Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 125–131.

УДК 517.925.51

О. В. Анашкин, О. В. Митько

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия неустойчивости нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, неустойчивость, прямой метод Ляпунова.

Введение

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием описывают поведение развивающихся во времени процессов разнообразной природы, которые могут почти мгновенно изменять свое состояние. Решения этих уравнений имеют разрывы первого рода в фиксированные или нефиксированные (зависящие от фазовых координат) моменты импульсного воздействия. Теория уравнений с импульсным воздействием строится по аналогии с классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, но имеет заметные специфические отличия. Первые итоги развития теории уравнений с импульсным воздействием подведены в монографиях [1], [2] и других. Одним из важнейших направлений развития является теория устойчивости. Прямой метод Ляпунова является весьма эффективным инструментом исследования устойчивости решений уравнений с импульсным воздействием. К настоящему времени получены различные аналоги теорем прямого метода Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, теоремы о существовании функций Ляпунова [3], а также принципиально новые результаты, существенно использующие специфику импульсного воздействия [1], [2]. Найти функцию Ляпунова для конкретной системы уравнений обычно очень непросто.

Поэтому вывод условий устойчивости, допускающих более широкий класс вспомогательных функций, всегда остается актуальным направлением исследований, имеющим важное практическое значение.

Настоящая работа продолжает исследования авторов [4, 5], распространяющих на уравнения с импульсным воздействием метод обобщенных функций Ляпунова [6]–[8]. Такие функции удовлетворяют менее ограничительным требованиям, чем классические функции Ляпунова и это облегчает подбор таких функций. Получены новые достаточные условия неустойчивости, обобщающие известные в литературе результаты.

Постановка задачи

Систему с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени принято записывать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= h_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ — скачок решения $x(t)$ в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Система имеет нулевое решение: $f(t,0) = h_k(0) = 0$. Предполагается, что решения системы (1) непрерывны слева, т. е. $x(t) = x(t-0)$, функции $f(t,x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geq 0\}$ и $k = 1, 2, \ldots$. Как обычно, $x(t; t_0, x^0)$ обозначает решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Обозначим через $B_r \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса r с центром в нуле (*r-окрестность нуля*), $B_r = \{|x| < r\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Большинство публикаций, посвященных задаче об устойчивости, содержит теоремы об условиях различных типов асимптотической устойчивости. Понятие асимптотической устойчивости наиболее часто применяется в приложениях. Тем не менее, как теоретический, так и практический интерес представляют результаты об условиях неустойчивости. В монографии [1] имеется раздел, посвященный прямому методу Ляпунова, где даны доказательства нескольких теорем о неустойчивости. Отметим, что там рассматривается более сложный класс систем с импульсным воздействием на поверхностях, но, с другой стороны, вспомогательные функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми всюду в пространстве $\{(t,x)\}$. Мы будем использовать разрывные функции Ляпунова, допускающие разрывы первого рода по времени в моменты импульсных воздействий.

Обозначим $\mathcal{G} = \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+$ область определения системы (1). *Областью положительности* функции $v\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, $v(t,0) \equiv 0$, назовем множество $\{v > 0\} = \{(t,x) \in \mathcal{G}\colon v(t,x) > 0\}$. Будем говорить, что область $\{v > 0\}$ *примыкает к нулю*, если при всяком $t \geq 0$ и сколь угодно малом $\rho > 0$ множество $\{v > 0\}_t = \{x \in \mathcal{D}\colon v(t,x) > 0\}$ имеет открытое пересечение со сферой $\{|x| = \rho\}$.

Теорема 1 ([1], с.139)**.** *Если существует функция $v(t,x)$ с примыкающей к нулю областью положительности, ограниченная в этой области и удовлетворяющая в ней условиям*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t,x) \geq 0, \tag{2}$$

$$v(\tau_k, x + h_k(x)) - v(\tau_k, x) \geq \psi(v(\tau_k, x)), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geq 0$ функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, то нулевое решение системы уравнений (1) *неустойчиво.*

Целью настоящей работы является доказательство теоремы о достаточных условиях неустойчивости нулевого решения системы (1), существенно обобщающей сформулированный результат и значительно расширяющей класс подходящих функций.

Основной результат

Обозначим через $\mathcal{K}$ «класс Хана» — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$. Чтобы не обсуждать возможные патологии, будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k распределены более или менее равномерно, а именно, пусть

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2,$$

для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$.

В дальнейшем существенную роль играет *линеаризация* системы (1) в нуле

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} &= B_k y, \end{aligned} \tag{4}$$

где $|f(t,y) - A(t)y| = o(|y|)$, $|h_k(y) - B_k y| = o(|y|)$ при $|y| \to 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим

$$\|\varphi\|_J = \sup\{|\varphi(t)|, t \in J\}$$

норму $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ в пространстве $KC(J)$ всех таких функций.

Используя лемму Гронуолла, легко получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $J = [t_0, t_0 + T]$: $|x(t; t_0, x^0)| \leq |x^0| Const$, где $Const$ зависит только от длины промежутка J. Оценку нормы разности решений систем (1) и (4) на отрезке J можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [2, стр. 25]):

$$|x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \leq \|x - y\|_J = o(|x^0|) \text{ при } |x^0| \to 0. \tag{5}$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и x^0 из заданной окрестности нуля и зависит только от величины T.

Достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (1) мы будем формулировать в терминах свойств вспомогательной функции $V(t,x)$, которая в точках $t = \tau_k$ может иметь разрывы первого рода и является непрерывной слева при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 2. *Пусть существуют постоянные $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ и функции $V, \Phi\colon [\tau, \infty) \times B_\gamma \to \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{K}$ такие, что:*

(i) *функция V обладает примыкающей к нулю областью положительности $\{V > 0\}$ и $V(t,x) \leq b(|x|)$ в области $\{V > 0\}$;*

(ii) $\dot V\Big|_{(1)}(t,x) \geq \Phi(t,x)$ *в области $\mathcal{T} \times B_\gamma$;*

(iii) *существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие,что*

$$|\Phi(t,x)| \leq M|x|^d, \quad |\Phi(t,x') - \Phi(t,x'')| \leq M r^{d-1} |x' - x''|$$

для $(t,x'), (t,x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ при всяком $r \in (0, \gamma)$;

(iv) *существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие,что для всех (t_0, x^0) из области положительности $\{V > 0\}$ при $\Delta t \geq T_0$*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t; t_0, x^0))\, dt \geq \delta_0 |x^0|^d \Delta t$$

где $y(t; t_0, x^0)$ — решение линеаризации (4);

(v) $V(\tau_k, x + h_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Обозначим $x(t;t_0,x^0)$ и $y(t;t_0,x^0)$ решения систем (1) и (4), соответственно, проходящие через точку $(t_0,x^0)\in\mathcal{G}$. Предположим, что теорема не верна и нулевое решение системы (1) устойчиво. Тогда любая траектория, выходящая из достаточно малой окрестности нуля будет оставаться в шаре B_γ и условия теоремы будут выполняться при всех $t>\tau$. Для краткости обозначим $x(t)=x(t;t_0,x^0)$, $y(t)=y(t;t_0,x^0)$.

Как известно [1, стр. 20], решение $x(t;t_0,x^0)$ системы (1) с начальными значениями t_0, x^0 может быть представлено в виде

$$x(t;t_0,x^0)=x^0+\int\limits_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds+\sum_{t_0\le\tau_k<t} h_k(x^k), \tag{6}$$

где $x^k=x(\tau_k)$, $k=1,2,\ldots$.

По аналогии с (6) и с учетом условий теоремы получаем следующее неравенство

$$V(t,x(t))\ge V(t_0,x^0)+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(s,x(s))\,ds=$$

$$=V(t_0,x^0)+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(s,y(s))\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\left|\Phi(s,x(s))-\Phi(s,y(s))\right|\,ds. \tag{7}$$

Учитывая оценку (5) и условия теоремы можно показать, что при достаточно малом $\epsilon_0>0$ для $t_0\ge\tau$ и $x^0\in B_{\epsilon_0}$ таких, что $V(t_0,x^0)>0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0}\Phi(t,x(t;t_0,x^0))\,dt\ge\frac{\delta_0}{2}|x^0|^dT>0. \tag{8}$$

Для сколь угодно малого $\eta>0$ ($\eta<\epsilon_0$) можно выбрать $x^0\in B_\eta$ так, что $V_0=V(t_0,x^0)>0$. Положим $t_k=t_0+kT_0$, $k=0,1,\ldots$. Принимая во внимание (7), (8), для всякого k получим оценку роста функции V в точках $(t_k,x(t_k))$

$$b(|x(t_k)|)\ge V(t_k,x(t_k))\ge V(t_{k-1},x(t_{k-1}))+\frac{\delta_0}{2}|x^{k-1}|^dT_0>V_0.$$

Или

$$V(t_k,x(t_k))\ge V(t_0,x(t_0))+\frac{\delta}{2}T_0\sum_{s=0}^{k-1}|x^s|^d>V_0.$$

Поскольку $|x(t_s)|>b^{-1}(V_0)$, $s=1,\ldots,k$, то $|x(t_k)|>\epsilon_0/2$ для достаточно большого k. В силу произвольной малости $|x^0|$ отсюда следует вывод о неустойчивости нулевого решения системы (1). $\square$

Функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме 1, удовлетворяет и требованиям доказанной теоремы Поэтому доказанная теорема является обобщением теоремы 1 для систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

Заключение

В статье получены достаточные условия неустойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированые моменты времени. Условия устойчивости формулируются в терминах свойств функции Ляпунова, которая допускает немонотонное изменение вдоль решения импульсной системы и сама может иметь разрывы первого рода по временя. Таким образом существено расширяется класс подходящих функций Ляпунова и это может облегчить построение таких функций для конкретных систем.

Список литературы

[1] Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев, Вища школа, 1987. — 288 с.

[2] Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Инт математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

[3] Игнатьев А. О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем диффернциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Матем. сборник. — 2003. — Т.194, №.10. — С.117-132.

[4] Анашкин О. В. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Динамические системы. - 2010. - Вып. 28. - С. 3-8.

[5] Анашкин О. В. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости систем с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Тав-рический вестник информатики и математики. - 2010. - № 2. - С. 9-16.

[6] Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем / М. М.Ẋапаев. — М.: Наука, 1986. — 192 с.

[7] Хапаев М. М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М.Ẋапаев. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.

[8] Анашкин О. В. Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. "Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов". — К.: Об-во "Знание". — 1990. — С.3-4.

Нестійкість в системах з імпульсним впливом

Розглядаєтъся нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. На основі прямого методу Ляпунова отримані достатні умови нестійкості нульового рішення.

Ключові слова: диференціальні рівняння з імпульсним впливом, нестійкість, прямий метод Ляпунова.

Instability in systems with impulse effect

The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse effect at fixed times is considered. Sufficient conditions for instability of the zero solution are obtained by Lyapunov's direct method.

Keywords:differential equations with impulse effect, instability, Lyapunov's direct method.