C^1(G)$, то в силу леммы 2, $\overline{\mathbf{grad}} u \in D(\mathrm{div})$ и, следовательно, $u \in D(\triangle)$.

Тем самым для граничного условия $\gamma(u) = 0$ доказаны существование решения задачи (2)–(3) и его единственность в функциональном пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$.

Замечание 1. В отличие от классической конечномерной ситуации вопрос о совпадении пространств $\operatorname{Ker}\gamma$ и $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ является открытым, а потому открыт и вопрос о единственности решения поставленной задачи.

Если теперь $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$, то существует функция $w \in D(\triangle)$, для которой $\varphi = \gamma(w)$. В этом случае $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} w \in D(\mathrm{div})$, а потому определено $\mathcal{L}(w)$ и функция $u_1 = u - w$ должна удовлетворять задаче:

$$\mathcal{L} u_1 = \mathrm{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u_1\right) - a \cdot u_1 = f - \mathrm{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} w\right) + a\, w; \tag{6}$$

$$\gamma(u_1) = 0. \tag{7}$$

Задача (6)–(7) допускает решение описанным выше приёмом.

При этом задача (6))–(7) описанным выше приёмом сводится к задаче поиска функции $u_1 \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, которая при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} &\int\limits_G \Big(k\, \left(\overline{\mathbf{grad}} u_1,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\, u_1\, v\Big)\, d\mu \\ &\qquad = -\int\limits_G \Big(v\, f + k\, \left(\overline{\mathbf{grad}} w,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\, w\, v\Big)\, d\mu. \end{aligned} \tag{8}$$

Для $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$ существует функция $w \in D(\overline{\mathbf{grad}})$, для которой $\gamma(w) = \varphi$. Докажем существование функции $u_1 \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, которая при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению (8). Тогда функция $u = u_1 + w$ может быть истолкована как “слабое решение” задачи (2)–(3).

Действительно, существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что при всех $v \in C_0^1(G)$ выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} &\left|\int\limits_G \left(v\, f + k\, \left(\overline{\mathbf{grad}} w,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\, w\, v\right)\, d\mu\right| \leqslant \\ &\leqslant \|f + a\, w\|_{L_2(G)}\, \|v\|_{L_2(G)} + \sup_G k(\cdot) \cdot |\!|\!|\overline{\mathbf{grad}} w|\!|\!|_{L_2(G;H)} \cdot |\!|\!|\,\mathbf{grad}\, v|\!|\!|_{L_2(G;H)} \leqslant \\ &\leqslant C_1\, \|v\| + C_2\, |\!|\!|\,\mathbf{grad}\, v|\!|\!| \end{aligned}$$

и приведённые выше соображения позволяют, используя теорему Рисса, сделать вывод о существовании слабого решения задачи (2)–(3) для произвольной $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$.

Тем самым для $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$ доказано существование решения задачи (2)–(3) (а для $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$ доказано существование слабого решения задачи (2)–(3)).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть граница S ограниченной области G согласована с мерой μ, а сама мера удовлетворяет условиям а), б). Тогда задача* (2)–(3) *в случае $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$ имеет решение $u \in D(\triangle)$. Если $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$, то задача* (2)–(3) *имеет слабое решение, т.е. существует функция $u \in D\left(\overline{\mathbf{grad}}\right)$, удовлетворяющая условию* (3) *и при всех $v \in C_0^1(G)$ уравнению* (5). *Если же $\varphi = 0$, то задача* (2)–(3) *имеет единственное решение в функциональном пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$.*

Замечание 2. В том случае, если оператор div определить равенством: $\mathrm{div} = -\left(\overline{\mathbf{grad}}\big|_{\mathrm{Ker}\,\gamma}\right)^*$ (вариант 1), результат теоремы 1 более содержателен: задача (2)–(3) для $\varphi \in \gamma\,(D(\triangle))$ имеет и притом единственное решение $u \in D(\triangle)$; в случае $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$ задача (2)–(3) имеет и притом единственное слабое решение (при этом слабое решение определено аналогично с заменой $C_0^1(G)$ на $\mathrm{Ker}\,\gamma$).

3. Модельный пример

В данном разделе приводится пример меры, согласованной с поверхностью $S = \partial G$, для которой выполнены условия а), б) п°1.

Пусть $\mathbf{n} \in C_b^1(H; H)$; Φt — поток векторного поля $\mathbf{n}$; μ — (неотрицательная) конечная борелевская мера на H; $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, для которой $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt < \infty$; φ и φ' ограничены на $\mathbb{R}$.

Отображение $\mathbb{R} \times H \ni \langle t, x\rangle \mapsto \Phi_{-t}x \in H$ является непрерывным и потому для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ множество $\big\{\langle t, x\rangle \,\big|\, \Phi_{-t}x \in A\big\}$ $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(H)$ – измеримо. Поэтому для всех $A \in \mathfrak{B}(H)$ функция $t \mapsto \mu\,(\Phi_t A) = \int\limits_H j_A \circ \Phi_{-t}\,d\mu$ является $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-измеримой (и ограниченной) ([5], с. 225–226). Тем самым определён интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\,(\Phi_t A)\;dt$. Формула

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\,(\Phi_t A)\;dt \tag{9}$$

корректно определяет неотрицательную конечную борелевскую меру на H. Мера μ_φ дифференцируема вдоль векторного поля $\mathbf{n}$ и при этом для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ имеет место равенство:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \mu_\varphi\,(\Phi_t A) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(s)\,\mu\,(\Phi_s A)\;ds.$$

Пусть, дополнительно, существует константа C, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\big|\varphi'(s)\big| \leqslant C\,\varphi(s)$. Тогда для каждого борелевского множества $A \subset H$ имеет место неравенство:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\,\mu\,(\Phi_t A)\;dt\right| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\,(\Phi_t A)\;dt,$$

откуда $|d\mu_\varphi(A)| \leqslant C\,\mu_\varphi(A)$, а потому $\rho^{\mathbf{n}}_{\mu_\varphi} = \frac{d(d\mu_\varphi)}{d\mu_\varphi} \in L_\infty(H, \mu_\varphi)$. Примером такой функции φ является сглаженная в окрестности нуля функция

$$\psi(s) = e^{-\alpha\,|s|},\ \alpha > 0. \tag{10}$$

Если теперь Φ_n — продолжение на H поля единичной внешней нормали к S, то S согласована с мерой μ_Φ и при этом мера μ_Φ удовлетворяет условию б).

Пусть в H существует полная система векторов, вдоль которых исходная мера μ L_2-дифференцируема (т.е. такая система векторов $h \in H$, вдоль которых производная меры $d_h\mu$ имеет плотность $\rho_\mu^h = \frac{d(d_h\mu)}{d\mu} \in L_2(H)$). Примером такой меры является гауссова мера, корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Теорема 2. *Пусть конечная борелевская (неотрицательная) мера μ удовлетворяет приведённому выше условию. Пусть, дополнительно, $\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого множества U в H. Тогда мера μ_φ, определённая формулой* (9) *с функцией φ, представляющей собой сглаженную в окрестности нуля функцию ψ (см.* (10)*), согласована с S и удовлетворяет условиям а) и б) $n^\circ 1$.*

Доказательство. Осталось проверить лишь корректность и замыкаемость оператора $\mathbf{grad}\colon L_2(G,\mu_\varphi) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G; H, \mu_\varphi)$.

Если U — открытое непустое множество в H, то, в силу (9), $\mu_\varphi(U) > 0$. Поэтому, если $u, v \in C_b^1(G)$; $u = v \,(\mathrm{mod}\, \mu)$, то $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \,(\mathrm{mod}\, \mu)$, а поэтому оператор $\mathbf{grad}$ определён корректно.

Из (9) для ограниченных борелевских функций f получим равенство:

$$\int\limits_H f\, d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_H f \circ \Phi_{-t}\, d\mu. \tag{11}$$

Формула (11) обобщается на случай неотрицательных функций $f \in L_1(H, \mu_\varphi)$. С этой целью строим последовательность ограниченных измеримых функций f_n, для которых $f_n \nearrow f$. Тогда при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость: $h_n(t) = \int\limits_H f_n \circ \Phi_{-t}\, d\mu \nearrow h(t)$ $(h(t) \in [0; +\infty])$. Поскольку числовая последовательность $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, h_n(t)\, dt$ ограничена сверху интегралом $\int\limits_H f\, d\mu_\varphi$, то по теореме Беппо Леви функция $h(t)$ интегрируема на $\mathbb{R}$ по мере $\varphi\, dt$ и $h(t)$ почти всюду конечна. Итак, $f \circ \Phi_{-t} \in L_1(\mu)$ для почти всех t и равенство (11) верно для $f \in L_1(H, \mu_\varphi)$; $f \geqslant 0$.

Пусть $u_m \in C^1(G)$; $u_m \to 0$ в $L_2(G, \mu_\varphi)$; $\mathbf{grad}\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G; H, \mu_\varphi)$. Предстоит доказать, что $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ $(\mathrm{mod}\, \mu_\varphi)$.

Допускаем противное: пусть $\|\mathbf{Z}\|^2_{L_2(G;H,\mu_\varphi)} = \delta > 0$. Пользуясь тем, что $\mu_\varphi(S) = 0$ (следствие согласованности S и μ_φ) выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$\int\limits_{G \setminus S_\varepsilon} \|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2\, d\mu_\varphi > \frac{\delta}{2}$$

Пусть функция $\eta \in C_0^1(G)$ такова, что $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ и при этом $\eta(x) = 0$ при $x \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}$; $\eta(x) = 1$ при $x \in G \setminus S_\varepsilon$. Тогда $\eta\, u_m \to 0$ в $L_2(G, \mu_\varphi)$; $\mathbf{grad}(\eta\, u_m) = \eta\, \mathbf{grad}\, u_m + u_m\, \mathbf{grad}\, \eta \to \eta \mathbf{Z}$. При этом $\|\eta\, \mathbf{Z}\|^2_{L_2(G;H,\,\mu_\varphi)} > \frac{\delta}{2} > 0$. Потому, не теряя общности, можно считать, что $u_m \in C_0^1(G)$ и $\mathrm{supp}\, u_m \subset G \setminus S_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Поскольку теперь $u_m \in C_0^1(G)$, то, применив формулу (11), сходимость $\mathbf{grad}\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G; H,\, \mu_\varphi)$ перепишем в виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_{H} \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\|^2\ d\mu \to 0. \tag{12}$$

Переходя к подпоследовательностям из (12) получим для почти всех t сходимость:

$$\int\limits_{H} \|(\mathbf{grad}\, u_{m_k})(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\|^2\, d\mu \to 0,\ k \to \infty. \tag{13}$$

Однако, $(\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t}))\,(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* (\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x)$, откуда

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t})(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right)^*\right\| \cdot \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\| \leqslant \\ &\leqslant e^{C\,|t|}\ \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x))\|\,, \end{aligned}$$

где $C = \sup\limits_{H} \|\mathbf{n}'(\cdot)\|$.

Теперь из (13) делаем вывод: для почти всех t имеет место сходимость:

$$\int\limits_{H} \left\|\mathbf{grad}(u_{m_k} \circ \Phi_{-t})(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\right\|^2\ d\mu \to 0,\ k \to \infty. \tag{14}$$

Исходное условие $u_{m_k} \to 0$ в $L_2(G, d\mu_\varphi)$ из тех же соображений приводит к сходимости (для почти всех t):

$$\int\limits_{H} u^2_{m_{k_s}} \circ \Phi_{-t}\, d\mu \to 0,\ s \to \infty. \tag{15}$$

Покажем, что в условиях теоремы оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(H, \mu) \supset C_b^1(H) \ni v \mapsto \mathbf{grad}\, v \in L_2(H; H, \mu)$ замыкаем.

Действительно, положим: $v_m \to 0$; $\mathbf{grad}\, v_m \to \mathbf{Z}$ (здесь $v_m \in C_b^1(H)$).

Тогда для $\psi \in C_b^1(H)$ выпишем формулу интегрирования по частям в направлении h $\left(\rho_\mu^h \in L_2(H, \mu)\right)$:

$$\int\limits_{H} (\mathbf{grad}\, v_m,\, \psi\, h)\ d\mu = -\int\limits_{H} v_m\ (\mathbf{grad}\, \psi,\, h)\ d\mu - \int\limits_{H} v_m \cdot \psi \cdot \rho_\mu^h\, d\mu,$$

(см., например, [6], с. 179).

Предельным переходом получим: $\int\limits_{H} (\mathbf{Z},\, \psi\, h) = 0$ и осталось заметить, что из последнего равенства следует ортогональность $\mathbf{Z}$ в $L_2(H; H, \mu)$ всевозможным линейным комбинациям индикаторов открытых подмножеств в H (с векторными коэффициентами), которые плотны в $L_2(H; H, \mu)$.

Теперь из (14)–(15) можно сделать вывод: для почти всех t имеет место равенство:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x) = 0 \pmod{\mu}$$

откуда, в силу невырожденности оператора $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)$, $\mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x) = 0 \pmod{\mu}$. Отсюда:

$$\int\limits_H \|\mathbf{Z}\|^2\, d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_H \|\mathbf{Z} \circ \Phi_{-t}\|^2\, d\mu = 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему 2. □

Список литературы

[1] Богданский Ю. В. *Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии* // УМЖ. – 2011. – **63**, №9. – С. 1168-1178.

[2] Богданский Ю. В. *Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского* // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, №10. – С. 1299-1313.

[3] Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю. *Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве* // Укр. мат. журн. – подано в печать 18.03.2013.

[4] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* // М.: Наука, 1976. – 392 с.

[5] Богачев В. И. *Основы теории меры* // М.; Ижевск: РХД, 2006. – т. 1 – 584 с.

[6] Богачев В. И. *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна* // М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.

Лапласіан по мірі та задача Діріхле *Для функцій на сепарабельному дійсному гільбертовому простророрі H $(\dim H \leqslant \infty)$ запропоновано версію оператора Лапласа, породженого заданою на H (борелівською невід'ємною скінченною) мірою μ. Досліджено існування та єдиність розв'язків (в т.ч. "слабких") задачі Діріхле для еліптичного рівняння в області G, що погоджена з вихідною мірою μ. Наведено модельний приклад погодження міри μ з областю G.*

Ключові слова: гільбертів простір, борелівська міра, диференціювання мір, еліптичні рівняння, задача Діріхле.

Laplacian on measure and the Dirichlet problem *It was proposed Laplace operator version on functions on a separable real Hilbert space H $(\dim H \leqslant \infty)$ that is generated by the (non-negative finite Borel) measure μ defined on H. It was studied both of existence and uniqueness of solutions (including "weak" ones) of the Dirichlet peoblem for the elliptic equation in a region G that is agreed with an initial measure μ. It was given an example of agreeing of a measure μ with a region G.*

Keywords: Hilbert space, Borel measure, differentiation of measures, elliptic equations, Dirichlet problem.