

УДК 535.1

## СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЫ СКРУЧЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛОКОН

*Алексеев К.Н., Баршак Е.В., Яворский М.А.*

*Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Украина  
E-mail: [maxuvorsky@yahoo.com](mailto:maxuvorsky@yahoo.com)*

Получено аналитическое решение векторного волнового уравнения для скрученных анизотропных волокон с крутильными механическими напряжениями методом теории возмущений. Установлены аналитические выражения для фундаментальных мод. Численно получены соответствующие поправки к постоянным распространения.

**Ключевые слова:** скрученное волокно, анизотропное волокно, механические напряжения.

### ВВЕДЕНИЕ

Скрученные оптические волокна являются предметом теоретического и экспериментального исследования достаточно давно. Основной интерес к таким волокнам обусловлен возможностью с помощью скрутки волокна существенно уменьшить поляризационную модовую дисперсию [1-4], которая приводит к значительному снижению как скорости передачи информации по линиям связи, так и чувствительности волоконно-оптических датчиков, основанных, например, на эффекте Фарадея. В работе [5] впервые теоретически был исследован вопрос о влиянии скрутки на распространение фундаментальных мод, как идеального одномодового волокна, так и волокон с эллиптической формой поперечного сечения.

Решение задачи в работе [5] основывалось на применении метода связанных мод к векторному волновому уравнению, однако решения были получены в скалярном приближении. Наиболее существенным, однако, является тот факт, что метод связанных мод не позволяет непосредственно получить вид мод возмущенного волокна, а позволяет только установить вид коэффициентов связи мод невозмущенного волокна, т.е. мод волокна в отсутствие скрутки и анизотропии. При этом оказывается, что в некоторых случаях знание коэффициентов связи является недостаточным для корректного анализа определенных физических процессов, протекающих в волокне. Например, для исследования распределения энергии падающего на волокно поля по модам невозмущенного волокна. Таким образом, целью данной работы является установление вида фундаментальной моды скрученного анизотропного волокна с крутильными механическими напряжениями.

## 1. МОДЕЛЬ

Рассмотрим в качестве модели скрученное анизотропное оптическое волокно с круглым поперечным сечением радиуса  $r_0$  и бесконечной оболочкой, в котором присутствуют крутильные механические напряжения.

Одним из способов учета влияния анизотропии в прямых волокнах является следующая замена в показателе преломления:  $n_{co}^2 \rightarrow n_{co}^2 = \text{diag}(n_e, n_o, n_o)$ , где  $\text{diag}$  обозначает диагональную матрицу. Поворот оси анизотропии вводится с

помощью преобразования  $\hat{\alpha} \hat{n}_{co}^2 \hat{\alpha}^T = \hat{n}_{co}^2(z)$ , где  $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos qz & -\sin qz & 0 \\ \sin qz & \cos qz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  –

матрица поворота,  $qz$  – угол поворота, индекс  $T$  означает транспонирование. Таким образом, влияние анизотропии в базисе линейных поляризаций  $(E_x, E_y, E_z)$

описывается показателем преломления вида:  $\hat{n}_{an} = \delta n^2 \begin{pmatrix} \cos 2qz & \sin 2qz & 0 \\ \sin 2qz & -\cos 2qz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

где  $\delta n^2 = (n_e^2 - n_o^2)$  – характеризует величину анизотропии.

Известно, что влияние механических напряжений описывается следующей тензорной поправкой к показателю преломления:

$\hat{n}_{tw} = qp_{44}n^4r \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$ , где  $n^2 = \frac{1}{2}(n_e^2 + n_o^2)$ ,  $q = \frac{2\pi}{H}$ ,  $H$  – шаг

скрутки,  $p_{44}$  – постоянная, характеризующая материал волокна (для кварца, например,  $p_{44} = -0.075$ ) [6]. Используются цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  совпадает с осью волокна.

Таким образом, показатель преломления рассматриваемой модели имеет вид:

$$\hat{n}^2 = n^2(r) \hat{1} + \hat{n}_{an}(z) + \hat{n}_{tw}(r, \varphi), \quad (1)$$

где эффективный показатель преломления идеального волокна описывается выражением  $n^2(r) = n^2(1 - 2\Delta f(r))$  [7],  $\Delta = \frac{(n_{co}^2 - n_{cl}^2)}{2n_{co}^2}$  – высота профиля

показателя преломления,  $n_{co}$  и  $n_{cl}$  – значения показателя преломления в сердцевине и оболочке, соответственно,  $\hat{1}$  – единичная матрица. В данной работе рассматриваются волокна со ступенчатым профилем показателя преломления:

$$f(r) = \begin{cases} 0, & R \leq 1, \\ 1, & R > 1, \end{cases} \text{ где } R = \frac{r}{r_0}.$$

Как известно [8], распространение света через диэлектрическую среду с тензорным показателем преломления описывается векторным волновым уравнением:

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 \hat{n}^2(x, y, z)\right) \vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} \left( (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \ln \varepsilon) + \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\varepsilon} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{E_j}{\varepsilon} \frac{\partial \delta \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \right), \quad (2)$$

где  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ,  $\vec{E}$  – электрическое поле,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число в вакууме,  $\lambda$  – длина волны,  $\hat{n}^2 = \varepsilon \hat{1} + \delta \hat{\varepsilon}$ .

Отметим, что уравнение (2) обладает несколькими особенностями. Первой из них является «зацепление» поперечной  $E_t$  и продольной  $E_z$  компонент электрического поля, т.е. их влияние на пространственно-временную эволюцию друг друга, что, в частности, выражается в невозможности записать замкнутую систему уравнений относительно  $E_t$ . Тем не менее, используя относительную малость продольной компоненты в сравнении с поперечной для исследуемых в работе слабонаправляющих волокон ( $\Delta \ll 1$ ,  $r_0 \gg \lambda$ ), обычно все-таки пренебрегают подобным «зацеплением» и работают только с поперечной составляющей вектора электрического поля  $E_t$  [7]. Однако, как следует из вида показателя преломления (2), для учета влияния механических напряжений на распространение света по скрученному волокну необходимо учитывать продольную компоненту  $E_z$ , несмотря на ее относительную малость. Вторая важная особенность уравнения (2) с показателем преломления (1) заключается в зависимости (1) от продольной координаты  $z$ , что приводит к отсутствию трансляционной инвариантности в волновом уравнении.

Перепишем уравнение (2) в операторном виде:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V}_{an} + \hat{V}_{tw}) |\Psi\rangle = 0, \quad (3)$$

где  $\hat{H}_0 = (\vec{\nabla}^2 + k^2 n^2(r)) \hat{1} + V_{SOI}$ ,  $V_{SOI}$  – известный оператор спин-орбитального взаимодействия [9],  $\hat{V}_{an} = k^2 \hat{n}_{an}$  описывает влияние анизотропии,

$$\hat{V}_{tw} = -\Sigma r \tilde{\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} 0.5 \sin 2\varphi r \nabla_r - \sin^2 \varphi \nabla_\varphi & -1 - \cos^2 \varphi r \nabla_r + 0.5 \sin 2\varphi \nabla_\varphi & 0 \\ 1 + \sin^2 \varphi r \nabla_r + 0.5 \sin 2\varphi \nabla_\varphi & -0.5 \sin 2\varphi r \nabla_r - \cos^2 \varphi \nabla_\varphi & 0 \\ r \sin \varphi \nabla_z & -r \cos \varphi \nabla_z & 0 \end{pmatrix} \nabla_z$$

– оператор, характеризующий влияние механических напряжений,  $\theta = |p_{44}| q n'^2$ ,

$$\Sigma = \frac{k^2 |p_{44}| q n'^4}{\tilde{\beta}}, \quad |\Psi\rangle_L \equiv \begin{pmatrix} E_x(r, \varphi, z) \\ E_y(r, \varphi, z) \\ E_z(r, \varphi, z) \end{pmatrix}.$$

Далее удобно перейти в базис циркулярных поляризаций:  $\vec{X}_C = \hat{C}\vec{X}_L$ ,

$$\hat{V}_C = \hat{C}\hat{V}_L\hat{C}^+, \text{ где матрица преобразования имеет вид: } \hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Далее мы опускаем индекс «С» и работаем только в базисе циркулярных поляризаций. Переход к новым полям:  $E_{\pm} = \tilde{E}_{\pm}(r, \varphi, z)e^{\mp iqz}$ , где  $E_{\pm} = E_x \mp iE_y$ , и координатам:  $r = r'$ ,  $z = z'$ ,  $\varphi - qz = \varphi'$  позволяет восстановить трансляционную инвариантность по  $z$  в уравнении (3), и искать его решение в факторизованном виде:  $\tilde{E}_{\pm}(r, \varphi, z) = \tilde{e}_{\pm}(r, \varphi)e^{i\beta z}$ . Отметим, что такое преобразование координат и полей фактически означает переход из лабораторной  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  в локальную  $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  систему координат, ось, например  $\vec{e}'_x$ , которой отслеживает вращение оси анизотропии.

После данных преобразований уравнение (3) принимает вид:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V}'_{an} + \hat{V}'_{tw} + \hat{V}'_z)|\Psi\rangle = \beta^2|\Psi\rangle, \quad (4)$$

где оператор  $\hat{V}'_{an} = E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  описывает влияние анизотропии,  $E = k^2 \delta n^2$  –

константа

анизотропии,

$$\hat{V}'_{tw} = -\frac{\Sigma r \tilde{\beta} i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & -e^{i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} - \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} N + M & e^{-2i\varphi}(G + F) & 0 \\ e^{2i\varphi}(G - F) & -N + M & 0 \\ i\varphi(W + U) & e^{-i\varphi}(W - U) & 0 \end{pmatrix} \text{ обусловлен}$$

механическими напряжениями,  $N = 2iq\partial_{\varphi} + 2\beta + irq\partial_r\partial_{\varphi} + r\partial_r\beta + iq\partial_{\varphi}$ ,

$$M = -2q - rq\partial_r + q\partial_{\varphi}^2 - i\beta\partial_{\varphi}, \quad G = irq\partial_r\partial_{\varphi} + r\beta\partial_r - q\partial_{\varphi}^2 + i\beta\partial_{\varphi}, \quad F = +rq\partial_r + iq\partial_{\varphi},$$

$$W = ir\sqrt{2}(-2iq^2\partial_{\varphi} - 2q\beta - q^2), \quad U = ir\sqrt{2}(-q^2\partial_{\varphi}^2 + 2qi\beta\partial_{\varphi} + \beta^2),$$

$$\hat{V}'_z = \begin{pmatrix} A + B - q^2 & 0 & 0 \\ 0 & -A + B - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \text{ – появляется в результате перехода в}$$

локальную систему координат,  $A = q^2\partial_{\varphi}^2 - 2qi\beta\partial_{\varphi} - \beta^2$ ,  $B = 2iq^2\partial_{\varphi} + 2q\beta$ ,

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{e}_+ \\ \tilde{e}_- \\ e_z \end{pmatrix}. \text{ Здесь и далее мы опускаем штрихи над новыми координатами.}$$

## 2. СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МОД

Чтобы получить структуру мод и соответствующие постоянные распространения, необходимо решить уравнение (4), имеющее вид уравнения на собственные функции и собственные значения. Из выражения (1) следует, что слагаемые, описывающие влияние анизотропии и крутильных механических напряжений, представляют собой малую добавку к показателю преломления идеального волокна. Это позволяет использовать теорию возмущений для решения уравнения (4). При этом в качестве оператора нулевого приближения выбираем оператор  $\hat{H}_0$ , тогда как  $\hat{V} = \hat{V}'_{an} + \hat{V}'_{rv} + \hat{V}'_z$  является оператором возмущения.

Мы используем вариант теории возмущения, который предполагает усреднение полного оператора  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$  по собственным функциям оператора нулевого приближения  $\hat{H}_0$  и не зависит от свойств спектра последнего. Собственные функции оператора  $\hat{H}_0$  с азимутальным числом  $l = 0$  известны и могут быть выбраны в виде право  $|+\rangle$  и лево  $|-\rangle$  циркулярно-поляризованных полей:

$$|1\rangle \equiv |+\rangle = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \\ \frac{iF'_{0r}}{\tilde{\beta}\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \equiv |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \\ \frac{iF'_{0r}}{\tilde{\beta}\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $F_0(r)$  – известная радиальная функция [9],  $F'_0 \equiv \frac{\partial F_0}{\partial r}$ ,  $\tilde{\beta}$  – известная скалярная постоянная распространения. Используя стандартное определение  $(\hat{H}')_{ij} = \langle i | \hat{H}_0 + \hat{V} - \beta^2 \hat{1} | j \rangle$ , где скалярное произведение определено как

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \Phi_x^* & \Phi_y^* & \Phi_z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{pmatrix} r dr d\varphi, \quad \text{перепишем оператор возмущения}$$

$\hat{V}$  в  $H_0$  – представлении. После непосредственных вычислений имеем матрицу возмущения:

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} -(q-\beta)^2 - \frac{\theta}{2} \left( \beta - q - 2q \frac{\beta}{\tilde{\beta}} + \frac{q^2}{\tilde{\beta}} - \frac{\beta^2}{\tilde{\beta}} \right) - \Sigma + A_0 + \tilde{\beta}^2 & E \\ E & -(q+\beta)^2 + \frac{\theta}{2} \left( \beta + q + 2q \frac{\beta}{\tilde{\beta}} + \frac{q^2}{\tilde{\beta}} + \frac{\beta^2}{\tilde{\beta}} \right) + \Sigma + A_0 + \tilde{\beta}^2 \end{pmatrix},$$

где  $A_0 = \frac{\Delta F|_{r=r_0} F'|_{r=r_0}}{\int_0^\infty F^2 r dr}$ .

Далее, чтобы получить структуру мод и соответствующие постоянные распространения, необходимо решить уравнение на собственные функции и собственные значения для матрицы возмущения  $\hat{H}'$ :

$$\hat{H}' \vec{X} = 0, \quad (7)$$

где компоненты вектора  $\vec{X}$  являются коэффициентами  $a_i^k$  в разложении искомого мод по модам (5):

$$|\Psi\rangle_k = \sum_i a_i^k |i\rangle. \quad (8)$$

Решая уравнение (7) получаем следующие выражения для фундаментальных мод скрученных анизотропных оптических волокон с механическими напряжениями:

$$|\Psi_1\rangle = (\cos \theta |+\rangle + \sin \theta |-\rangle) e^{i\beta_+ z}, \quad |\Psi_2\rangle = (\sin \theta |+\rangle - \cos \theta |-\rangle) e^{i\beta_- z}, \quad (9)$$

где  $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{E}{2q\tilde{\beta}(1 - \frac{1}{4}|p_{44}|n^2)} \approx \frac{E}{2q\tilde{\beta}}$ , где учтено, что  $\tilde{\beta} \approx k\hat{n}^2$ ,  $\frac{1}{4}|p_{44}|n^2 \ll 1$ ,

$\left| \frac{A_0}{2\tilde{\beta}} \right| \ll 2\tilde{\beta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Как видно из (9), моды в локальной системе координат

представляют собой эллиптически поляризованные поля, степень эллиптичности которых определяется параметром  $\theta$ . При этом оказывается, что с большой степенью точности можно пренебречь влиянием механических напряжений на структуру мод в сравнении с влиянием вращения оси анизотропии. Данный вывод полностью согласуется с результатами, полученными в рамках теории связанных мод [10].

В лабораторной системе координат моды имеют вид:

$$\begin{aligned} |\Psi_n\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_0(r) \left( \cos \theta e^{-iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sin \theta e^{iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) \\ |\Psi_n\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_0(r) \left( \sin \theta e^{-iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - \cos \theta e^{iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Данные выражения показывают, что моды представляют собой Блоховские волны – состоят из двух волн, распространяющихся с несколько различными фазовыми скоростями, и обладают характерным свойством периодичности:

$|\Psi_k(z+H)\rangle = |\Psi_k(z)\rangle e^{i\beta_k H}$ . Т.е. при смещении моды на шаг скрутки она переходит в себя с точностью до глобального фазового множителя.

Соответствующие поправки к постоянным распространения получены численно. Зависимость поправок от шага скрутки представлена на графике (Рис. 1).

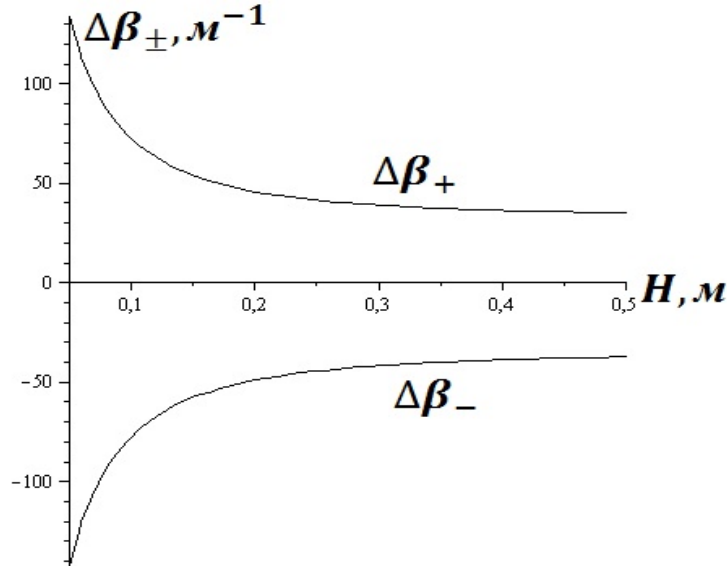


Рис. 1. Зависимость поправок к скалярной постоянной распространения  $\Delta\beta_{\pm} = \beta_{\pm} - \tilde{\beta}$  от шага скрутки ( $\Delta = 10^{-3}$ ,  $r_0 = 10\lambda$ ,  $\delta n^2 = 10^{-5}$ ).

Из графика видно, что за счет влияния анизотропии, вращения оси анизотропии и крутильных механических напряжений в волокне снимается вырождение постоянных распространения, свойственное для идеальных волокон.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе аналитически получены фундаментальные моды скрученных анизотропных оптических волокон с крутильными механическими напряжениями с помощью теории возмущений. Установлено, что моды в локальной системе координат, отслеживающей вращение оси анизотропии, являются эллиптически поляризованными, а в лабораторной системе координат имеют структуру Блоховских волн. Показано, что, благодаря влиянию анизотропии и механических напряжений, две ортогонально поляризованные фундаментальные моды распространяются с разными фазовыми скоростями.

Список литературы

1. Barlow A. J. Birefringence and polarization mode-dispersion in spun single-mode fibers / Barlow A. J., Ramskov-Hansen J. J., Payne D. N. // Appl. Opt. – 1981. – Vol. 20, No 17. – P. 2962-2968.
2. Fujii Y. Polarization coupling in twisted elliptical optical fiber / Fujii Y., Sano K. // Appl. Opt. – 1980. – Vol. 19, No 15. – P. 2602-2605.
3. Li M. J. Effect of residual stress on polarization mode dispersion of fibers made with different types of spinning / Li M. J., Chen X., Nolan D. A. // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29, No 5. – P. 448-450.
4. Wang M. Analytical theory for polarization mode dispersion of spun and twisted fibre / Wang M., Li T., Jian S. // Opt. Exp. – 2003. – Vol. 11, No 19. – P. 2403-2410.
5. Ulrich R. Polarization optics of twisted single-mode fibres / Ulrich R., Simon A. // Appl. Opt. – 1979. – Vol. 18, No 13. – P. 2241-2251.
6. Alexeyev C. N. Optical vortices in twisted optical fibres with torsional stress / Alexeyev C. N., Volyar A. V., Yavorsky M. A. // J. Opt. A : Pure Appl. Opt. – 2008. – No 10.
7. Снайдер А. Теория оптических волноводов / Снайдер А., Лав Дж. // М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.
8. Snyder W. Optical waveguide theory / Snyder W., Love J. D. // Chapman and Hall, London, New York, 1985.
9. Alexeyev C. N. Fiber Optical Vortices / Alexeyev C. N., Volyar A. V., Yavorsky M. A. // in Lasers, Optics and Electro-Optics Research Trends, ed. L. I. Chen (Nova Publishers, New York, 2007), P. 131.
10. Malykin G. B. Coupling between Elliptic Screw Polarization Modes in Single-Mode Optical Waveguides with Linear Birefringence and Regular Twist of Anisotropy Axes in the Presence of Random Axis Twist / Malykin G. B., Pozdnyakova V. I., Shereshevskii I. A. // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88, No 3.

**Алексеев К.М. Структура фундаментальной моды скрученных анизотропных волокон / Алексеев К. М., Баршак О. В., Яворський М. О. // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 101-108.**

Отримано аналітичний розв'язок векторного хвильового рівняння для скручених анизотропних волокон з крутильним механічним напруженням методом теорії обурень. Встановлені аналітичні вирази для фундаментальних мод. Чисельно отримані відповідні поправки до постійних поширення.

**Ключові слова:** скручене волокно, анизотропне волокно, механічне напруження.

**Alexeyev C. N. The structure of the fundamental mode of twisted anisotropic fibres / Alexeyev C. N., Barshak E. V., Yavorsky M. A. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2012. – Vol. 25(64), No 1. – P. 101-108.**

The analytical solution of the vector wave equation for twisted anisotropic fibers with torsional mechanical stress is obtained by making use of the perturbation theory. Analytical expressions for fundamental modes are established. The corresponding corrections to the propagation constants have been numerically found.

**Keywords:** twisted fiber, anisotropic fiber, mechanical stress.

*Поступила в редакцію 15.04.2012 г.*