Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 101–111.

УДК 517.98

Д. П. Проскурин

О $*$-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВИКОВСКОГО АНАЛОГА CCR

В работе изучаются $*$-представления виковского аналога алгебры канонических коммутационных соотношений, аннулирующие однородные виковские идеалы степеней 3 *и* 4. *Представлен способ построения убывающей цепочки однородных виковских идеалов возрастающих степеней.*

Ключевые слова: деформации канонических коммутационных соотношений, виковские алгебры, неограниченные операторы.

Введение

В данной работе мы приводим некоторые результаты о строении однородных виковских идеалов в квадратических $*$-алгебрах с виковским упорядочением, коротко - виковских алгебрах. Пусть числа $\{T_{ij}^{kl},\ i,j,k,l=1,\ldots,d\}\subset\mathbb{C}$ удовлетворяют условиям $T_{ji}^{lk}=\overline{T}_{ij}^{kl}$. Виковская алгебра $W(T)$, см. [3], порождается образующими a_i, a_i^*, $i=1,\ldots,d$, и соотношенями вида

$$a_i^*a_j=\delta_{ij}1+\sum_{k,l=1}^{d}T_{ij}^{kl}a_la_k^*,\ i,j=1,\ldots,d. \tag{1}$$

Следуя [3], построим конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}=\mathbb{C}\langle e_1,\cdots,e_d\rangle$ и его формально сопряженное $\mathcal{H}^*=\mathbb{C}\langle e_1^*,\cdots,e_d^*\rangle$, где $\{e_i,\ i=1,\ldots,d\}$ образует ортонормированный базис $\mathcal{H}$. Обозначим $\mathcal{T}(\mathcal{H},\mathcal{H}^*)$ полную тензорную алгебру над $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$, тогда

$$W(T)\simeq\mathcal{T}(\mathcal{H},\mathcal{H}^*)/\langle e_i^*\otimes e_j-\sum_{k,l=1}^{d}T_{ij}^{kl}e_l\otimes e_k^*\rangle. \tag{2}$$

В этой реализации свободная алгебра, порожденная элементами a_i, $i=1,\ldots,d$, совпадает с $\mathcal{T}(\mathcal{H})=\mathbb{C}\Omega\oplus\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Ключевую роль в изучении структуры виковских $*$-алгебр играет оператор коэффициентов $T\colon \mathcal{H}^{\otimes 2} \to \mathcal{H}^{\otimes 2}$, определенный следующим образом

$$Te_k \otimes e_l = \sum_{i,j=1}^{d} T_{ik}^{lj} e_i \otimes e_j. \tag{3}$$

При $n > 2$ построим расширения T на $\mathcal{H}^{\otimes n}$:

$$T_i = \bigotimes_{k=1}^{i-1} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes T \otimes \bigotimes_{k=i+2}^{n} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Операторы R_n,

$$R_n\colon \mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad R_n = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}} + T_1 + T_1T_2 + \cdots + T_1T_2 \cdots T_{n-1},$$

позволяют определить правило коммутации образующих a_i^*, $i = 1, \ldots, d$ с любым однородным полиномом от $a_1, \ldots, a_d$. А именно, см. [6], для любого $X \in \mathcal{H}^n$ имеет место равенство

$$e_i^* \otimes X = \mu_0(e_i^*)(R_n X + \sum_{k=1}^{d} T_1T_2 \cdots T_n(X \otimes e_k) \otimes e_k^*),$$

где $\mu_0(e_i^*) : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H})$,

$$\mu_0(e_i^*) e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots e_{i_s} = \delta_{ii_1} e_{i_2} \otimes \cdots e_{i_s}, \ s \geq 1, \quad \mu_0(e_i^*)\Omega = 0.$$

В данной заметке мы будем предполагать, что оператор коэффициентов T является *косовым*, т.е. на $\mathcal{H}^{\otimes 3}$ выполнено соотношение $T_1T_2T_1 = T_2T_1T_2$.

Одной из важных задач теории представлений виковских $*$-алгебр является поиск дополнительных соотношений между элементами a_i, т.е. построение специальных классов двусторонних идеалов в $\mathcal{T}(H)$. В работе [3] был вынесен на рассмотрение класс виковских $*$-идеалов в $\mathcal{T}(H)$. В частности было показано, что виковские идеалы, порожденные полиномами степени 2, лежат в ядре фоковского представления $W(T)$, а также содержатся в $*$-радикале виковских алгебр связанных со скрученными коммутационными соотношениями и соотношенями для обобщенных куонов см. [3, 4, 7].

Целью заметки является изучение структуры однородных виковских идеалов высших степеней. А именно, мы представляем метод, позволяющий строить однородный виковский идеал $\mathcal{I}_{n+1}$ степени $n+1$ основываясь на знании образующих некоторого однородного виковского идеала $\mathcal{I}_n$ степени n. При этом имеет место включение $\mathcal{I}_{n+1} \subset \mathcal{I}_n$. Мы также доказываем, что в некоторых случаях наша процедура позволяет описать максимальные однородные виковские идеалы высших степеней.

В качестве примера применения наших результатов мы описываем классы унитарной эквивалентности неприводимых $*$-представлений виковского аналога CCR с двумя образующими, в которых обращается в нуль некоторый однородный виковский идеал.

1. Описание однородных виковских идеалов.

Понятие виковского идеала было введено в [3] в качестве естественного способа построения дополнительных соотношений между a_i, $i = 1, \ldots, d$, совместимых с порождающими соотношениями.

Определение 1. Двусторонний идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{H})$ называется виковским идеалом, если

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}^*) \otimes \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \otimes \mathcal{T}(\mathcal{H}^*).$$

Если же виковский идеал $\mathcal{I}$ порожден подпространством $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$, то $\mathcal{I}$ называется однородным виковским идеалом степени n.

Заметим, см. [3], что идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{H})$ порожденный $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$, будет виковским тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0 \otimes \mathcal{H}^*.$$

Важной задачей теории представлений виковских алгебр является явное описание образующих однородных виковских идеалов высших степеней. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [6], где был доказан следующий результат.

Предложение 1. *Пусть оператор коэффициентов T является косовым и $||T|| \leq 1$. Обозначим $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{H}^{\otimes 2}$ подространство, порождающее максимальный квадратический виковский идеал. Тогда подпространство*

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes 3}} - T_1 T_2)(\mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{H})$$

порождает максимальный однородный виковский идеал степени 3.

Напомним сперва некоторые свойства подпространств, задающих однородные виковские идеалы (см. [3, 6]).

Предложение 2. *Пусть $P \colon \mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ оператор проектирования. Подпространство $\mathcal{I} = P(\mathcal{H}^{\otimes n})$ порождает виковский идеал тогда и только тогда, когда*

(1) $R_n P = 0$ *(равенство в $\mathcal{H}^{\otimes n}$),*
(2) $[\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}} - P)] T_1 T_2 \cdots T_n [P \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}] = 0$ *(равенство в $\mathcal{H}^{\otimes n+1}$).*

Если же оператор коэффициентов T является косовым и P проектор на $\ker R_n$*, то второе условие выполняется автоматически. Следовательно, в этом случае* $\ker R_n$ *порождает максимальный однородный виковский идеал степени n.*

Заметим, что второе условие Утверждения 2 означает, что

$$T_1 T_2 \cdots T_n \big(\mathcal{I} \otimes \mathcal{H}\big) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{I}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$ порождает однородный виковский идеал, тогда*

$$\big(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1T_2\cdots T_n\big)(\mathcal{I}\otimes\mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{I}$. Тогда $X \in \ker R_n$. Заметим, что

$$R_{n+1} = R_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + T_1T_2\cdots T_n = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} + T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes R_n)$$

Тогда для каждого $i = 1,\ldots,d$ получим

$$\begin{aligned}
&R_{n+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1T_2\cdots T_n)(X\otimes e_i) = \\
&\quad = R_{n+1}(X\otimes e_i) - R_{n+1}T_1T_2\cdots T_n(X\otimes e_i) = \\
&\quad = (R_n\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + T_1T_2\cdots T_n)(X\otimes e_i) \\
&\quad - (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} + T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\otimes R_n))T_1T_2\cdots T_n(X\otimes e_i) = \\
&\quad = T_1T_2\cdots T_n(X\otimes e_i) - T_1T_2\cdots T_n(X\otimes e_i) \\
&\quad - T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\otimes R_n)T_1T_2\cdots T_n(X\otimes e_i) = 0,
\end{aligned}$$

где выше мы сипользовали свойство

$$T_1T_2\cdots T_n(\mathcal{I}\otimes\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}\otimes\mathcal{I} \subset \mathcal{H}\otimes\ker R_n = \ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\otimes R_n).$$

□

Следствие 1. *Если оператор T является косовым, то*

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1T_2\cdots T_n)(\ker R_n \otimes \mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Ниже мы будем использовать следующее простое наблюдение.

Лемма 2. *Пусть T косовый. Тогда для всех $n \geq 2$ и $k \leq n-1$*

$$(T_1T_2\cdots T_n)(T_1T_2\cdots T_k) = (T_2T_3\cdots T_{k+1})(T_1T_2\cdots T_n).$$

В следующем утверждении, в случае, когда T косовый, мы приводим способ построения образующих некоторого однородного виковского идеала степени $n+1$ по образующим известного однородного виковского идеала степени n.

Предложение 3. *Пусть T косовый и подпространство $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$ порождает однородный виковский идеал степени n. Тогда подпространство*

$$\mathcal{I}_{n+1} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1T_2\cdots T_n)(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H})$$

порождает однородный виковский идеал степени $n+1$.

Доказательство. В соответсвии с Леммой 1

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1T_2\cdots T_n)(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Таким образом, остается убедиться, что

$$T_1T_2\cdots T_{n+1}(\mathcal{I}_{n+1}\otimes\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}\otimes\mathcal{I}_{n+1}. \tag{5}$$

В самом деле

$$\begin{aligned}
T_1T_2\cdots T_{n+1}(\mathcal{I}_{n+1}\otimes\mathcal{H}) &= T_1T_2\cdots T_{n+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_1T_2\cdots T_n)(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) =\\
&= (T_1T_2\cdots T_{n+1}-T_1T_2\cdots T_{n+1}T_1T_2\cdots T_n)(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) =\\
&= (T_1T_2\cdots T_{n+1}-T_2T_3\cdots T_{n+1}T_1T_2\cdots T_{n+1})(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) =\\
&= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_2T_3\cdots T_{n+1})T_1T_2\cdots T_{n+1}(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) =\\
&= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_2T_3\cdots T_{n+1})T_1T_2\cdots T_n(\mathcal{I}_n\otimes T(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}))\subset\\
&\subset (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_2T_3\cdots T_{n+1})T_1T_2\cdots T_n(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\subset\\
&\subset (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_2T_3\cdots T_{n+1})(\mathcal{H}\otimes\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}) =\\
&= \mathcal{H}\otimes(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}}-T_1T_2\cdots T_n)(\mathcal{I}_n\otimes\mathcal{H}) =\\
&= \mathcal{H}\otimes\mathcal{I}_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Теперь наша цель выяснить в каких случаях приведенная выше конструкция позволяет получить описание максимальных однородных виковских идеалов высших степеней. Нам понадобятся несколько несложных результатов.

Лемма 3. *Пусть оператор T косовый. Тогда для всех $n\geq 2$*

$$R_{n+1}T_1T_2\cdots T_n = T_1T_2\cdots T_n + T_1^2T_2\cdots T_n(R_n\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \tag{6}$$

Лемма 4. *Если T косовый, то при $n\geq 2$*

$$R_{n+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_1T_2\cdots T_n) = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}}-T_1^2T_2\cdots T_n)(R_n\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{H}}).$$

Положим $\mathcal{K}_2=\ker R_2$ и

$$\mathcal{K}_{m+1} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}}-T_1T_2\cdots T_m)(\mathcal{K}_m\otimes\mathcal{H}),\quad m\geq 2.$$

Поскольку в силу (5)

$$\mathcal{K}_{m+1}\subset\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}_m+\mathcal{K}_m\otimes\mathcal{H},$$

виковские идеалы, порожденные $\mathcal{K}_m$, $m\geq 2$, образуют убывающую цепочку

$$\langle\mathcal{K}_2\rangle\supset\langle\mathcal{K}_3\rangle\supset\cdots\supset\langle\mathcal{K}_m\rangle\supset\cdots$$

Предложение 4. *Преположим, что оператор коэффициентов T является косовым и для всех $m\geq 2$*

$$\ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}}-T_1T_2\cdots T_m)=\{0\}\quad \textit{и}\quad \ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}}-T_1^2T_2\cdots T_m)=\{0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{K}_m=\ker R_m,\ m\geq 2,$$

и $\mathcal{K}_m$ порождает максимальный однородный виковский идеал степени m для всех $m\geq 2$.

Доказательство. Пусть $\dim\mathcal{H} = d$. Если операторы $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1T_2\cdots T_m$, $m \geq 2$ обратимы, по определению $\mathcal{K}_m$ получим

$$\dim\mathcal{K}_m = d\cdot\dim\mathcal{K}_{m-1} = d^{m-2}\cdot\dim\ker R_2.$$

Поскольку $\mathcal{K}_m \subset \ker R_m$ (Лемма 1), остается показать, что для всех $m \geq 2$

$$\dim\ker R_m = d\cdot\dim\ker R_{m-1} = \ldots = d^{m-2}\dim\ker R_2.$$

Однако этот факт немедленно следует из равенства

$$R_{m+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1T_2\cdots T_m) = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1^2T_2\cdots T_m)(R_m\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{H}})$$

и обратимости операторов $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1T_2\cdots T_m$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1^2T_2\cdots T_m$. □

2. $*$-Представления виковского аналога CCR, аннулирующие однородные виковские идеалы.

В этой части мы рассматриваем виковский аналог CCR, обозначаемый ниже $\mathcal{A}_d^0$:

$$\mathcal{A}_d^0 = \mathbb{C}\left\langle a_i,\ a_i^* \mid a_i^*a_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + a_ja_i^*,\ i,j = 1,\ldots,d\right\rangle.$$

В этом случае оператор T является оператором перестановки тензорных множителей

$$Te_i\otimes e_j = e_j\otimes e_i,\ i,j = 1,\ldots,d$$

и максимальный квадратический виковский идеал $\mathcal{K}_2 = \ker R_2$ порождается элементами

$$A_{ij} = e_j\otimes e_i - e_i\otimes e_j,\quad i\neq j,\ i,j = 1,\ldots,d.$$

Действие оператора $T_1T_2\cdots T_k$ на произведении вида $B\otimes e_i$, $B\in\mathcal{H}^k$, $i = 1,\ldots,d$, имеет следующий вид

$$(T_1T_2\cdots T_k)(B\otimes e_i) = e_i\otimes B,\quad i = 1,\ldots,d.$$

Таким образом, если однородный виковский идеал $\mathcal{K}_m$ порождается семейством $\{B_j,\ j\in\mathcal{J}\}$, то

$$\mathcal{K}_{m+1} = \left\langle e_i\otimes B_j - B_j\otimes e_i,\ i = 1,\ldots,d,\ j\in\mathcal{J}\right\rangle$$

Напомним также, что

$$e_i^*\otimes B_j = \mu_0(e_i^*)\big(R_mB_j + \sum_{k=1}^{d} T_1T_2\cdots T_m(B_j\otimes e_k)\otimes e_k^*\big),\ i = 1,\ldots,d,\ j\in\mathcal{J}.$$

Поскольку

$$T_1T_2\cdots T_m(B_j\otimes e_k) = e_k\otimes B_j,\quad R_nB_j = 0,$$

и $\mu_0(e_i^*)e_k\otimes X = \delta_{ik}X$ для всех $X\in\mathcal{T}(\mathcal{H})$, получим

$$e_i^*\otimes B_j = B_j\otimes e_i^*,\quad i = 1,\ldots,d,\ j\in\mathcal{J}.$$

Иными словами, если мы рассмотрим фактор-алгебру алгебры $\mathcal{A}_d^0$ по идеалу, порожденному $\mathcal{K}_{m+1}$, то получим следующие коммутационные соотношения между образующими алгебры и образующими $\mathcal{K}_m$

$$a_i^* B_j = B_j a_i^*, \quad a_i B_j = B_j a_i, \ i = 1, \dots, d, \ j \in \mathcal{J}.$$

Ниже мы дадим описание неприводимых $*$-представлений $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующих идеалы $\mathcal{K}_m$, при $m = 2, 3, 4$.

2.1. **Представления $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующие квадратический и кубический идеалы.** Пусть $d = 2$. Тогда идеал $\mathcal{K}_2$ порождается элементом $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$ и фактор-алгебра $\mathcal{A}_2^0/\mathcal{K}_2$ изоморфна алгебре Вейля с двумя степенями свободы.

Известно, что фоковское представление является единственным интегрируемым неприводимым $*$-представлением алгебры Вейля. А именно, пространство представления равно $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ и

$$\pi_F(a_1) = a \otimes \mathbf{1}, \quad \pi_F(a_2) = \mathbf{1} \otimes a,$$

где $ae_n = \sqrt{n+1} e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\{e_n, \ n \in \mathbb{Z}_+\}$ – стандартный ортонормированный базис $l_2(\mathbb{Z}_+)$.

Далее, опишем неприводимые представления $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующие идеал $\mathcal{K}_3$. Идеал $\mathcal{K}_3$ порождается элементами

$$Aa_1 - a_1 A, \quad Aa_2 - a_2 A$$

где $A = a_2 a_1 - a_1 a_2$.

Поскольку $a_i^* A = A a_i^*$, $i = 1, 2$, элемент A принадлежит центру фактор-алгебры $\mathcal{A}_2^0/\mathcal{K}_3$.

Мы будем считать, что в интегрируемом представлении оператор A коммутирует с a_i, a_i^* в сильном смысле (т.е A допускает замыкание на области определния представления и для полярного разложения $A = U|A|$ оператор U и все спектральные проекторы $|A|$ принадлежат сильному коммутанту семейства $\{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*\}$, [8]). Тогда по Лемме Шура будем иметь $A = x\mathbf{1}$, $x \in \mathbb{C}$. Таким образом описание неприводимых представлений $\mathcal{A}_2^{(0)}$, аннулирующих идеал $\mathcal{K}_3$, сводится к описанию неприводимых представлений следующего набора коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} &a_i^* a_i - a_i a_i^* = \mathbf{1}, \quad i = 1, 2, \\ &a_1^* a_2 = a_2 a_1^* \quad a_2 a_1 - a_1 a_2 = x\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $A_{2,x}$ $*$-алгебру, порожденную (7) и $A_{2,0}$ $*$-алгебру, порожденную CCR с двумя степенями свободы.

Предложение 5. *$*$-Алгебры $A_{2,x}$ и $A_{2,0}$ изоморфны для всех $x \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{C}$ положим

$$d_1 = a_1 \quad \text{and} \quad d_2 = \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} a_2 - x a_1^*.$$

Очевидно, что d_1, d_2 порождают $A_{2,x}$ и

$$d_i^* d_i - d_i d_i^* = 1,\ i = 1,2, \quad d_1^* d_2 = d_2 d_1^*, \quad d_2 d_1 = d_1 d_2. \tag{8}$$

Наоборот, если c_1, c_2 образующие $A_{2,0}$, удовлетворяющие (8), то элементы

$$b_1 = c_1, \quad b_2 = \left(1+|x|^2\right)^{\frac{1}{2}} c_2 + x c_1^*$$

удовлетворяют (7) и порождают $A_{2,0}$. Таким образом $A_{2,x} \simeq A_{2,0}$. □

Из теоремы о единственности интегрируемого представения CCR с конечным числом степеней свободы получим следуещее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого $x \in \mathbb{C}$ существует единственное, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое представление $A_{2,x}$, заданное следующими формулами*

$$\begin{aligned} a_1 &= a \otimes \mathbf{1}, \\ a_2 &= \sqrt{1+|x|^2}\,\mathbf{1} \otimes a + x a^* \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

2.2. **Представления, аннулирующие $\mathcal{K}_4$.** Опишем теперь неприводимые представления $\mathcal{A}_2^0$, которые аннулируют идеал $\mathcal{K}_4$. Напомним, что

$$\mathcal{K}_4 = \langle B_i a_j - a_j B_i, \quad i,j = 1,2 \rangle,$$

где $B_i = A a_i - a_i A$, $i = 1,2$, являются образующими идеала $\mathcal{K}_3$. Поскольку также

$$a_j^* B_i = B_i a_j^*,\ i = 1,2,$$

элементы B_1, B_2 принадлежат центру фактор-алгебры $\mathcal{A}_2^0/\mathcal{K}_4$. Отождествив элементы алгебры с их образами в предствалении π, $\pi(\mathcal{K}_4) = \{0\}$, мы будем требовать, чтобы в интегрируемом представлении

$$B_1 = A a_1 - a_1 A = x_1 \mathbf{1}, \quad B_2 = A a_2 - a_2 A = x_2 \mathbf{1}$$

для некоторых x_1, $x_2 \in \mathbb{C}$. Напомним также, что в $\mathcal{A}_2^0$ имеют место равенства $a_i^* A = A a_i^*$, $i = 1,2$.

2.2.1. *Представления с $x_1 \neq 0$.* Зафиксируем $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ с $x_1 \neq 0$ и рассмотрим $*$-алгебру A_{x_1,x_2}, порожденную элементами a_1, a_2, A, удовлетворяющими коммутационным соотношениям вида

$$\begin{gathered} a_i^* a_i - a_i a_i^* = 1, \\ a_1^* a_2 = a_2 a_1^*, \quad A = a_2 a_1 - a_1 a_2, \\ A a_i - a_i A = x_i 1, \quad a_i^* A = A a_i^*, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{9}$$

Положим

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 \\ d_2 &= |x_1|^{-1}(A - x_1 a_1^*) \\ d_3 &= \Big(1+\frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(a_2 + \frac{x_2}{|x_1|}d_2^* - \frac{\overline{x}_1}{2}d_2^2 - |x_1|d_1^*d_2 - \frac{x_1}{2}(d_1^*)^2\Big) \end{aligned} \tag{10}$$

Ниже мы покажем, что d_i, $i = 1,2,3$, порождают A_{x_1,x_2} и удовлеворяют CCR с тремя степенями свободы.

Нам понадобится знание соотношений между элементами a_i и d_j, $i,j = 1,2$.

Lemma 1. *Элементы a_1, a_2, d_1, d_2 удовлетворяют соотношениям вида*

$$\begin{aligned} d_1^*a_2 &= a_2d_1^*, \\ a_2d_1 - d_1a_2 &= |x_1|d_2 + x_1d_1^*, \\ a_2^*d_2 &= d_2a_2^* + x_1d_2^* + |x_1|d_1, \\ a_2d_2 &= d_2a_2 - \frac{x_2}{|x_1|}. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Lemma 2. *Элементы d_i, d_i^*, $i = 1,2,3$, порождают A_{x_1,x_2} и удовлетворяют CCR с тремя степенями свободы, т.е. для всех $i,j = 1,2,3$ и $i \neq j$*

$$d_i^*d_i - d_id_i^* = 1, \quad d_i^*d_j = d_jd_i^*, \quad d_id_j = d_jd_i. \tag{12}$$

Доказательство. Непосредственная проверка с использованием соотношений (11). □

Обозначим A_3 алгебру, порожденную CCR с тремя образующими, и c_1, c_2, c_3 канонические образующие A_3. Построим элементы b_1, b_2, B, принадлежащие A_3 используя формулы

$$\begin{aligned} b_1 &= d_1, \\ B &= |x_1|d_2 + x_1d_1^*, \\ b_2 &= \Big(1+\frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}\Big)^{\frac{1}{2}}d_3 - \frac{x_2}{|x_1|}d_2^* + \frac{\overline{x}_1}{2}d_2^2 + |x_1|d_1^*d_2 + \frac{x_1}{2}(d_1^*)^2, \end{aligned} \tag{13}$$

Lemma 3. *Элементы b_1, b_2, B удовлетворяют (9) и порождают A_3.*

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Очевидно, из Леммы 2 и Леммы 3 следует, что $*$-алгебры A_{x_1,x_2} и A_3 изоморфны.

Таким образом, при изучении неприводимых представлений A_{x_1,x_2} мы можем иметь дело с образующими d_1, d_2, d_3. Мы будем называть представление $*$-алгебры A_{x_1,x_2}, $x_1 \neq 0$, аннулируещее $\mathcal{K}_4$, *интергрируемым*, если соответствующее представление $A_3 \simeq A_{x_1,x_2}$ является интегрируемым. Из единственности неприводимого интегрируемого представления CCR с конечным числом образующих, получим, что пространство неприводимого представления $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+)^{\otimes 3}$ и

$$d_1 = a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},\ d_2 = \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1},\ d_3 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a.$$

Вернувшись с помощью формул (10) к образующим a_1, a_2, a_3 получим следующий результат.

Теорема 2. *Для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $x_1 \neq 0$, существует единственное, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое $*$-представление A_{x_1,x_2}, определенное на образующих следующим образом*

$$\begin{aligned} a_1 =& a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},\\ a_2 =& \sqrt{1 + \frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}}\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a - \frac{x_2}{|x_1|}\mathbf{1} \otimes a^* \otimes \mathbf{1} + \frac{\overline{x}_1}{2}\mathbf{1} \otimes a^2 \otimes \mathbf{1} +\\ & \qquad + |x_1| a^* \otimes a \otimes \mathbf{1} + \frac{x_1}{2}(a^*)^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},\\ A =& |x_1| \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1} + x_1 a^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

2.2.2. *Представления с $x_1 = 0$.* Предположим теперь, что $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$. Тогда, как и в случае, рассмотренном выше, $A_{0,x_2} \simeq A_3$. Чтобы убедиться в этом достаточно выразить образующие a_1, a_2 через образующие d_1, d_2 и d_3, удовлетворяющие CCR, используя формулы (13) с заменой a_1 на a_2, a_2 на $-a_1$, x_1 на x_2, и полагая затем $x_1 = 0$. Заметим, что $(-a_1)a_2 - a_2(-a_1) = A$, и $Aa_2 - a_2 A = x_2$. Получим следующий результат.

Теорема 3. *Для любого $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$, существует единственное, с точностью, до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое $*$-представление A_{0,x_2}, определенное следующими формулами*

$$\begin{aligned} a_2 &= a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},\\ a_1 &= -\big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a + \frac{\overline{x}_2}{2}\mathbf{1} \otimes a^2 \otimes \mathbf{1} +\\ &\qquad + |x_2| a^* \otimes a \otimes \mathbf{1} + \frac{x_2}{2}(a^*)^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\big)\\ A &= |x_2| \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1} + x_2 a^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned}$$

В конце заметим, что если одновременно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то $Aa_i = a_i A$, $i = 1, 2$, и, следовательно, образ идеала $\mathcal{K}_3$ равен нулю. В этом случае интегрируемые неприводимые представления описаны в Теореме 1.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность М.А. Муратову и И.И. Карпенко за плодотворные дискуссии и помощь в подготовке работы.

Список литературы

[1] M. Bożejko and R. Speicher, *Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces* //Mat. Ann., **300**. - 1994. - P. 97–120.

[2] P.E.T. Jørgensen, D.P. Proskurin and Yu.S. Samoĭlenko, *The kernel of Fock representation of Wick algebras with braided operator of coefficients* // Pacific J. Math., **198**. - 2001. - P. 109–122.

[3] P.E.T.Jørgensen, L.M. Schmitt, and R.F.Werner, *Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering* //J. Funct. Anal., **134**. - 1995. - P. 33-99.

[4] W. Marcinek,*On commutation relations for quons* // Rep. Math. Phys., **41**. - 1998. - Vol. 2. - P. 155-172.

[5] V. Ostrovskyi and Yu. Samoilenko,*Introduction to the theory of representations of finitely presented algebras* – London: Gordon & Breach, 2000. – 261 p.

[6] D. Proskurin, *Homogeneous ideals in Wick $*$-algebras* // Proc. Amer. Math. Soc., **126**. - 1988. - Vol. 11. - P. 3371-3376.

[7] Pusz W. and Woronowicz S.L. *Twisted second quantization* // Rep. Math. Phys., **27**. - 1989. - Vol. 2. - P. 231-257.

[8] Schmüdgen K. *Unbounded operator algebras and representation theory* – Basel: Birkhäuser Verlag, 1990. – 400 P.

Проскурін Д.П. Про $*$-зображення віківського аналогу CCR//

В роботі вивчаються $*$-зображення віківського аналогу алгебри канонічних комутаційних співвідношень, що анулюють однорідні віківські ідеали степенів 3 *та* 4*. Наведено спосіб побудови спадного ланцюга однорідних віківських ідеалів зростаючих степенів.*

Ключові слова: деформації канонічних комутаційних співвідношень, віківські агебри, необмежені оператори

Proskurin D.P. On $*$-representations of Wick analogues of CCR//

In this paper we study $*$-representations of Wick analogue of algebra of canonical commutation relations, annihilating certain homogenenous Wick ideals of degrees 3 *and* 4*. The construction of descending chain of homogeneous Wick ideals of growing degrees is presented.*

Keywords: deformation of CCR algebra, Wick algebras, unbounded operator.