Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 98–109.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

О дифференцируемости по верхнему пределу неопределённого интеграла Петтиса

В данной работе исследуются две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений вещественного отрезка в пространства Фреше: почти всюду слабая интегральная ограниченность и σ-компактная измеримость. Получено достаточное условие дифференцируемости неопределённых интегралов Петтиса в терминах почти всюду слабой интегральной ограниченности, а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости.

Ключевые слова: интеграл Петтиса, сильно измеримое отображение, пространство Фреше, почти всюду слабая интегральная ограниченность, σ-компактная измеримость, компактная субдифференцируемость.

Введение

Существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [1, 2, 3]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задачах функционального анализа и его приложений [2, 3, 4].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [2, 3, 4]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [1] — [4], которая активно развивается и в современных исследованиях [5] — [8].

Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера.

Так, например, всякий неопределённый интеграл Бохнера $F: I = [a;b] \to X$ (X — пространство Фреше) $F(x) = (B)\int\limits_a^x f(t)dt$ ($a \leqslant x \leqslant b$) сохраняет свойство дифференцируемости почти всюду на $[a;b]$. Рассмотрим неопределённые интегралы Петтиса, то есть отображения $F: I = [a;b] \to X$ (X — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

причём f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом подмножестве $e \subset I$. Как показано в ([9], замечание к теореме 1), для произвольного бесконечномерного банахова пространства X существует такое сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f: I \to X$, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt\right\| = \infty \quad (\forall t \in I).$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

С этой целью в первых двух пунктах настоящей работы мы вводим две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений — *почти всюду слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* (C^σ_{mes}). На базе предложенных понятий в пункте 3 нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (1) в терминах почти всюду слабой интегральной ограниченности (теорема 1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 3).

Будем обозначать через mes классическую меру Лебега на вещественной прямой, Σ — набор измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$; X^* — пространство линейных непрерывных функционалов над X, а через $L(X;Y)$ — линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

1. Интегральная ограниченность интегрируемых по Петтису отображений

В данном пункте мы вводим одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — почти всюду слабую интегральную ограниченность.

Определение 1. Будем называть отображение $f: I = [a;b] \to X$ из (1) *слабо интегрально ограниченным в точке* $x \in I$ ($f \in B^w_{int}(x)$), если для любой системы интервалов $I_n = (\alpha_n;\beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} = 0, \quad \text{где } F \text{ имеет вид (1),} \tag{2}$$

где $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\frac{mes(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)}=0. \tag{3}$$

Если $A\subset I$ и $f\in B^w_{int}(x)$ для почти всех $x\in A$, то будем называть отображение f *почти всюду слабо интегрально ограниченным на* A. Примем обозначение: $f\in B^w_{int}(A)$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $B^w_{int}(I)$.

Предложение 1. (i) *Класс $B^w_{int}(A)$ является линейным;*
(ii) *$f\in B^w_{int}(A)\Longleftrightarrow f\in B^w_{int}(C)\ \forall C\subset A$;*
(iii) *Пусть $f:I\to X$ $f\in B^w_{int}(I)$, $A\in L(X;Y)$. Тогда отображение $Af:I\to X$ принадлежит классу $B^w_{int}(I)$.*

Доказательство. Данное утверждение легко вытекает из соответствующих свойств интеграла Петтиса (см., например [1], стр. 91 – 92). Отметим лишь, что утверждение (ii) справедливо в силу предположения об интегрируемости по Петтису всякого отображения f из (1) на произвольном измеримом подмножестве $A\subset I$. □

Проверим два достаточных условия интегральной ограниченности. Будем говорить, что f локально ограничено в точке $x\in I$, т.е.

$$\sup_{A:\ mes(A)=0}\|f((\alpha;\beta)\backslash A)\|=\operatorname{ess\,sup}\|f((\alpha;\beta))\|=C<\infty \text{ для нек. } (\alpha;\beta)\supset x. \tag{4}$$

Предложение 2. (i) *если f локально ограничено в т. $x\in I$, то $f\in B^w_{int}(x)$;*
(ii) *если f локально ограничено $\forall\ x\in A\subset I$, то $f\in B^w_{int}(A)$.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, удовлетворяющих (3). В силу (4) имеем

$$\left\|\frac{F(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)}\right\|=\left\|\frac{(P)\int\limits_{I_n\bigcap E_n}f(t)dt}{mes(I_n)}\right\|\leqslant C\cdot\frac{mes(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)}\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty,$$

откуда и вытекают доказываемые утверждения. □

Предложение 3. *Пусть X — банахово пространство. Тогда всякое интегрируемое по Бохнеру отображение $f:I=[a;b]\to X$ удовлетворяет условию $f\in B^w_{int}(I)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F:I=[a;b]\to X$:

$$F(x)=(B)\int\limits_a^x f(t)dt,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Пусть x — точка Лебега отображения F. Тогда по следствию 2 из теоремы 3.8.5 [1], для произвольной системы интервалов $I_n = (\alpha_n; \beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$ верно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{mes(I_n)} \cdot \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0,$$

откуда вытекает, что для произвольной системы измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих (3), верно (2). Действительно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{F(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} \right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{F(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} - f(x) \cdot \frac{mes(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{1}{mes(I_n)} \cdot \int\limits_{I_n \bigcap E_n} (f(t) - f(x))\, dt \right\| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{mes(I_n)} \cdot \int\limits_{I_n \bigcap E_n} \|f(t) - f(x)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{mes(I_n)} \cdot \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mes(I_n)} \cdot \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0.$$

Остаётся лишь заметить то, что почти все точки I являются точками Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f (см. [1], теорема 3.8.5). $\square$

Замечание 3. Из доказательства предыдущего утверждения следует, что если x — точка Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f, то $f \in B^w_{int}(x)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно привести функцию $F : [-1; 1] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int\limits_{-1}^{x} sign(t) dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега (для вещественных функций интеграл Бохнера совпадает с интегралом Лебега), а $sign(x) = 1$ при $x > 0$, $sign(x) = -1$ при $x < 0$, $sign(x) = 0$ при $x = 0$.

Легко проверить, что $x = 0$ не является точкой Лебега отображения (5). Тем не менее, согласно предложению 2 $f \in B^w_{int}(0)$ ввиду ограниченности f.

Замечание 4. Отметим, что отображения $f \in B^w_{int}(I)$ могут быть не интегрируемыми по Бохнеру. Это подтверждает пример 1 ниже.

Замечание 5. Неопределённый интеграл Петтиса отображения $f \in B^w_{int}(I)$ может быть нигде не дифференцируемым на I, если f не является сильно измеримым. В качестве примера рассмотрим отображение $f : I = [0; 1] \to L_\infty[0; 1]$: $f(t) = \chi_{[t;1]}(\cdot)$. В [5] (см. пример после теоремы 3.4, а также теорему 4.4) показано, что f интегрируемо по Петтису, причём $\left((P) \int\limits_A f(t) dt \right)(x) = mes\left(A \bigcap [0; x]\right)$ $\forall x \in I$, $\forall A \in \Sigma$, откуда вытекает $f \in B^w_{int}(I)$ (множества I_n и E_n удовлетворяют (3), $x \in [0;1]$):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{(P) \int\limits_{I_n \bigcap E_n} f(t)dt}{mes(I_n)} \right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{ess\,sup} \left| \frac{mes(I_n \bigcap E_n \bigcap [0;x])}{mes(I_n)} \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{mes(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} = 0.$$

При этом, в ([5], пример после теоремы 3.4) доказано, что неопределённый интеграл Петтиса отображения f нигде не имеет обычной производной.

2. σ-компактная измеримость интегрируемых по Петтису отображений

Введём ещё одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — σ-компактную измеримость.

Определение 2. Будем говорить, что отображение $f : I = [a;b] \to X$ из (1) *σ-компактно измеримо* ($f \in C^{\sigma}_{mes}(I)$), если существует такое разбиение I на измеримые по Лебегу подмножества $\{e_N\}_{N=0}^{\infty}$, что

$$f(e_N) \subset U_N, \ U_N \text{ — компакт в } E \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{6}$$

где $I = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} e_N$, $mes(e_0) = 0$, $e_{N_1} \subseteq e_{N_2}$ $\forall N_1, \ N_2 \in \mathbb{N}$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $C^{\sigma}_{mes}(I)$.

Предложение 4. (i) *Класс $C^{\sigma}_{mes}(I)$ является линейным;*

(ii) *$f \in C^{\sigma}_{mes}(I) \Longleftrightarrow f \in C^{\sigma}_{mes}(I')\ \forall I' \subset I$;*

(iii) *Пусть $f : I \to X$, $f \in C^{\sigma}_{mes}(I)$, $A \in L(X;Y)$. Тогда отображение $Af : I \to X$ принадлежит классу $C^{\sigma}_{mes}(I)$.*

Предложение 5. *Всякое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : I = [a;b] \to \to X$ удовлетворяет условию $f \in C^{\sigma}_{mes}(I)$.*

Доказательство. По теореме 2 из [10], для всякого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : I \to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что $\int\limits_I \|f(t)\|_C dt < \infty$, где $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского, порождённый множеством C. Если положить

$$e_N := \{t \in [a;b] \mid \|f(t)\|_C \leqslant N\}, \quad U_N = N \cdot C \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

то f будет удовлетворять условию (6). □

Возникает естественный вопрос: не является ли всякое интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$, удовлетворяющее условию $f \in C^{\sigma}_{mes}(I)$, интегрируемым по Бохнера? На этот вопрос можно дать отрицательный ответ даже в случае гильбертова пространства X. В качестве примера мы рассмотрим следующее отображение из работы ([11], пример 2.1).

Пример 1. Пусть $X = \ell_2$ — вещественное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в E. Рассмотрим отображение $F : [0;1] \to X$:

$$\begin{cases} F(0) = 0\ ; \quad F(\frac{n}{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N})\ ; \quad F(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}\ ; \\ F \text{ линейно на сегментах } \left[\frac{n-1}{n};\ \frac{n}{n+1}\right] \quad (n \in \mathbb{N})\ . \end{cases}$$

1). Ясно, что F дифференцируемо п.в. на I. Покажем, что оно слабо абсолютно непрерывно. Для этого рассмотрим произвольный функционал $\ell \in \ell_2^* \cong \ell_2$, а также функцию $f = \ell[F]$, $f : [0;1] \to \mathbb{R}$. Поскольку $\ell \in \ell_2$, то $\exists\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell_2$:

$$\ell(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \quad \forall\ \beta = (\beta_1, \beta_2, ...) \in \ell_2$$

Нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\left(\forall N \in \mathbb{N},\ mes\left(\bigcup_{k=1}^{N} [a_k; b_k]\right) < \delta\right) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} |\ f(b_k) - f(a_k)\ | < \varepsilon. \tag{7}$$

Заметим, что $f(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$. Этот ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\alpha_k}{k}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} < \infty$$

по неравенству Коши-Буняковского.

Выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[\frac{N_0}{N_0+1};\ 1\right]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Отрезок же $\left[0; \frac{N_0}{N_0+1}\right]$ разбивается на N_0 отрезков, на каждом из которых функция f линейна. Следовательно, f абсолютно непрерывна на $[0; \frac{N_0}{N_0+1}]$, т.е. $\exists\ \delta > 0$: $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[0;\ \frac{N_0}{N_0+1}\right]$,

$$mes\left(\bigcup_{k=1}^{m} [a_k; b_k]\right) < \delta\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) вытекает неравенство (7).

2). Итак, отображение F слабо абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо. Следовательно, F — неопределённый интеграл Петтиса. Действительно,

$$\ell(F(x)-F(0)) = \ell(F(x))-\ell(F(0)) = \left(\int\limits_0^x (\ell(F(t)))'dt\right) = \int\limits_0^x \ell(F'(t))dt \, \forall x \in [0;1] \quad \forall \ell \in X^*,$$

откуда и вытекает, что $F(x) = F(0) + (P)\int\limits_0^x F'(t)dt \quad \forall x \in [0;1]$.

Если положить $e_N := [0; \frac{N}{N+1}]$, то F' будет удовлетворять условию (6) с компактами $U_N := \bigcup\limits_{n=1}^{N} \{\frac{x_n}{n}\}$, т.е. $F' \in C^{\sigma}_{mes}(I)$. Однако, как показано в ([11], пример 2.1), F не имеет сильной ограниченной вариации и поэтому не является неопределённым интегралом Бохнера.

3) Отметим также, что по предложению 2, $F' \in B^{w}_{int}(I)$, так как F' непрерывно (и, следовательно, локально ограничено) п.в. на I в силу кусочной линейности F.

3. Дифференцируемость неопределённого интеграла Петтиса для отображений в пространства Фреше

В данном пункте работы мы докажем основные результаты работы — условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (1):

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{10}$$

в терминах предложенных в первых двух пунктах характеристик. Если интегральная ограниченность f приводит к достаточному условию дифференцируемости неопределённого интеграла Петтиса по верхнему пределу (теорема 1), то σ-компактная измеримость приводит к необходимому условию (теорема 3).

В доказательстве теоремы 1 существенно используется нами ранее понятие компактного субдифференциала (см. [11] — [13]), которое мы вначале напомним. Обозначим через $U(0)$ произвольную замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) X.

Определение 3. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП X, $B \subset X$. Множество $B = \bigcap\limits_{\delta\to+0} B_\delta$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$: $B = K - \lim\limits_{\delta\to+0} B_\delta$, если: $\forall U = U(0) \subset X \; \exists \delta_U > 0 : \; (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$.

Из предыдущего определения вытекает замкнутость и выпуклость множества B. Далее будем обозначать через $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, $\overline{co}A$ — выпуклую замкнутую оболочку множества A и рассматривать отображения $F : I \to E$.

Определение 4. Пусть $x \in I,\ \delta > 0$. *Частный K-субдифференциал* отображения F в точке x_0, отвечающий данному $\delta > 0$, есть замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \quad \middle| \quad 0 <| h |< \delta \right\} .$$

Определение 5. Отображение $F : I \to X$ называется *компактно субдифференцируемым* или *K-субдифференцируемым* в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов $\partial_K F(x_0) = K - \lim\limits_{\delta \to +0} \partial_K F(x_0, \delta)$. Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ называется *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причём $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как показано в [11] — [13], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

Следующая теорема является первым основным результатом работы.

Теорема 1. *Если в* (10) $f \in B^w_{int}(I)$, *то* F *дифференцируемо почти всюду на* I, *причём справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x) \text{ п.в. на } I. \tag{11}$$

Для доказательства нам потребуется следующий вспомогательный результат, полученный ранее в ([14], Theorem 1(ii)).

Теорема 2. *Пусть отображение* f *из* (10) *сильно измеримо. Тогда для произвольного числа* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ *такое, что* $mes(I \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ *и множество*

$$X_F^\varepsilon := \left\{ \frac{F(E)}{mes(E)} \ \middle| \ E \subset E_\varepsilon,\ mes(E) > 0,\ E \in \Sigma \right\} \tag{12}$$

относительно компактно в X.

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. 1) Покажем К-субдифференцируемость отображения F. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого n выберем соответствующее множество из (12) (мы считаем, что $E_{\varepsilon_n} \subset [a;\ b]$). Легко видеть, что множество $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_{\varepsilon_n})$ имеет нулевую меру Лебега. Поэтому почти все точки $x \in [a; b]$ принадлежат множеству E_{ε_n} при каком-либо $n \in \mathbb{N}$. Более того, согласно теореме о точках внешней плотности (см. [15], теорема 2, стр. 68), почти все точки каждого из множеств E_{ε_n} будут точками внешней плотности E_{ε_n}. Следовательно, для некоторого множества $e \subset [a; b]$ нулевой меры всякая точка $x \in [a; b] \backslash e$ является точкой внешней плотности какого-либо множества E_{ε_n}, т.е. для произвольной системы интервалов $\{I_m=(\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x $\exists\ n\in\mathbb{N}$ и E_{ε_n} из (12) такие, что:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{mes(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}=0\qquad(\alpha_m\leqslant x\leqslant\beta_m,\quad\alpha_m\neq\beta_m)\,.\tag{13}$$

Далее,

$$\frac{(P)\int\limits_{I_m}f(t)dt}{mes(I_m)}=\frac{F(I_m)}{mes(I_m)}=\frac{F(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}\cdot\frac{F(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}+\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}.\tag{14}$$

Отношение $\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}\longrightarrow 0$ при $m\longrightarrow\infty$ в силу $f\in B^w_{int}(I)$. Поэтому второе слагаемое в равенстве (14) стремится к нулю при $m\to\infty$ в силу (13). Из (13) также вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{mes(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}=1.\tag{15}$$

В силу (13) — (15), а также относительной компактности множеств $X_F^{1/n}\subset X$ (см. теорему 2) вытекает существование частичного предела любой последовательности

$$\frac{F(I_m)}{mes(I_m)}\quad\text{при } m\to\infty,$$

а также относительная компактность множества всех таких частичных пределов. Следовательно, F K-субдифференцируемо в точке x по теореме 3 из [13].

2) Далее, сильная измеримость f влечёт сепарабельнозначность отображений f и F. А для сепарабельнозначных отображений в пространства Фреше из компактной субдифференцируемости почти всюду вытекает дифференцируемость F почти всюду ([16], теорема 4).

Равенство (11) в банаховом сучае мы покажем, опираясь на сепарабельнозначность F, а также известный результат ([3], п. 17.2.4, следствие 2) о существовании у каждого сепарабельного банахова пространства счётного множества линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки: если X — сепарабельное банахово пространство, то существует множество функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$ такое, что $\forall x,y\in X\quad x=y\iff\ell_n(x)=\ell_n(y)\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

Для всякого $n\in\mathbb{N}\ \exists\ e_n:\ mes(e_n)=0$ и $\ell_n(F'(x))=(\ell_n(F(x)))'=\ell_n(f(x))$ $\forall x\in I\backslash e_n$, т.к.

$$\ell_n(F(x))=\ell_n\left((P)\int\limits_a^x f(t)dt\right)=\int\limits_a^x\ell_n(f(t))dt.$$

Ясно, что множество $e=\bigcup\limits_{n=1}^{n}e_n$ имеет нулевую меру. При этом $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\ell_n(F'(x))=\ell_n(f(x))\quad\forall x\in I\backslash e,$$

откуда и вытекает равенство (11) для банаховых пространств X.

3) Пусть теперь X — пространство Фреше. Обозначим через $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — некоторую счётную определяющую систему полунорм в X. Обозначим через $\widehat{X}_j$ пополнения фактор-пространств $X_j = X/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{}_j = \|\cdot\|_j$. Для банаховых пространств $\widehat{X}_j$ $\forall\, j\in\mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt - f(x)\right\|_j = 0 \quad \forall x\in[a;b]\backslash e_j\ , \tag{16}$$

откуда $mes(e_j)=0$. Тогда для всех $x\in[a;b]\backslash\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} e_j$. Это означает, что почти всюду на $[a;b]$ равенство (16) справедливо при всех $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, $F'(x)=f(x)$ почти всюду на I. □

Опираясь на некоторые рассуждения предыдущего доказательства, покажем второй основной результат работы.

Теорема 3. *Если в* (10) *отображение F дифференцируемо почти всюду на I, то $f\in C^{\sigma}_{mes}(I)$.*

Доказательство. Рассуждая, как и в пунктах 2 – 3 предыдущего доказательства, легко проверить, что

$$F'(x)=f(x)\ \text{ для п.в. }\ x\in I. \tag{17}$$

Пусть $\ell\in X^*$ — произвольный линейный непрерывный функционал на X. Тогда из (17) следует, что почти все точки $x\in I$ являются точками Лебега функции $\widetilde{f}=\ell(f)$, т.е. для произвольной системы интервалов $\{I_m=(\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{mes(I_m)}\int\limits_{I_m}|\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(x)|dt = 0\ \text{ почти всюду на } I,$$

откуда $\widetilde{f}\in B^{w}_{int}(I)$ (в пространстве $\mathbb{R}$) в силу предложения 3:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{f}(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)}=0, \tag{18}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{mes(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)}=0.$$

Из (18) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\ell\left(\frac{F(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)}\right)=0. \tag{19}$$

Рассуждая также, как и в пункте 1) доказательства предыдущей теоремы, можно получить равенства (14) $\forall x\in I\backslash e$, $mes(e)=0$. При этом

$$\ell\left(\frac{F(I_m)}{mes(I_m)}\right)=\ell\left(\frac{F(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}\right)+\ell\left(\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}\right),$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу (15), (17) и (19) мы имеем

$$\ell\left(F'(x)\right) \in \ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right),$$

так как $\frac{F(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})} \in X_F^{1/n} \subset X\ \forall n \in \mathbb{N}$ (под $\overline{abs.co}A$ мы понимаем замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества $A \subset X$).

Итак, $\ell\left(F'(x)\right) \leqslant \sup \ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right)\ \forall \ell \in X^*$. По известному следствию из теоремы Хана-Банаха о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества $\forall x \in E_{1/n} \backslash e$:

$$F'(x) \in \overline{abs.co}\ X_F^{1/n}, \quad \text{или,} \quad F'(E_{1/n} \backslash e)\ \subset \overline{abs.co}\ X_F^{1/n},$$

причём все множества $\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}$ компактны как абсолютно выпуклые замыкания компактов (множества $\overline{X}_F^{1/n}$ компактны по теореме 2). Для завершения доказательства остаётся лишь заметить измеримость всех множеств $E_{1/n} \backslash e$. $\square$

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Эдвардс Э. Функциональный анализ. Теория и приложения / Э. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1069 с.

[3] Кадец В. М. Курс функционального анализа. Учебное пособие / В. М. Кадец. — Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2006. — 600 с.

[4] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[5] Kadets V.M. Some remarks on vector-valued integration / V.M. Kadets, B. Shumyatskiy, R. Shvidkoy, L.Tseytlin and K. Zheltukhin // Math. Phys. Anal. Geom. Vol. 9. — 2002. — P. 48 -– 65.

[6] Cascales B. Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces / B. Cascales, V. Kadets, J. Rodriguez // Journal of Functional Analysis. — 2009. — Vol. 256, № 3. — P. 673 – 699.

[7] Naralenkov K. On Denjoy type extensions of the Pettis integral / K. M. Naralenkov // Czechoslovak Math. Journal. — Vol. 60, № 3.— 2010. — P. 737 – 750.

[8] Yoon J. H. The AP-Henstok extension of the Dunford and Pettis integral / J. H. Yoon, J. M. Park, Y. K. Kim, B. M. Kim // Journal of the Chungcheong Mathhematical Society. — Vol. 23, № 4. — 2010. — P. 879 – 884.

[9] Dilworth S. J. Nowhere weak differentiability of the Pettis integral / S. J. Dilworth, M. Girardi // Ouaest. Math. — Vol. 18, № 4. — 1995. — P. 365 – 380.

[10] Стонякин Ф. С. К-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия « Математика. Механика. Информатика и кибернетика. » — 2009. — т. 22(61), № 1. — С. 102 – 113.

[11] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, № 1. — P. 74 – 90.

[12] Стонякин Ф. С. Компактный субдифференциал вещественных функций / Ф. С. Стонякин //Динамические системы. — 2007.— Вып. 23. — С. 99 – 112.

[13] Стонякин Ф. С. Секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в метризуемые ЛВП / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика.» — 2008. — т. 21(60), № 1. — С. 41 – 53.

[14] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, № 2. — P. 531 — 536.

[15] Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. Избранные главы / А. Л. Брудно. — М.: Наука, 1971. — 119 с.

[16] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования / Ф. С. Стонякин // Труды ИПММ НАНУ. — 2010. — Т. 20. — С. 168 – 176.

Про диференційовність за верхньою границею невизначеного інтегралу Петтіса. *У цій роботі досліджено дві нові характеристики інтегровних за Петтісом відображень дійсного відрізка у простори Фреше: майже скрізь слабку інтегральну обмеженість та σ-компактну вимірність. Одержано достатню умову диференційовності невизначених інтегралів Петтіса у термінах майже скрізь слабкої інтегральної обмеженості, а також необхідну умову — у термінах σ-компактної вимірності.*

Ключові слова: інтеграл Петтіса, сильно вимірне відображення, простір Фреше, майже скрізь слабка інтегральна обмеженість, σ-компактна вимірність, компактна субдиференційовність.

About differentiability of indefinite Pettis integral by upper limit. *In this paper two new properties for Pettis integrable mappings acting from a real segment into Frechet spaces are investigated: almost everywhere weak integral boundedness and σ-compact measurability. The sufficient condition for differentiability of indefinite Pettis integral in terms of almost everywhere weak integral boundedness is obtained. The necessary condition for differentiability of indefinite Pettis integral in terms of σ-compact measurability is proved.*

Keywords: Pettis integral, strongly measurable mapping, Frechet space, almost everywhere weak integral boundedness, σ-compact measurability.