Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского
Серия : Физико-математические науки. Том 26 (64). 2013. № 2. С. 79-88

УДК 539. 391+514. 764.2

К ПРОБЛЕМЕ О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НУЛЬ-СТРУНЫ

Леляков А. П., Карпенко А. С.

Таврический Национальный Университет имени В. И. Вернадского, проспект Вернадского, 4, Симферополь 95007, Украина
E-mail: ar_mathematician@mail.ru

В данной работе проведен анализ системы уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны, коллапсирующей в плоскости z = 0. Показано, что, решение Минковского не может рассматриваться в качестве асимптотики для гравитационного поля порождаемого нуль-струной.
Ключевые слова: нуль-струна, скалярное поле, граничные условия, пространство Минковского.
PACS: 98.80. ± k

ВВЕДЕНИЕ

Исторически проблема граничных условий в общей теории относительности была связана с вопросами космологии и поэтому формулировалась как задача о граничных условиях на бесконечности. В работе [1] Эйнштейн обозначил следующие три возможности ее решения:

1. В пространственной бесконечности при надлежащем выборе системы координат метрика должна стремится к метрике плоского пространства Минковского;
2. Не существует граничных условий, которые могли бы претендовать на всеобщую справедливость (каждая задача должна иметь индивидуальное решение этого вопроса);
3. Общие уравнения поля должны быть изменены путем введения добавочного (космологического) члена так, чтобы пространство стало замкнутым, чем снимается вопрос о граничных условиях.

Хотя, в этой же работе было отмечено, что гипотеза 1 не всегда согласуется с понятием относительности инерции и плохо согласуется с некоторыми статистическими соображениями; предположение 2 фактически не соответствует какому-либо решению вопроса, а означает отказ от его решения; в случае же 3 получается такое обобщение уравнений поля, которое не подтверждается нашими действительными знаниями о тяготении.

В работе [2] на основе классификации полей тяготения по алгебраической структуре тензора кривизны сформулировано инвариантное решение проблемы граничных условий.

Прежде всего, необходимо отметить, что согласно [2] тип пространства V_n, при заданном n, определяется, так называемой характеристикой λ – матрицы $\left(R_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}\right)$, где $R_{\alpha\beta}$ – тензор Ричи, $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор пространства V_n, $\alpha, \beta = 1,...,n$. При $n = 4$ существуют только три типа полей тяготения общего вида

T_i, $i = 1,2,3$, в смысле алгебраической структуры тензора пространства-материи. Эти типы отвечают трем возможным типам характеристик λ – матрицы.

Сформулированный в [2] принцип наложения граничных условий гласит: пусть имеется поле тяготения T_i $(i = 1,2,3)$, тогда для областей, где $T_{\alpha\beta} \to 0$, и соответственно $R_{\alpha\beta} \to 0$, ($T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии импульса рассматриваемой задачи), компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ данного поля тяготения должны сколь угодно мало отличаться от соответствующих компонент метрического тензора пространства, которое является пространством того же типа, что и данное, и допускает максимально возможную для данного типа пространств группу движений.

Например, для пространств T_1, искривление, выражающееся в отклонении тензора кривизны от нуля, обуславливается, наличием гравитационных масс. По мере удаления от этих масс (например, на гиперсфере бесконечно большого радиуса, для решения Шварцшильда, в полярной системе координат) их гравитационное действие ослабевает, «искривленность» пространства сглаживается, оно становится более однородным и стремится к пространству T_1 с максимально возможной для этого типа пространств группой движений (пространству Минковского).

Предложенная в работе [2] формулировка решения проблемы граничных условий является инвариантно-групповой и не зависит от выбора системы координат. Важно отметить, что попытка поставить при решении некоторой задачи для пространств некоторого заданного типа граничные условия пространств другого типа должна приводить к противоречиям, поскольку вырождение метрики и изменение типа пространства в этом случае физически не будут мотивированы.

Другими словами, поскольку максимально возможной группой движений для пространств типа T_1 есть группа G_{10}, для пространств T_2 группа G_6, а для пространств T_3 группа G_2, то плоское пространство Минковского не может рассматриваться в качестве граничных условий для пространств типа T_2 и T_3.

Пространства порождаемые различными распределениями вещественного безмассового скалярного поля, частными случаями которых являются и различные «струнно-подобные» распределения, относятся к пространствам типа T_3.

Целью работы было показать, что гравитационное поле, порождаемое замкнутой «размазанной» нуль-струной коллапсирующей в плоскости $z = 0$, не может в качестве асимптотики иметь плоское решение Минковского. В цилиндрической системе координат $x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$, функции $x^m(\tau,\sigma)$, определяющие траекторию движения замкнутой нуль-струны, имеют вид:

$$t = \tau, \rho = -\tau, \theta = \sigma, z = 0, \tau \in (-\infty;0], \tag{1}$$

где τ и σ – параметры на мировой поверхности нуль-струны.

Поскольку нуль-струны реализуют границу нулевого натяжения в теории струн [3], то компоненты тензора энергии-импульса для нуль-струны имеют вид

$$T^{mn}\sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} \delta^4\left(x^l - x^l(\tau,\sigma)\right), \tag{2}$$

где индексы m,n,l принимают значения 0,1,2,3, $x^m_{,\tau} = \partial x / \partial \tau$, $g = |g_{mn}|$, g_{mn} – метрический тензор внешнего пространства, $\gamma = const$. Для (1) отличными от нуля будут такие компоненты тензора энергии-импульса (2)

$$T^{00} = T^{11} = -T^{01} = \frac{\gamma}{\sqrt{-g}} \delta(z)\delta(\eta), \qquad (3)$$

где $\eta = t + \rho$.

Используя результаты работ [4, 5], общее выражение квадратичной формы, описывающей движение нуль-струны, определяемое траекторией (1), может быть представлено в виде

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \qquad (4)$$

где: ν, μ, A, B – функции переменных t, ρ, θ, z. На этом этапе важно отметить, что решение Минковского является одним из частных случаев (4) и для него

$$e^{2\nu} = e^{2\mu} = A = 1,\ B = \rho^2.$$

Поскольку траектория (1) должна быть одним из решений уравнений движения нуль-струны, то можно получить ограничения на метрические функции, при которых траектория движения нуль-струны остается неизменной. Движение нуль-струны в псевдоримановом пространстве-времени определяется следующей системой уравнений [2]:

$$x^m_{,\tau\tau} + \Gamma^m_{pq} x^p_{,\tau} x^q_{,\tau} = 0, \qquad (5)$$

$$g_{mn} x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} = 0,\ g_{mn} x^m_{,\tau} x^n_{,\sigma} = 0, \qquad (6)$$

где (5) – это уравнения движения нуль-струны а (6) – уравнения связи, Γ^m_{pq} – символы Кристоффеля внешнего пространства-времени. Первое уравнение из (6) для (1) имеет вид $e^{2\nu} - A = 0$, откуда

$$e^{2\nu} = A, \qquad (7)$$

а оставшиеся уравнения в (5) и (6) для (4) при условии (7), приводятся к единственному уравнению $\nu_{,t} - \nu_{,\rho} = 0$, откуда

$$\nu = \nu(\eta, \theta, z). \qquad (8)$$

Анализ системы уравнений Эйнштейна для квадратичной формы (4) и компонент тензора энергии-импульса (4), при условиях (9), (10), позволяет доопределить функциональную зависимость метрических функций, а именно:

$$\mu = \mu(\eta, \theta, z),\ B = B(\eta, \theta, z), \qquad (9)$$

при этом сама система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta\eta}}{B} - (\mu_{,\eta})^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}\right)^2 + 2\nu_{,\eta}\left(\mu_{,\eta} + \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\right) = \chi T_{00}, \qquad (10)$$

$$e^{2(\nu-\mu)}\left(\nu_{,zz}+\left(\nu_{,z}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{B_{,zz}}{B}-\frac{1}{4}\left(\frac{B_{,z}}{B}\right)^2-\mu_{,z}\nu_{,z}-\frac{1}{2}\frac{B_{,z}}{B}\left(\mu_{,z}-\nu_{,z}\right)\right)+$$
$$+\frac{e^{2\nu}}{B}\left(\nu_{,\theta\theta}+\mu_{,\theta\theta}+\left(\nu_{,\theta}\right)^2+\left(\mu_{,\theta}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{B_{,\theta}}{B}\left(\nu_{,\theta}+\mu_{,\theta}\right)+\nu_{,\theta}\mu_{,\theta}\right)=0, \quad (11)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{B}+2\nu_{,\eta z}-\frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\frac{B_{,z}}{B}-\frac{B_{,\eta}}{B}\nu_{,z}-\frac{B_{,z}}{B}\mu_{,\eta}-2\mu_{,\eta}\nu_{,z}=0, \quad (12)$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}}\left(2\nu_{,zz}+3\left(\nu_{,z}\right)^2-2\nu_{,z}\mu_{,z}\right)-2\nu_{,\theta}\mu_{,\theta}-\left(\nu_{,\theta}\right)^2=0, \quad (13)$$

$$\left(\nu_{,z}\right)^2+\nu_{,z}\frac{B_{,z}}{B}-\frac{e^{2\mu}}{B}\left(2\nu_{,\theta\theta}+3\left(\nu_{,\theta}\right)^2+\nu_{,\theta}\frac{B_{,\theta}}{B}\right)=0, \quad (14)$$

$$\nu_{,\eta\theta}+\mu_{,\eta\theta}-\frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\left(\nu_{,\theta}+\mu_{,\theta}\right)-\mu_{,\eta}\left(\nu_{,\theta}-\mu_{,\theta}\right)=0, \quad (15)$$

$$\nu_{,\theta z}+\nu_{,z}\left(\nu_{,\theta}-\mu_{,\theta}\right)-\nu_{,\theta}\frac{B_{,z}}{B}=0. \quad (16)$$

Как следует из (3) вне струны, все компоненты струнного тензора энергии импульса тождественно равны нулю, а отличны от нуля (стремятся к бесконечности) непосредственно на струне, что позволяет исследовать систему уравнений Эйнштейна для рассматриваемой задачи в двух направлениях:

1. Ограничится анализом «внешней» задачи.
2. Рассматривать компоненты струнного тензора энергии импульса как предел некоторого «размазанного» распределения и провести анализ уравнений Эйнштейна для этого «размазанного» распределения.

Как было показано в работах [6-8] анализ «внешней» задачи приводит к большому числу вакуумных решений уравнений Эйнштейна удовлетворяющих симметриям рассматриваемой задачи, однако, неясными остаются критерии позволяющие выбрать из этой совокупности решение описывающее гравитационное поле нуль-струны движущейся по траектории (1). При попытке рассматривать компоненты струнного тензора энергии импульса как предел некоторого «размазанного» распределения, например, простая замена дельта функций в тензоре (2) соответствующими дельта-функционными последовательностями, возможны неточности связанные с тем, что непонятно как учитывать возможное появление слагаемых (множителей) которые стремятся к нулю (константе) при стягивании этого «размазанного» распределения в одномерный объект. Поэтому, проще изначально рассматривать некоторое «хорошо определенное» «размазанное» распределение, например, вещественное безмассовое скалярное поле (поскольку в решаемой задаче мы рассматриваем скалярный нуль объект), а затем стянуть его в струну требуемой конфигурации, требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии импульса скалярного поля в пределе такого сжатия асимптотически совпали с компонентами тензора (3).

Для (7), (8) выражение (4) принимает вид

$$ds^2=e^{2\nu}\left(\left(dt\right)^2-\left(d\rho\right)^2\right)-B\left(d\theta\right)^2-e^{2\mu}\left(dz\right)^2. \quad (17)$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ РАЗМАЗАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Тензор энергии-импульса для вещественного безмассового скалярного поля имеет вид [7]

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L\,, \tag{18}$$

где $L = g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi / \partial x^{\alpha}$, φ – потенциал скалярного поля, индексы α, β принимают значения 0, 1, 2, 3. Для само-сгласованности уравнений Эйнштейна будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, \theta, z) \rightarrow \varphi = \varphi(\eta, \theta, z). \tag{19}$$

Расписывая равенство (18) находим

$$T_{00} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2 + \frac{e^{2\nu}}{2}\left(\frac{\left(\varphi_{,z}\right)^2}{e^{2\mu}} + \frac{\left(\varphi_{,\theta}\right)^2}{B}\right),\ T_{11} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2 - \frac{e^{2\nu}}{2}\left(\frac{\left(\varphi_{,z}\right)^2}{e^{2\mu}} + \frac{\left(\varphi_{,\theta}\right)^2}{B}\right),$$

$$T_{01} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2$$

$$T_{22} = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{,\theta}\right)^2 - \frac{B}{e^{2\mu}}\left(\varphi_{,z}\right)^2\right),\ T_{03} = T_{13} = \varphi_{,\eta}\varphi_{,z}\,,\ T_{12} = \varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta}\,, \tag{20}$$

$$T_{23} = \varphi_{,\theta}\varphi_{,z}\,,\ \ T_{33} = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{,z}\right)^2 - \frac{e^{2\mu}}{B}\left(\varphi_{,\theta}\right)^2\right).$$

Для (17) и (20) система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta\eta}}{B} - \left(\mu_{,\eta}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}\right)^2 + 2\nu_{,\eta}\left(\mu_{,\eta} + \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\right) = \chi\left(\varphi_{,\eta}\right)^2, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} e^{2(\nu-\mu)}\left(\nu_{,zz} + \left(\nu_{,z}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{B_{,zz}}{B} - \frac{1}{4}\left(\frac{B_{,z}}{B}\right)^2 - \mu_{,z}\nu_{,z} - \frac{1}{2}\frac{B_{,z}}{B}\left(\mu_{,z} - \nu_{,z}\right)\right) + \\ + \frac{e^{2\nu}}{B}\left(\nu_{,\theta\theta} + \mu_{,\theta\theta} + \left(\nu_{,\theta}\right)^2 + \left(\mu_{,\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B_{,\theta}}{B}\left(\nu_{,\theta} + \mu_{,\theta}\right) + \nu_{,\theta}\mu_{,\theta}\right) = \\ = -\frac{\chi e^{2\nu}}{2}\left(\frac{\left(\varphi_{,z}\right)^2}{e^{2\mu}} + \frac{\left(\varphi_{,\theta}\right)^2}{B}\right) \end{gathered}\ , \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}\frac{B_{,\eta z}}{B} + \nu_{,\eta z} - \frac{1}{4}\frac{B_{,\eta}}{B}\frac{B_{,z}}{B} - \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\nu_{,z} - \frac{1}{2}\frac{B_{,z}}{B}\mu_{,\eta} - \mu_{,\eta}\nu_{,z} = -\chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,z}\,, \tag{23}$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}}\left(2\nu_{,zz} + 3\left(\nu_{,z}\right)^2 - 2\nu_{,z}\mu_{,z}\right) - 2\nu_{,\theta}\mu_{,\theta} - \left(\nu_{,\theta}\right)^2 = \frac{\chi}{2}\left(\left(\varphi_{,\theta}\right)^2 - \frac{B}{e^{2\mu}}\left(\varphi_{,z}\right)^2\right), \tag{24}$$

$$\left(\nu_{,z}\right)^2+\nu_{,z}\frac{B_{,z}}{B}-\frac{e^{2\mu}}{B}\left(2\nu_{,\theta\theta}+3\left(\nu_{,\theta}\right)^2+\nu_{,\theta}\frac{B_{,\theta}}{B}\right)=\frac{\chi}{2}\left(\left(\varphi_{,z}\right)^2-\frac{e^{2\mu}}{B}\left(\varphi_{,\theta}\right)^2\right), \quad (25)$$

$$\nu_{,\eta\theta}+\mu_{,\eta\theta}-\frac{1}{2}\frac{B_{,\eta}}{B}\left(\nu_{,\theta}+\mu_{,\theta}\right)-\mu_{,\eta}\left(\nu_{,\theta}-\mu_{,\theta}\right)=\chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta}, \quad (26)$$

$$\nu_{,\theta z}+\nu_{,z}\left(\nu_{,\theta}-\mu_{,\theta}\right)-\nu_{,\theta}\frac{B_{,z}}{B}=\chi\varphi_{,\theta}\varphi_{,z}. \quad (27)$$

Поскольку ковариантная производная от компонент тензора Эйнштейна равна нулю, т.е. $G^{\beta}_{\alpha;\beta}=0$, где G^{β}_{α} – тензор Эйнштейна, точка с запятой обозначает ковариантную производную, то требуя выполнения равенства

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta}=0,$$

для (18), получим уравнение, которому должен удовлетворять потенциал скалярного поля [7]

$$\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{;\beta}=0. \quad (28)$$

Для (17) уравнение (28) принимает вид

$$\frac{\varphi_{,z}}{e^{2\mu}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\left(\varphi_{,z}e^{2\nu}e^{-\mu}\sqrt{B}\right)\right)-\frac{\varphi_{,\theta}}{B}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\left(\varphi_{,\theta}e^{2\nu}e^{-\mu}\sqrt{B}\right)\right)=0. \quad (29)$$

Сумма (24) и (25) есть

$$\frac{\nu_{,z}}{e^{2\mu}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\left(\nu_{,z}e^{2\nu}e^{-\mu}\sqrt{B}\right)\right)-\frac{\nu_{,\theta}}{B}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\left(\nu_{,\theta}e^{2\nu}e^{-\mu}\sqrt{B}\right)\right)=0. \quad (30)$$

Сравнивая (29) и (30) находим

$$\nu_{,z}=c(\eta)\varphi_{,z} \text{ и } \nu_{,\theta}=c(\eta)\varphi_{,\theta}. \quad (31)$$

Интегрируя (31) находим

$$\nu(\eta,\theta,z)=c(\eta)\varphi(\eta,\theta,z)+\omega(\eta,\theta) \quad (32)$$

и

$$\nu(\eta,\theta,z)=c(\eta)\varphi(\eta,\theta,z)+\omega(\eta,z), \quad (33)$$

откуда следует, что

$$\nu(\eta,\theta,z)=c(\eta)\varphi(\eta,\theta,z)+\omega_0(\eta). \quad (34)$$

Рассмотрим полученную систему уравнений (21) – (27) для распределения скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкого» кольца, для которого переменные η и z изменяются в пределах

$$\eta\in[-\Delta\eta;\Delta\eta],\ z\in[-\Delta z;\Delta z], \quad (35)$$

где положительные константы $\Delta\eta$ и Δz определяют «толщину» кольца

$$\Delta\eta<<1,\ \Delta z<<1, \quad (36)$$

и в пределе сжатия такого «тонкого» кольца в одномерный объект (нуль-струну)

$$\Delta\eta\to 0,\ \Delta z\to 0. \quad (37)$$

Тогда пространство-время, в котором движется такая «размазанная» нуль-струна и для которого переменные η и z изменяются в пределах

$$\eta \in (-\infty;+\infty),\ z \in (-\infty;+\infty),\ \theta \in [0;2\pi] \tag{38}$$

условно можно разбить на три области:

- область I, для которой
$$\eta \in (-\infty;-\Delta\eta) \cup (\Delta\eta;+\infty),\ z \in (-\infty;+\infty),\ \theta \in [0;2\pi], \tag{39}$$
- область II, для которой
$$\eta \in [-\Delta\eta;\Delta\eta],\ z \in (-\infty;-\Delta z) \cup (\Delta z;+\infty),\ \theta \in [0;2\pi], \tag{40}$$
- область III, для которой
$$z \in [-\Delta z;\Delta z],\ \eta \in [-\Delta\eta;\Delta\eta],\ \theta \in [0;2\pi]. \tag{41}$$

Поскольку при стягивании скалярного поля в струну система уравнений (21) – (27) для скалярного поля должна асимптотически стремиться к системе (10) – (16) для замкнутой нуль-струны, то в области I, II

$$\varphi \to 0,\ \varphi_{,z} \to 0,\ \varphi_{,\eta} \to 0,\ \varphi_{,\theta} \to 0 \tag{42}$$

а в области III, в общем случае

$$\varphi \neq 0,\ \varphi_{,z} \neq 0,\ \varphi_{,\eta} \neq 0. \tag{43}$$

Сравнивая систему уравнений (10) – (16) для замкнутой нуль-струны с системой (21) – (27), можно сделать вывод о том, что при стягивании скалярного поля в струну, то есть при $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$

$$\begin{gathered}(\varphi_{,\eta})^2 \to \infty,\ \left(\frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B}\right) \to 0,\\ \left((\varphi_{,\theta})^2 - \frac{B}{e^{2\mu}}(\varphi_{,z})^2\right) \to 0,\ \varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta} \to 0,\\ (\varphi_{,z}\varphi_{,\eta}) \to 0.\end{gathered} \tag{44}$$

В области I, согласно (43), при любом фиксированном значении переменной $\eta = \eta_0 \in (-\infty;-\Delta\eta) \cup (\Delta\eta;+\infty)$ и для всех значений $z \in (-\infty;+\infty)$, потенциал скалярного поля

$$\varphi(\eta_0,\theta,z) \to 0, \tag{45}$$

если же рассматривать распределение потенциала скалярного поля при любом фиксированном значении переменной $\eta = \eta_0 \in [-\Delta z;\Delta z]$, (области II и III), то в случае, когда переменная $z \in (-\infty;-\Delta z) \cup (\Delta z;+\infty)$ (область II), должно быть выполнено

$$\varphi(\eta_0,\theta,z) \to 0, \tag{46}$$

а при $z \in [-\Delta z;\Delta z]$ (область III)

$$\varphi(\eta_0,\theta,z) \neq 0. \tag{47}$$

Для полученных условий (45) – (47) распределение потенциала скалярного поля удобно представить в виде

$$\varphi(z,\theta,\eta) = -\ln(\alpha(\eta,\theta) + \lambda(\eta,\theta) f(z,\theta)), \tag{48}$$

причем, потенциал скалярного поля должен удовлетворять условию замкнутости нуль-струны, т.е.

$$\varphi(\eta,\theta,z)_{\theta=0} = \varphi(\eta,\theta,z)_{\theta=2\pi}. \tag{49}$$

Функции $\alpha(\eta,\theta)$ и $\lambda(\eta,\theta)$ симметричны относительно инверсии η на $-\eta$:

$$\alpha(\eta,\theta)=\alpha(-\eta,\theta),\ \lambda(\eta,\theta)=\lambda(-\eta,\theta). \tag{50}$$

Согласно (49)

$$\alpha(\eta,\theta)_{\theta=0}=\alpha(\eta,\theta)_{\theta=2\pi},\ \lambda(\eta,\theta)_{\theta=0}=\lambda(\eta,\theta)_{\theta=2\pi},\ f(\theta,z)_{\theta=0}=f(\theta,z)_{\theta=2\pi}. \tag{51}$$

Функция $\alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z,\theta)$ ограничена, т.е.

$$0<\alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z,\theta)\le 1, \tag{52}$$

а потенциал скалярного поля (48), в области (52), может принимать значения от

$$\varphi\to 0,\ \text{при}\ \alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z,\theta)=1, \tag{53}$$

и до

$$\varphi\to\infty,\ \text{при}\ \alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z,\theta)\to 0, \tag{54}$$

причем в области I, в соответствии с (45) и (53)

$$\alpha(\eta,\theta)\to 1,\ \lambda(\eta,\theta)\to 0. \tag{55}$$

Поскольку, согласно (48), потенциал скалярного поля в области II равен нулю, то при $\eta\in[-\Delta\eta;\Delta\eta]$ и любом фиксированном значении переменной $z=z_0\in(-\infty;-\Delta z)\cup(\Delta z;+\infty)$, должно быть выполнено

$$\alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z_0,\theta)\to 1. \tag{56}$$

В области III, $\varphi\ne 0$, поэтому для тех же значений $\eta\in[-\Delta\eta;\Delta\eta]$ и при $z=z_0\in[-\Delta z;\Delta z]$

$$0<\alpha(\eta,\theta)+\lambda(\eta,\theta)f(z_0,\theta)<1. \tag{57}$$

Из (56) следует, что при всех $z\in(-\infty;-\Delta z)\cup(\Delta z;+\infty)$ значения функции $f(z,\theta)$

$$f(z,\theta)\to f_0=const, \tag{58}$$

причем $f_0\ne 0$, а функции $\alpha(\eta,\theta)$ и $\lambda(\eta,\theta)$ связаны между собой

$$\lambda(\eta,\theta)=(1-\alpha(\eta,\theta))/f_0. \tag{59}$$

Подставляя (58) и (59) в (56) получаем, что в области III ($\varphi\ne 0$)

$$0<\alpha(\eta,\theta)+(1-\alpha(\eta,\theta))f(z,\theta)/f_0<1, \tag{60}$$

тогда из (54), (60) следует, что при $\varphi\to\infty$

$$\alpha(\eta,\theta)\to 0,\ f(z,\theta)\to 0. \tag{61}$$

Таким образом, в выражении для потенциала скалярного поля (48), функции $\alpha(\eta,\theta)$ и $f(z,\theta)$ ограниченные и для всех $z\in(-\infty;+\infty)$ и $\eta\in(-\infty;+\infty)$ принимают значения

$$0<\alpha(\eta,\theta)<1,\ 0<f(z,\theta)<f_0. \tag{62}$$

Поведение функции $f(z,\theta)$ при $z\in(-\infty;-\Delta z)\cup(\Delta z;+\infty)$ определяется равенством (58), при $z\to 0$, согласно (61)

$$f(z,\theta)\to 0. \tag{63}$$

Поскольку нуль-струна движущаяся по траектории (1) в каждый момент времени есть окружность, то потенциал скалярного поля (48) не зависит от θ, т.е.

$$\varphi=\varphi(\eta,z). \tag{64}$$

Для (60) равенство (34) принимает вид

$$\nu(\eta,z)=c(\eta)\varphi(\eta,z)+\omega(\eta), \tag{65}$$

откуда с учетом (7) находим, что

$$A=A(\eta,z). \tag{66}$$

Для (64), (65) и (66) уравнение (27) примет вид

$$\nu_{,z}\mu_{,\theta}=0, \tag{67}$$

откуда следует, что

$$\mu=\mu(\eta,z). \tag{68}$$

Переписывая (25) для (64), (65) находим, что

$$\left(\nu_{,z}\right)^2+\nu_{,z}\frac{B_{,z}}{B}=\frac{\chi}{2}\left(\varphi_{,z}\right). \tag{69}$$

Поскольку в (69) функции φ и ν являются функциями переменных η и z, то $B_{,z}/B$ есть функция только переменных η и z, откуда

$$B(\eta,\theta,z)=(\beta(\theta))^2\tilde{B}(\eta,z). \tag{70}$$

Так как функция B в квадратичной форме (15) стоит при $(d\theta)^2$, то всегда можно произвести преобразование системы координат $d\theta'=\beta(\eta)d\theta$, в которой зависимость B от переменной θ будет снята, поэтому в дальнейшем без ограничений общности будем считать, что

$$B=B(\eta,z). \tag{71}$$

В работе [5] был проведен анализ системы уравнений Эйнштейна для метрических функций не зависящих от переменной θ, где было показано, что единственно возможным решением для замкнутой нуль-струны коллапсирующей в плоскости $z=0$ есть

$$e^{2\nu(z,\eta)}=\frac{c_1(\eta)}{c_0}\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{c(c-1)}\exp\{2\tilde{c}_2\varphi(z,\eta)\}, \tag{72}$$

$$B(z,\eta)=\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{1-c}\exp\{\tilde{c}_3\varphi(z,\eta)\}, \tag{73}$$

$$e^{2\mu(z,\eta)}=\frac{1}{c_0^2}\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{(1-c)(1-2c)}\left(\varphi_{,\eta}\right)^2\exp\{(\tilde{c}_3+4\tilde{c}_2)\varphi(z,\eta)\}, \tag{74}$$

Из приведенного решения видно, что не при каких значениях переменных η и z указанные функции не приводят к решению Минковского.

ВЫВОДЫ

В данной работе проведен анализ системы уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны коллапсирующей в плоскости $z=0$. Отмечено, что решение Минковского является одним из частных случаев начальной квадратичной формы. Однако, показано, что, решение Минковского не может рассматриваться в качестве асимптотики для гравитационного поля порождаемого нуль-струной. Полученный результат в общем подтверждает сформулированное в работе [2] инвариантное (групповое) решение проблемы граничных условий в ОТО, основанное на классификации полей тяготения по алгебраической структуре тензора кривизны.

Список литературы

1. Эйнштейн А. Вопросы космологии и общая теория относительности : Сборник работ классиков релятивизма «Принцип относительности» / А. Эйнштейн – 1935.
2. Петров А. З. Пространства Эйнштейна / А. З. Петров. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 464 с.
3. Roshchupkin S. N. Friedmann universes and exact solutions in string cosmology / S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin // Class. Quantum. Grav. – 1995. – Vol. 12. – P. 2519-2524.
4. Леляков А. П. Распределение потенциала скалярного поля для коллапсирующей замкнутой нуль-струны / А. П. Леляков, А. С. Карпенко // Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского. Серия : Физико-математические науки. – 2011. – Т. 24 (63), № 2 – С. 3-12.
5. Леляков А. П. Решение системы уравнений Эйнштейна для «размазанной» нуль-струны, которая радиально коллапсирует в плоскости z = 0 / А. П. Леляков, А. С. Карпенко // Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского. Серия : Физико-математические науки. – 2012. – Т. 25 (64), № 1. – С. 3-16.
6. Vilenkin A. Cosmic strings and other topological defects / A. Vilenkin, E. P. S. Shellard // Cambridge Univ. Press. – 1994. – 534 p.
7. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и космология / Линде А. Д. – М. : Наука, 1990. – 275 с.
8. Peebles P. S. E. Principles of physical cosmology / P. S. E. Peebles. – Prinston University Press, 1994. – 850 p.

Леляков О. П. До питання про граничних умовах нуль-струни / О. П. Леляков, А. С. Карпенко // Вчені записки Таврійського національного університету імені В. И. Вернадського. Серія : Фізико-математичні науки. – 2013. – Т. 26 (65), № 2. – С. 79-88.

У даній роботі проведено аналіз системи рівнянь Ейнштейна для замкнутої нуль-струни, оj колапсуює в площині $z = 0$. Показано, що, рішення Мінковського не може розглядатися в якості асимптотики для гравітаційного поля породжуваного нуль-струною.

Ключові слова: нуль-струна, скалярне поле, граничні умови, простір Мінковського.

Lelyakov A. P. To the problem of boundory conditions of null string / A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko // Scientific Notes of Taurida National V. I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2013. – Vol. 26 (65), No 2. – P. 79-88.

This paper analyzes the Einstein equations for a closed null string, collapsing in a plane $z = 0$. It is shown that the solution of Minkowski can't be regarded as the asymptotic behavior of the gravitational field generated by a null string.

Keywords: null string, a scalar field, boundary conditions, Minkowski space.

References

1. A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, Ed. by Arnold Sommerfeld (Mineola, Dover Publications, NY, 1952).
2. A. Z. Petrov, *Einstein Spaces* (Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literaturyi, Moscow, 1961) [in Russia].
3. S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 2519 (1995).
4. A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, *Scientific Notes of Taurida National V. I. Vernadsky University, Ser. Physics and Mathematics Sciences* **24 (63)**, No. 2, 3 (2011).
5. A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, *Scientific Notes of Taurida National V. I. Vernadsky University, Ser. Physics and Mathematics Sciences* **25 (64)**, No. 1, 3 (2012).
6. A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge Univ. Press., 1994).
7. A. D. Linde, *Physics of Particles and Cosmology* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russia].
8. P. S. E. Peebles, *Principles of physical cosmology* (Prinston University Press, 1994).

Поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.