Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 61–74.

УДК 517.928

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДВОЙНОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе приведена аналитическая оценка двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего в ряде задач математической физики. Доказан асимптотический характер полученного гибридного решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение второго порядка, гибридное ВКБ-Галеркин решение, асимптотичность приближенного решения.

Введение

Методы возмущений или асимптотические методы малого параметра для решения дифференциальных уравнений представляют собой один из наиболее мощных способов современной прикладной математики. Они позволяют получать приближенные аналитические представления решений достаточно сложных линейных и нелинейных краевых задач, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

Как показано в работах у роботах [1],[2], одним из эффективных асимптотических подходов является гибридный метод, идея которого состоит в применении любого асимптотического метода (метода возмущений, ВКБ и других) и метода Галеркина. Использование гибридного асимптотико–численного метода на базе двойного асимптотического разложения в нелинейных уравнениях является одним из новых направлений исследования задач математической физики. Основная идея этого подхода приведена в работе [3].

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами общего вида:

$$\varepsilon^2 T''(x) + a(x,\varepsilon)T'(x) - \beta b(x,\varepsilon)Q(T) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{T(d)}{dx} = D^*, \qquad T(f) = F^*, \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, причем $a(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $b(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

Функция $Q(T)$ может быть целой рациональной, при условии, что наивысший показатель степени $m \geq 2$ — целое число, или раскладываться в ряд Маклорена.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [6]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [2]). На первом этапе применения данного подхода, представляя функцию $T(x)$ в виде ряда по степеням параметра β:

$$T(x,\beta) = T_0(x) + \beta T_1(x) + \beta^2 T_2(x) + \ldots, \tag{3}$$

получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 T_0'' + a(x)T_0' = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 T_1'' + a(x)T_1' = b(r)Q(T_0). \tag{5}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

Согласно [3] гибридное ВКБ–Галеркин решение уравнения (4) имеет вид:

$$T_0^H(x) = C_1\frac{G_1(x)}{E(x)} + C_2\frac{G_2(x)}{E(x)}, \tag{6}$$

где

$$G_1(x) = \exp\left(\int_d^x \delta_{0_1} g^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\right), \quad G_2(x) = \exp\left(\int_d^x \delta_{0_2} g^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\right), \tag{7}$$

$$\delta_{0_{1,2}} = G \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}, \qquad G = \frac{g(d) - g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx},$$

$$E(x) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_d^x a(\tau)\,d\tau\right).$$

Рассмотрим дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка (5). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(x)$ дифференцируема на отрезке $[d, f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия

$$T_1'(d) = 0, \qquad T_1(f) = 0. \tag{8}$$

Для получения решения неоднородного уравнения (5) используем метод вариации произвольных постоянных (см. аналогично [7]), т.е. решение $T_1(x)$ уравнения (5) будем искать в виде:

$$T_1^H(x) = k_1(x)\frac{G_1(x)}{E(x)} + k_2(x)\frac{G_2(x)}{E(x)}. \tag{9}$$

Тогда решение уравнения (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} T_1^H(x) = &-\frac{G_1(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}-\delta_{0_1})E(x)}\left(\int\limits_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_1(\tau)}\,d\tau + s_1\right) + \\ &+\frac{G_2(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}-\delta_{0_1})E(x)}\left(\int\limits_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_2(\tau)}\,d\tau + s_2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Определив функции $T_0^H(x)$, $T_1^H(x)$ и подставив их в ряд (3), получим приближенное аналитическое решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{aligned} T^H(x) = &C_1\frac{G_1(x)}{E(x)} + C_2\frac{G_2(x)}{E(x)} + \\ &+\beta\left[-\frac{G_1(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}-\delta_{0_1})E(x)}\left(\int\limits_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_1(\tau)}\,d\tau + s_1\right) + \right. \\ &\left. +\frac{G_2(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}-\delta_{0_1})E(x)}\left(\int\limits_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_2(\tau)}\,d\tau + s_2\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Двойное гибридное решение уравнения (1) строится на базе комбинации метода фазовых интегралов и метода Галеркина, поэтому можно ожидать, что при малых значениях параметра решение имеет асимптотический характер.

Используя определение ε^r–асимптотического решения (см. [10], с. 291), докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (6) уравнения (4) на отрезке $[d, f]$ с краевыми условиями

$$T_0'(d) = D^*, \quad T_0(f) = F^*. \tag{12}$$

Теорема 1. *Если существует единственное решение $T_0(x,\varepsilon)$ краевой задачи (4),(12), а функция $a(x) = a(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d, f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям $a(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$,*

$\alpha \leqslant \sqrt{g(x)} \leqslant \beta$ на $[d,f]$, а $b(x) = b(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d,f]$ и $b(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, тогда для любого $x \in [d,f]$ функция (6) *является ε–асимптотическим решением уравнения* (4).

Доказательство. Вычисляя первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (6) и подставляя их в уравнение (4), получаем, что T_0^H является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2 (T_0^H)'' + \left(a(x) - \varepsilon^2\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right)(T_0^H) - \\ - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)T_0^H = 0, \quad (13)$$

Используя способ, основанный в [10], обозначим

$$D_0 = T_0 - T_0^H \quad (14)$$

и запишем уравнение (4) в виде

$$\varepsilon^2 T_0'' + \left(a(x) - \varepsilon^2\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right)T_0' - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)T_0 = \\ = -\varepsilon^2\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)T_0' - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)T_0. \quad (15)$$

Обозначим

$$F = -\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right). \quad (16)$$

Находя разность уравнений (15) и (13), используя (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_0:

$$\varepsilon^2 D_0'' + (a(x) + \varepsilon^2 F)D_0' + \frac{a(x)}{2}FD_0 = \left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(x)}{2}T_0\right)F. \quad (17)$$

На концах отрезка $[d,f]$ функция D_0 удовлетворяет краевым условиям

$$D_0'(d) = 0, \qquad D_0(f) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_0. Тогда, согласно [11], в случае, когда соответствующая линейная однородная задача (17)–(18) имеет только тривиальное решение (это выполняется кроме случая $\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2} = 1$), интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (17)–(18) имеет единственное решение

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(x,s)\left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds, \quad (19)$$

где $Gr(x,s)$ — функция Грина задачи (17)–(18).

Функция $Gr(x,s)$ определена при $x \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $x \neq s$ функция $Gr(x,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_0'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_0' + \frac{a(x)}{2} F D_0 = 0; \tag{20}$$

2) при $x = d$ и $x = f$ функция $Gr(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям (18);

3) при $x = s$ функция $Gr(x,s)$ непрерывна по x, а ее производная по x имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$Gr(s+0,s) = Gr(s-0,s), \qquad Gr_x'(s+0,s) - Gr_x'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Чтобы найти функцию Грина задачи (17)–(18), нужно построить решение $D_{0_1}(x) \neq 0$ уравнения (17), удовлетворяющее только первому ($x = d$) условию (18), и решение $D_{0_2}(x) \neq 0$, удовлетворяющее второму краевому условию.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (13) $T_0^{H_1}$ и $T_0^{H_2}$:

$$T_0^{H_1} = \frac{G_1(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(\tau)}\, d\tau \right), \tag{21}$$

$$T_0^{H_2} = \frac{G_2(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(\tau)}\, d\tau \right). \tag{22}$$

Тогда функции D_{0_1} и D_{0_2} могут быть определены как

$$D_{0_1} = T_0^{H_1} - T_0^{H_2}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} D_{0_2} = T_0^{H_1} - \\ - \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\, dx \right) \frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} T_0^{H_2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Функцию $Gr(x,s)$ будем искать в виде

$$Gr(x,s) = \begin{cases} \varphi(s) D_{0_1}(x), & d \leqslant x \leqslant s, \\ \psi(s) D_{0_2}(x), & s \leqslant x \leqslant f. \end{cases}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \psi(s) D_{0_2}(x) = \varphi(s) D_{0_1}(x), \\ \psi(s) D_{0_2}'(x) - \varphi(s) D_{0_1}'(x) = 1/\varepsilon^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\varphi(s)=\frac{D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))},$$

$$\psi(s)=\frac{D_{0_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}.$$

Обозначив

$$P^*=D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s),$$

$$e^*=\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f\sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}\neq 1,$$

и учитывая (23)–(24), получим

$$P^*=(T_0^{H_1}-T_0^{H_2})\left((T_0^{H_1})'-e^*(T_0^{H_2})'\right)-\left((T_0^{H_1})'-(T_0^{H_2})'\right)(T_0^{H_1}-e^*T_0^{H_2})=$$

$$=\left(T_0^{H_1}(T_0^{H_2})'-(T_0^{H_1})'T_0^{H_2}\right)(1-e^*).$$

Учитывая (21)–(22), и то, что

$$(T_0^{H_1})'=T_0^{H_1}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(x)}\left(G+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

$$(T_0^{H_2})'=T_0^{H_2}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(x)}\left(G-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^*=-2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(x)}T_0^{H_1}T_0^{H_2}(1-e^*)=$$

$$=-2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(x)}(1-e^*)\frac{1}{E^2(x)}\exp\left(2G\int\limits_d^x\sqrt{g(t)}\,dt\right).$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(x,s)=\begin{cases}\dfrac{D_{0_1}(x)D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2P^*}, & d\leqslant x\leqslant s,\\ \dfrac{D_{0_1}(s)D_{0_2}(x)}{\varepsilon^2P^*}, & s\leqslant x\leqslant f.\end{cases}$$

Запишем решение задачи (17)–(18) с помощью функции Грина

$$D_0=\int\limits_d^f Gr(x,s)\left(\varepsilon^2T_0'+\frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds=$$

$$=-(T_0^{H_1}(x)-T_0^{H_2}(x))\int\limits_d^x\frac{(T_0^{H_1}(s)-e^*T_0^{H_2}(s))E^2(s)\left(\varepsilon^2T_0'+\frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}-$$

$$-(T_0^{H_1}(x)-e^*T_0^{H_2}(x))\int\limits_x^f \frac{(T_0^{H_1}(s)-T_0^{H_2}(s))e^2(s)\left(\varepsilon^2 T_0'+\frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}.$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1|\leqslant \max\{G_1,G_2\}=L,\quad |G_2|\leqslant \max\{G_1,G_2\}=L, \tag{25}$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(s)}}\right|=\left|2G+\frac{g'(s)}{2g(s)\sqrt{g(s)}}\right|\leqslant 2|G|+\frac{|g'(s)|}{2\min|g^{3/2}(s)|}=K, \tag{26}$$

$$\left|\frac{b(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right|\leqslant B\quad \exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)\geqslant \exp(2G\alpha(s-d))\geqslant N, \tag{27}$$

где

$$N=\begin{cases}1, & \alpha>0,\\ \exp(2G\alpha(f-d)), & \alpha<0.\end{cases} \tag{28}$$

Учитывая (25)–(28), можно записать

$$|D_0|\leqslant \frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|}\left|\left(T_0^{H_1}(x)-T_0^{H_2}(x)\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int\limits_d^x \frac{(T_0^{H_1}(s)-e^*T_0^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(T_0'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_0\right)ds+$$

$$\left.+(T_0^{H_1}(x)-e^*T_0^{H_2}(x))\int\limits_x^f \frac{(T_0^{H_1}(s)-T_0^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(T_0'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_0\right)ds\,\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|G_1|+|G_2|)(|G_1|+e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{F}{\sqrt{g(s)}}\frac{E(s)(E(s)T_0)'\,ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L^2\varepsilon}{N\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|\frac{K}{E(r)}\left|\int\limits_d^f(E(s)T_0)'\,ds\right|.$$

Обозначив

$$C=\frac{L^2K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

получим

$$|D_0|\leqslant\frac{C\varepsilon}{E(x)\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left|E(f)T_0(f)-E(d)T_0(d)\right|,$$

или

$$|D_0|\leqslant\frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}|T_0(f)-T_0(d)/E(f)|.$$

Функция

$$\mu(x) = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |T_0(f) - T_0(d)/E(f)|$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, обозначив

$$M = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |T_0(f) - T_0(d)/E(f)|,$$

имеем оценку

$$|T_0 - T_0^H| \leqslant \varepsilon \cdot M, \tag{29}$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (6), (9) уравнения (4).

Теорема доказана. □

Оценим точности аналитического решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (5), что даст возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [6].

Теорема 2. *Если существует единственное решение $T_1(x,\varepsilon)$ краевой задачи* (5),(8)*, а функция $a(x) = a(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d,f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям $a(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $\alpha \leqslant \sqrt{g(x)} \leqslant \beta$ на $[d,f]$, а $b(x) = b(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d,f]$ и $b(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, тогда оценка отклонения гибридного ВКБ-Галеркин приближения решения* (9) *от точного решения имеет вид:*

$$\left|T_1(x) - T_1^H(x)\right| \leqslant \varepsilon \cdot Q.$$

Доказательство. Подставляя первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (10) в уравнение (5), получаем, что T_1^H является общим решением уравнения:

$$\varepsilon^2 (T_1^H)'' + \left(a(x) - \varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right)(T_1^H)' - \\ - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_1^H = b(x) Q(T_0^H). \tag{30}$$

Как и при доказательстве асимптотичности гибридного решения T_0^H в теореме 1, обозначим

$$D_1 = T_1 - T_1^H \tag{31}$$

и запишем уравнение (5) в виде

$$\varepsilon^2 T_1'' + \left(a(x) - \varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right) T_1' - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_1 =$$

$$= -\varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G \right) T_1' - \frac{a(x)}{2} \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G \right) T_1 + b(x)Q(T_0). \quad (32)$$

Находя разность уравнений (32) и (30), используя (31) и (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_1:

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_1' + \frac{a(x)}{2} F D_1 = \left(\varepsilon^2 T_1' + \frac{a(x)}{2} T_1 \right) F + b(x)(Q(T_0) - Q(T_0^H)). \quad (33)$$

На концах отрезка $[d, f]$ функция D_1 удовлетворяет краевым условиям

$$D_1(d) = 0, \qquad D_1'(f) = 0. \quad (34)$$

Уравнение (33) будем рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_1. Тогда интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (33)–(34) имеет единственное решение:

$$D_1 = \int\limits_d^f \tilde{G}r(x,s) \left(\left(\varepsilon^2 T_1' + \frac{a(s)}{2} T Y_1 \right) F + b(s)(Q(T_0) - Q(T_0^H)) \right) ds, \quad (35)$$

где $\tilde{G}r(x,s)$ — функция Грина задачи (33)–(34).

Функция $\tilde{G}r(x,s)$ определена при $x \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $x \neq s$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_1' + \frac{a(x)}{2} F D_1 = 0; \quad (36)$$

2) при $x = d$ и $x = f$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям (34);

3) при $x = s$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ непрерывна по x, а ее производная по x имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$\tilde{G}r(s+0,s) = \tilde{G}r(s-0,s), \qquad \tilde{G}r_x'(s+0,s) - \tilde{G}r_x'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Для нахождения функции Грина задачи (33)–(34), нужно построить решение $D_{1_1}(x) \neq 0$ уравнения (36), удовлетворяющее условию $D_{1_1}(d) = 0$, и решение $D_{1_2}(x) \neq 0$, удовлетворяющее условию $D_{1_2}'(f) = 0$.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (30) $T_1^{H_1}$ и $T_1^{H_2}$:

$$T_1^{H_1} = \frac{G_1(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(t)}\, dt \right), \quad (37)$$

$$T_1^{H_2} = \frac{G_2(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(t)}\, dt \right). \quad (38)$$

Тогда функции D_{1_1} и D_{1_2} могут быть определены как

$$D_{1_1} = T_1^{H_1} - T_1^{H_2}, \tag{39}$$

$$D_{1_2} = T_1^{H_1} - \\ - \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}T_1^{H_2}. \tag{40}$$

Функцию $\tilde{G}r(x,s)$ будем искать в виде

$$\tilde{G}r(x,s) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(s)D_{1_1}(x), & d \leqslant x \leqslant s, \\ \tilde{\psi}(s)D_{1_2}(x), & s \leqslant x \leqslant f. \end{cases} \tag{41}$$

Функции $\tilde{\varphi}(s)$ и $\tilde{\psi}(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(s)D_{1_2}(x) = \tilde{\varphi}(s)D_{1_1}(x), \\ \tilde{\psi}(s)D'_{1_2}(x) - \tilde{\varphi}(s)D'_{1_1}(x) = 1/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{42}$$

Отсюда

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}, \tag{43}$$

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{D_{1_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}. \tag{44}$$

Обозначив

$$\tilde{P}^* = D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (39)–(40), получим

$$P^* = (T_1^{H_1} - T_1^{H_2})((T_1^{H_1})' - e^*(T_1^{H_2})') - ((T_1^{H_1})' - ((T_1^{H_2})')(T_1^{H_1} - e^*T_1^{H_2}) = \\ = (T_1^{H_1}(T_1^{H_2})' - (T_1^{H_1})'T_1^{H_2})(1 - e^*).$$

Учитывая (37)–(38), и то, что

$$(T_1^{H_1})' = T_1^{H_1}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

$$(T_1^{H_2})' = T_1^{H_2}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

имеем

$$\tilde{P}^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}T_1^{H_1}T_1^{H_2}(1 - e^*) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\frac{1}{E^2(s)}\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right). \tag{45}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$\tilde{G}r(x,s)=\begin{cases}\dfrac{D_{1_1}(x)D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2\tilde{P}^*}, & d\leqslant x\leqslant s,\\ \dfrac{D_{1_1}(s)D_{1_2}(x)}{\varepsilon^2\tilde{P}^*}, & s\leqslant x\leqslant f.\end{cases} \tag{46}$$

Запишем решение задачи (33)–(34) с помощью функции Грина

$$D_1=\int\limits_d^f \tilde{G}r(x,s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds=$$

$$=-(T_1^{H_1}(x)-T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^x\frac{(T_1^{H_1}(s)-e^*T_1^{H_2}(s))E^2(s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}-$$

$$-(T_1^{H_1}(x)-e^*T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_x^f\frac{(T_1^{H_1}(s)-T_1^{H_2}(s))E^2(s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}. \tag{47}$$

Учитывая (25)–(28), можно записать

$$|D_1|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|}\Bigg|(T_1^{H_1}(x)-T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^x\frac{(T_1^{H_1}(s)-e^*T_1^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(\left(T_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds+$$

$$+(T_1^{H_1}(x)-e^*T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_x^f\frac{(T_1^{H_1}(s)-T_1^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(\left(T_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds\ \Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|G_1|+|G_2|)(|G_1|+e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}\frac{E(s)\left((E(s)T_1)'+\frac{E(s)b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2K}{N\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|\left(\frac{1}{E(x)}\left|\int\limits_d^f (E(s)T_1)'\,ds\right| + \frac{B}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f \frac{E^2(s)}{F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\,ds\right|\right).$$

Обозначив, как и ранее,

$$C = \frac{L^2K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

а также учитывая оценку (29), получим

$$|D_1| \leqslant \frac{C\varepsilon}{E(x)\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(\frac{|E(f)T_1(f)-E(d)T_1(d)|}{E(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{BM\varepsilon}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f \frac{E^2(s)}{F(s)}((Q(T_0)-Q(T_0^H))/(T_0=T_0^H))\,ds\right|\right),$$

или, учитывая оценку

$$\frac{1}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f \frac{E^2(s)}{F(s)}((Q(T_0)-Q(T_0^H))/(T_0=T_0^H))\,ds\right| \leqslant T,$$

$$|D_1| \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)| + \varepsilon BMT\right).$$

Функция

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)| + \varepsilon BMT\right)$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, обозначив

$$Q = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)| + \varepsilon BMT\right),$$

имеем оценку

$$|T_1 - T_1^H| \leqslant \varepsilon \cdot Q, \tag{48}$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (9)– (8) уравнения (5).

Теорема доказана. □

Оценки (29) и (48), полученные в теоремах 1 и 2, дают возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения (11) задачи (1).

Действительно, так как

$$T^H = T_0^H + \beta T_1^H$$

и при этом доказано, что

$$|T_0(x) - T_0^H(x)| \leqslant \varepsilon \cdot M, \qquad |T_1(x) - T_1^H(x)| \leqslant \cdot Q,$$

тогда $T^H(x)$ можем оценить следующим образом:

$$|T(x) - T^H(x)| \leqslant \varepsilon \cdot (M + \beta Q).$$

Это доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (1).

Таким образом, доказано, что решение (10) имеет асимптотический характер, то есть сделана оценка влияния параметров и коэффициентов на гибридное решение (10) уравнения (1).

В заключение заметим, что рассматриваемое в работе уравнение (1) возникает в задачах математической физики и описывает процессы теплообмена в конструкциях с переменной геометрией. Так, например, если положить в (1) $a(x) = 1/x$, $b(x) = -\varepsilon^2$, $Q(T) = e^T$, то уравнение (1) описывает процесс распространения температуры в цилиндре при $\varepsilon = 1$ и в сфере при $\varepsilon = \sqrt{2}/2$ (см. [4]). А также, при определенных значениях переменных коэффициентах [5], данное уравнение описывает сложный теплообмен излучением кольцевых ребер трапецеидального сечения. Ребра различного сечения (трапеция, прямоугольник и треугольник) используются в аэрокосмических установках. Гибридный подход к каждому конкретному случаю был рассмотрен в работах [3], [6], а асимптотичность гибридного решения задачи сложного теплообмена в кольцевых ребрах доказана в работах [8],[9].

Список литературы

[1] Geer J.F. *A hybrid perturbation–Galerkin technique with combines multiple expansions* /J.F. Geer, C.M. Andersen // Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA. – 1989. – P. 1–36.

[2] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[3] Погребицкая А.М. *Приближенное аналитическое решение задачи о распространении тепла, сводящейся к нелинейному сингулярному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами* / А.М. Погребицкая // Вестник, Казахский национальный педагогический университет имени Абая. Серия: фиизико–математические науки. – 2008. – Т.22,№2. – С.130–134.

[4] Na T.Y. *A method for the solution of conduction heat transfer with non–linear heat generation* /T.Y. Na, S.G. Tang // ZAMM. – 1969. – № 49. – P. 45–52.

[5] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[6] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik. – 2011. – V.31, № 2. – P. 112–120.

[7] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 217–223.

[8] Погребицкая А.М. *К вопросу о точности приближенного аналитического решения нелинейной задачи теплоизлучения* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2009. – Т.22(61). – № 1. – С. 93–102.

[9] Погребицкая А.М. *Об оценке точности аналитического гибридного решения задачи теплопереноса* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия "Физико–математические науки". – 2010. – Т.23(62). – № 2. – С. 113–123.

[10] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[11] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

Аналітичного оцінка подвійного гібридного ВКБ–Гальоркін розв'язку нелінійного однорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами

В роботі наведено аналітичну оцінку подвійного гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що виникає у ряді задач математичної фізики. ДОведено асимптотичний характер отриманого гібридного розв'язку. нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує математичну модель процесу теплоперенесення.

Ключові слова: нелінійне рівняння другого порядку, гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок, асимптотичність наближеного розв'язку.

An analytical estimate of the double hybrid VKB-Galerkin solution for the nonlinear homogeneous differential equation with the variable coefficients

In this paper the analytical estimate of an double hybrid WKB-Galerkin solution for the nonlinear second order differential equation, arising in some mathematical physics problems, is presented. Asymptotic character of corresponding hybrid solution is proved.

Keywords: second order nonlinear equation, hybrid WKB-Galerkin solution, approximate solution's asymptotic property.