

УДК 535.2:548.1.022/.024

## ТОНКАЯ СТРУКТУРА ВНЕОСЕВОГО СИНГУЛЯРНОГО ПУЧКА В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

*Фадеева Т.А.*

*Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Украина  
E-mail: [tatyana.fadeyeva@gmail.com](mailto:tatyana.fadeyeva@gmail.com)*

На основании решения параксиального волнового уравнения проанализирована тонкая структура лазерного пучка, переносящего единичный оптический вихрь, распространяющегося в неограниченном одноосном кристалле под небольшими углами к его оси. Рассмотрены преобразования поляризационных особенностей структуры поля данного пучка при изменении угла распространения пучка. Показано, что структурные искажения сингулярного пучка возникают даже при очень малых отклонениях его оси от оптической оси кристалла и связаны с деформацией, как осевого вихря, так и кольцевых дислокаций циркулярно поляризованных компонент поля. Полученные результаты позволяют учитывать возможные искажения структуры сингулярного пучка в устройствах для захвата, транспортировки и взаимной ориентации микрочастиц.

**Ключевые слова:** оптический вихрь, одноосный кристалл, поляризационная сингулярность.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес к сингулярной оптике вызывают исследования, связанные с распространением и преобразованием структуры световых пучков в оптических кристаллах [1-4]. Это вызвано тем, что анизотропная среда позволяет формировать в пучке не только сетки фазовых и поляризационных сингулярностей, но также управлять их формой и взаимным положением [2]. Известно [1,2], что структура циркулярно поляризованного гауссова пучка, распространяющегося вдоль оптической оси кристалла, изменяется таким образом, что в его ортогонально поляризованной компоненте на оси возникает оптический вихрь с двойным топологическим зарядом. В то же время, эксперимент показывает, что обычный гауссов пучок, распространяющийся под большим углом к оптической оси, не содержит каких либо фазовых сингулярностей в обеих поляризационных компонентах, тогда как при небольших отклонениях оси пучка от оси кристалла оптические вихри могут возникать даже в компоненте пучка с исходной поляризацией [5]. Еще более интригующим является поведение сингулярных пучков, переносящих оптические вихри. Недавно, в работе [6] было экспериментально показано что, можно так подобрать параметры вне осевого сингулярного пучка с единичным оптическим вихрем на входе в кристалл, что, покидая кристалл, пучок потеряет этот оптический вихрь [6]. В настоящей работе мы фокусируем внимание на процессах, приводящих к структурным преобразованиям сингулярного пучка при малых отклонениях его оси от оптической оси кристалла.

Целью работы явилось исследование преобразований поляризационных сингулярностей в параксиальном циркулярно поляризованном пучке, переносящем оптический вихрь с единичным топологическим зарядом.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАКЛОННОГО ПУЧКА В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

Рассмотрим циркулярно поляризованный гауссов пучок, переносящий единичный оптический вихрь. Выберем знак топологического заряда вихря противоположным знаком циркуляции круговой поляризации в исходном пучке. Обозначим угол между осью кристалла и осью исходного пучка через  $\alpha_{in}$  (см. Рис.1, а). Одноосный кристалл ориентируем таким образом, чтобы тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$  принял диагональный вид  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon < \epsilon_{zz}$  и  $\epsilon_{zz} = \epsilon_3$ . Оптическая ось кристалла направлена вдоль оси  $z$ .

Параксиальное волновое уравнение для комплексных амплитуд  $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(x, y, z)$  поперечных компонент пучка в одноосном кристалле удобно записать в виде [7]

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik_0 \partial_z) \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_3} \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}), \quad (1)$$

где  $\Delta \epsilon = \epsilon_3 - \epsilon$ ,  $k_0 = n_0 k_0$ ,  $k_0$  - волновое число в вакууме,  $n_0 = \sqrt{\epsilon}$  - показатель преломления обыкновенной волны.

Потребуем, чтобы в поперечном сечении кристалла  $z = 0$  сингулярный пучок имел только правую циркулярно поляризованную компоненту ( $\tilde{E}_{-}(x, y, z = 0) = 0$ ), а сердцевина оптического вихря в этой компоненте располагалась в начале координат  $x = y = 0$ . Тогда частное решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\tilde{E}_{+} = \left\{ \frac{x - i(y - \alpha_o z)}{\sigma_o} \tilde{\Psi}_o + \frac{x - i(y - \alpha_e z)}{\sigma_e} \tilde{\Psi}_e \right\}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{-} = & -[x + iy_o] \left[ \frac{\tilde{\Psi}_o}{\sigma_o} - \frac{\tilde{\Psi}_e}{\sigma_e} \right] + \\ & + \alpha_o z_o \left( \frac{x + iy_o}{r'} \right)^2 \left[ \frac{\rho^2}{r'^2} (\sigma_o \tilde{\Psi}_o - \sigma_e \tilde{\Psi}_e) + (\tilde{\Psi}_o - \tilde{\Psi}_e) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tilde{\Psi}_o = \exp\left\{-\frac{r'^2}{\rho^2 \sigma_o}\right\} / (\sigma_o) f(\alpha_o)$ ,  $\tilde{\Psi}_e = \exp\left\{-\frac{r'^2}{\rho^2 \sigma_e}\right\} / (\sigma_e) f(\alpha_e)$ ,

$f(\alpha_o) = \exp\left(\frac{-\alpha_o^2 z_o k_o}{2}\right)$ ,  $y_o = y + i\alpha_o z_o$ ,  $r'^2 = x^2 + y_o^2$ ,  $z_o = k_o \rho^2 / 2$ ,

$z_e = k_e \rho^2 / 2$ ,  $\rho$  - радиус перетяжки пучка в плоскости  $z = 0$ ,  $k_e = k_0 n_e$ ,  $n_e = \epsilon_3 / \sqrt{\epsilon}$ ,  $\sigma_o = 1 - iz/z_o$ ,  $\sigma_e = 1 - iz/z_e$ ,  $\alpha_o$  - угол наклона оси обыкновенного пучка,  $\alpha_e$  - угол наклона необыкновенного пучка к оси  $z$  и из закона Снеллиуса в параксиальном приближении  $\alpha_o n_o = \alpha_e n_e$ .

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ПУЧКЕ

Полученное решение показывает, что в одноосном кристалле каждая компонента поля представляет собой суперпозицию двух индивидуальных сингулярных пучков - обыкновенного и необыкновенного, с волновыми числами  $k_o$  и  $k_e$ , соответственно, переносящих оптические вихри с единичными топологическими зарядами равными  $-1$ . Эти вихри распространяются вдоль различных траекторий, задаваемых уравнениями:  $x = 0, y = \alpha_o z$  и  $x = 0, y = \alpha_e z$ . Суперпозиция индивидуальных пучков приводит к сложному распределению фазовых сингулярностей. Рис. 1, а иллюстрирует два возможных распределения интенсивности поля (2) после кристалла  $\text{LiNbO}_3$  длиной  $l = 2 \text{ см}$  с показателями преломления  $n_o = 2.3$  и  $n_e = 2.2$  при малых углах  $\alpha_o = 0.45^\circ$  (сверху)  $\alpha_e = 0.68^\circ$  (снизу). Структура сингулярностей в наклонном пучке зависит от радиуса перетяжки исходного пучка  $\rho$  в плоскости  $z = 0$  на входной грани кристалла и угла падения пучка  $\alpha_{in}$ , так что  $n_{in} \alpha_{in} = n_o \alpha_o$ ,  $n_{in}$  - показатель преломления среды перед кристаллом. Характерное взаимное расположение кольцевых дислокаций и оптического вихря приведено на Рис.1, а. Если радиус перетяжки относительно мал (например,  $\rho = 10 \mu\text{м}$ ), то кольцевые дислокации с центром в начале координат  $x = y = 0$  отчетливо проступают в виде темных концентрических колец (верхний Рисунок). Оптический вихрь смещен относительно центра. При приближении кольцевой дислокации к вихрю начинаются дислокационные реакции [8]. Топологическая структура пучка резко меняется. Радиус кольца дислокации можно легко оценить, используя простую модель распространения плоских волн в кристалле [9]. Дислокации соответствует геометрическое место точек, куда обыкновенная и необыкновенная волна приходят с задержкой по фазе:  $k_o(n_e - n_o)r^2 / l = (2n - 1/2)\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Откуда видно, что радиус дислокации не зависит от радиуса перетяжки пучка. Для относительно большого значения радиуса перетяжки (например  $\rho = 500 \mu\text{м}$ ) кольцевые дислокации явно не присутствуют в распределении интенсивности пучка, хотя их геометрическое положение не изменилось. Их вклад в преобразование топологической структуры пучка остается таким же как и для малых радиусов перетяжки. Нижний Рисунок на Рис. 1, а иллюстрирует распределение интенсивности в случае, когда «виртуальная» кольцевая дислокация проходит через сердцевину вихря. В результате дислокационных реакций рождается несколько дополнительных вихрей с различными знаками топологических зарядов. Интенсивности обеих циркулярно поляризованных компонент пучка изменяются. Их величину можно оценить интегралом  $I \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left( |\tilde{E}_+|^2 + |\tilde{E}_-|^2 \right) = I_+ + I_-$ . На Рис. 1, б, в приведены зависимости интенсивности  $I_+(\alpha_o)$  и  $I_-(\alpha_o)$  циркулярно

поляризованных компонент в зависимости от угла  $\alpha_o$  для двух различных радиусов  $\rho$  перетяжки пучка. Осцилляции кривых связаны с прохождением кольцевых дислокаций через сердцевину оптического вихря. Из поведения кривых видно, что амплитуда осцилляций жестко связана с радиусом перетяжки пучка. Вообще говоря, приведенная картина является очень грубым приближением. Детали этого процесса можно описать на основе тонкой структуры преобразования поляризационных сингулярностей [10].

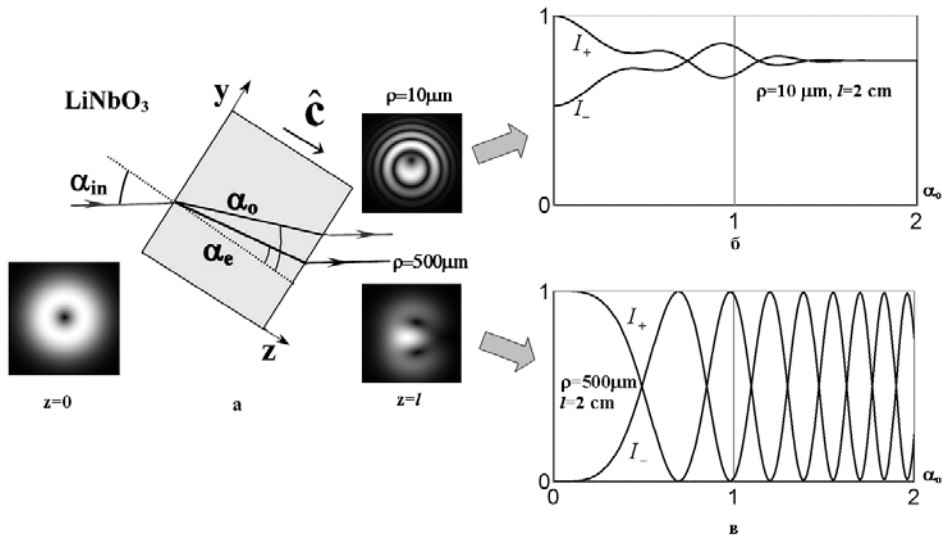


Рис. 1. Распределение интенсивности сингулярного пучка на входе и выходе из кристалла LiNbO<sub>3</sub> для различных значений радиуса перетяжки  $\rho$  ( $\hat{c}$  - единичный вектор оптической оси) (а) и изменение интенсивности циркулярно поляризованных компонент поля после кристалла (б, в) в зависимости от угла  $\alpha_o$ .

Известно, что оптическому вихрю в распределении поляризации поля соответствует поляризационная сингулярность, получившая название С-точка, т.е. точка поля, в которой одна из циркулярно поляризованных компонент обращается в ноль. Кольцевой дислокации будет соответствовать множество С-точек, расположенных на замкнутой кривой – С-линии. С-точки окружает участок векторного поля с характерным узором направлений большой полуоси эллипса поляризации. Этот узор может принимать три характерных очертания: звезда с топологическим индексом  $m = -1/2$ , монстр и лимон с  $m = +1/2$  [10].

Рассмотрим преобразование поляризационных сингулярностей, возникающее при изменении угла  $\alpha_o$ , на примере пучка с относительно большим радиусом перетяжки  $\rho = 500 \mu\text{m}$  (см. Рис. 2).

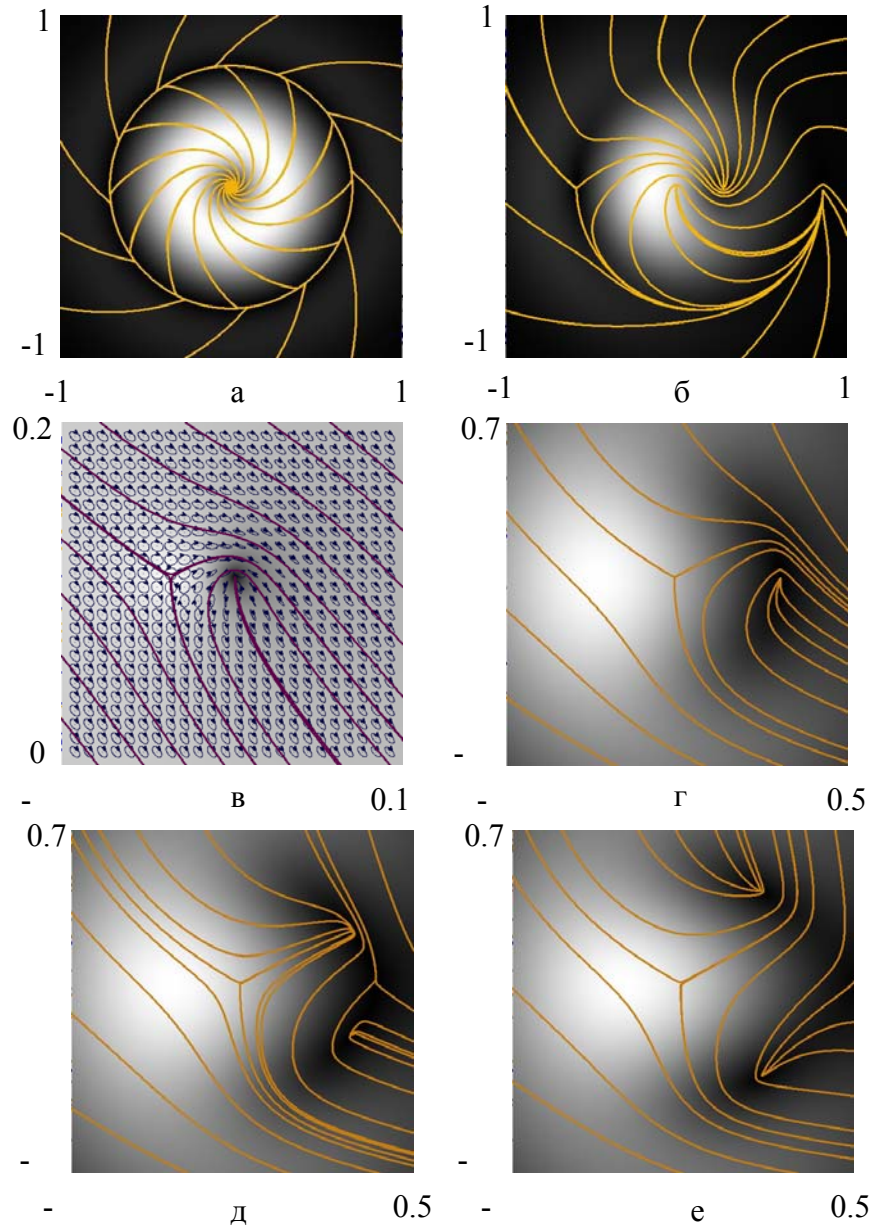


Рис. 2. Линии, касательные к большой полуоси эллипса поляризации, на фоне распределения интенсивности (а, б, г-е) в наклонном пучке Лагерра-Гаусса прошедшем кристалл  $\text{LiNbO}_3$  длиной 2 см: а)  $\alpha_o = 0^\circ$ , б)  $\alpha_o = 0.006^\circ$ , в)  $\alpha_o = 0.3^\circ$ , г)  $\alpha_o = 0.684^\circ$  б д)  $\alpha_o = 0.686^\circ$ , е)  $\alpha_o = 0.688^\circ$ . На Рис. (в) приведена карта эллипсов поляризации на фоне распределения эллиптичности, черная точка соответствует лево циркулярной поляризации, а белая – право циркулярной. Поперечные размеры приведены в мм.

Когда сингулярный пучок распространяется строго вдоль оптической оси кристалла  $\alpha_o = 0$ , в его центре возникает вырожденная поляризационная сингулярность с топологическим индексом  $m = +1$ , образованная спиральными интегральными кривыми [10], которые приведены на Рис. 2, а. Спирали обрываются на С-линии (с топологическим индексом  $m = 0$ ), которая охватывает вырожденную сингулярность. Малое отклонение оси пучка от оси кристалла на угол  $\alpha_o = 0,006^\circ$  приводит к расщеплению, как вырожденной сингулярности, так и С-линии (Рис. 2, б). Вырожденная С-точка, в свою очередь, расщепляется на два лимона, а С-линия – на звезду и лимон. При этом полный топологический индекс всего пучка не изменяется. Увеличение угла вызывает быстрое вытеснение двух лимонов (справа на Рис. 2, б) на периферию. Прежде чем исчезнуть из поля наблюдения структура сингулярностей деформируется – лимон превращается в монстр. Смены топологического индекса не происходит. Вблизи центра пучка остаются две сингулярности – звезда и лимон (Рис. 2, в), соответствующие в обоих циркулярно поляризованных компонентах оптическим вихрям с отрицательным топологическим зарядом  $-1$ . Дальнейшее увеличение угла до значения  $\alpha_o = 0.684^\circ$  сопряжено с вытеснением лимона из центра пучка и преобразованию его структуры в монстр (Рис. 2, г). В тоже время, вблизи лимона наблюдается сгущение интегральных кривых, указывающее на рождение новой пары поляризационных сингулярностей. Момент рождения пары поляризационных сингулярностей иллюстрирует Рис. 2, д. Увеличение угла вызывает вытеснение прежней пары на периферию (слева на Рис. 2, е), и процесс преобразования сингулярностей повторяется вновь.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, было показано, что изменение угла наклона оси сингулярного пучка относительно оптической оси кристалла сопряжено с резкими осцилляциями полной интенсивности с циркулярно поляризованных компонентах поля. Эти осцилляции связаны с процессами переменного рождения и уничтожения пары поляризационных сингулярностей с противоположными знаками топологических индексов. Именно благодаря этим структурным преобразованиям топологические заряды в обеих поляризационных компонентах поля имеют одинаковые знаки при двулучепреломлении пучка в кристалле.

## Список литературы

1. Воляр А. В. Генерация сингулярных пучков в одноосных кристаллах / Воляр А. В., Фадеева Т. А. // Оптика и Спектроскопия. – 2003. – Т. 94, № 2. – С. 260-270.
2. Egorov Yu. A. The fine structure of singular beams in crystals: colours and polarization / Egorov Yu. A., Fadeyeva T. A., Volyar A. V. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2004. – Vol. 6. – P. S217–S228.
3. Volyar A. V. Singular beams in Uniaxial Crystals / Volyar A. V. // Ukrainian Journal of Physics. – 2004. – Vol. 49, No 4. – P. 400-408.
4. Ciattoni A. Circularly polarized and vortex generation in uniaxial media / Ciattoni A., Cincotti G., Palma C. // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20, No 1. – P. 163-171.

5. Volyar, A. Generation of single-charge optical vortices with an uniaxial crystal / Volyar A., Shvedov V., Fadeyeva T. et al. // *Opt. Express.* – 2006. – Vol. 14. – P. 3724-3729.
6. Dennis M. Polarization singularities from unfolding an optical vortex through a birefringent crystal / Dennis M., Flossman F., Schwarz U. T., Maier M. // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95. – P. 253901-1 - 253901-5.
7. Volyar A. V. Laguerre-Gaussian beams in uniaxial crystals / Volyar A. V., Fadeyeva T. A. // *Ukr. J. Phys. Opt.* – 2004. – Vol. 5. – P. 81-86.
8. Berry M. V. Topological events on wave dislocation lines: birth and death of loops, and reconnection / Berry M. V. Dennis M. R. // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2007. – Vol. 40. – P. 65-74.
9. Борн М. Основы оптики / Борн М., Вольф Э. – М: Наука, 1970. – 856 с.
10. Nye J. F. Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations / Nye J. F. // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1983. – Vol. 387. – P. 105-132.

**Фадеева Т. А. Тонка структура позаосьового сингулярного пучка в одноосному кристалі / Фадеева Т. А.** // *Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки.* – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 80-86.

На підставі вирішення параксіального хвильового рівняння проаналізована тонка структура лазерного пучка, що переносить одиничний оптичний вихор, що поширюється в необмеженому одноосному кристалі під невеликими кутами до його осі. Розглянуті перетворення поляризаційних особливостей структури поля даного пучка при зміні кута поширення пучка. Показано, що структурні спотворення сингулярного пучка виникають навіть при дуже малих відхиленнях його осі від оптичної осі кристала і пов'язані з деформацією, як осьового вихору, так і кільцевих дислокацій циркулярно поляризованих компонент поля. Отримані результати дозволяють враховувати можливі спотворення структури сингулярного пучка в пристроях для захвату, транспортування і взаємної орієнтації мікрочасток.

**Ключові слова:** оптичний вихор, одноосний кристал, поляризаційна сингулярність.

**Fadeyeva T. A. A fine structure of the off-axis singular beam in a uniaxial crystal / Fadeyeva T. A.** // *Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University.* – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2012. – Vol. 25(64), No 1. – P. 80-86.

We analyze a fine structure of a solution to the paraxial wave equation in the form of a vortex-bearing beam transmitting at a small angle to the optical axis of an unbounded uniaxial crystal. We consider transformations of polarization singularities in the beam field via variations of the beam inclination angle. We revealed that even very small deviations of the beam axis relative to the crystal axis can entail essential transformations of the field structure, in particular, deformations of both the axial vortex and ring dislocations of circularly polarized field components. The results obtained enable one to take into account possible distortions of a vortex-beam structure in the devices for trapping, transportation and mutual orientation of microparticles.

**Keywords:** optical vortex, uniaxial crystal, polarization singularity.

*Поступила в редакцію 23.04.2012 г.*