Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 23 (62). 2010 г. № 3. С. 131-135

УДК 537.86

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОЛЕ ПРОДОЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Пономаренко В.И., Попов В.В., Скальская О.Л.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: slavapop@gmail.com

Решена задача рассеяния в прямоугольном волноводе, содержащем тонкую диэлектрическую пластину. Показано, что диэлектрическую пластину можно рассматривать как предельно тонкий слой с эффективной диэлектрической проницаемостью, описываемой дельта-функцией Дирака. Получена связь между параметрами реальной пластины и эффективной диэлектрической проницаемостью предельно тонкого слоя.
Ключевые слова: диэлектрическая пластина, задача рассеяния, прямоугольный волновод.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие пластины диэлектрика с высокими значениями относительной комплексной диэлектрической проницаемости ε_r, $|\varepsilon_r| \geq 100$, именуемые далее диэлектрическими лентами (ДЛ), выполненные в виде электропроводящей бумаги либо получаемые методом напыления в вакууме, находят применение, в частности, в радиопоглощающих структурах [1, 2]. Для решения задач дифракции на таких структурах в случае, когда электромагнитная волна распространяется вдоль слоев, с целью упрощения решения в [3] предложено рассматривать ДЛ как области с эффективной диэлектрической проницаемостью, задаваемой дельта-функцией Дирака:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_0 \left[1 + \varepsilon \delta \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right) \right], \tag{1}$$

где x – координата в нормальном к ДЛ направлении, x_0 – положение средней плоскости ДЛ, ε_0 – диэлектрическая проницаемость в вакууме, a – параметр, имеющий размерность длины, введенный для придания безразмерности аргументу дельта-функции. Величину ε предложено вычислять из условия равенства статических поверхностных сопротивлений реальной ДЛ и сопоставляемого ей предельно тонкого слоя, именуемого далее дельта-плоскостью (ДП). Последнее, однако, допустимо лишь в случае, когда толщина ДЛ мала по сравнению с глубиной скин-слоя в ее материале, а также в предположении малости вещественной части ε_r по сравнению с мнимой, что выполняется не всегда (в частности, не имеет места в электропроводящей бумаге). Целью настоящей работы является вычисление на основе решения волноводной задачи рассеяния входящего в (1) параметра ε без указанных ограничений, а также оценка точности метода расчета рассеянного поля, основанного на замене ДЛ ее предельно тонким аналогом ДП.

1. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, РАЗДЕЛЕННОМ ДЕЛЬТА - ПЛОСКОСТЬЮ

Дельта-плоскость имеет координату x_0 по оси y прямоугольного волновода, рис. 1, и занимает область II ($z > 0$). В области I ($z < 0$) распространяется в положительном направлении оси z волна основного типа H_{10}.

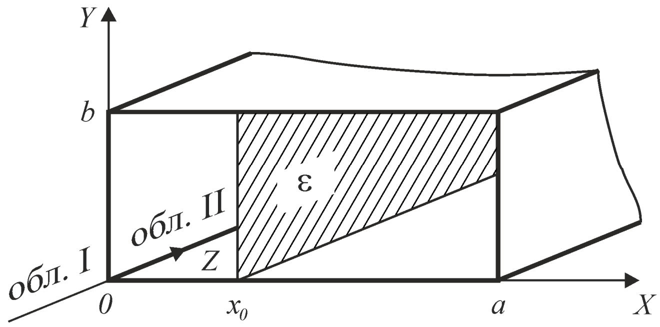

Рис. 1. Прямоугольный волновод, разделенный бесконечной дельта-плоскостью.

Ввиду однородности структуры и поля в волноводе вдоль оси y рассеянное поле в областях I, II является суперпозицией H-мод этих областей:

$$E_{\mathrm{I}y} = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta_{m,1} e^{i\gamma_1 z} + A_m e^{-i\gamma_m z}) \sin\frac{m\pi}{\alpha} x, \qquad \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2}, \tag{2}$$

$$E_{\mathrm{II}y} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \psi_n(x) e^{i\Gamma_n z}, \tag{3}$$

где λ – длина волны в вакууме. Система функций $\{\psi_n(x)\}$ задаёт распределение мод области II по оси X. Функции $\psi_n(x)$ и постоянные распространения Γ_n в области II определяются путём подстановки n-го члена ряда (2) в уравнение Гельмгольца. Получим:

$$\begin{cases} \psi_n''(x) + k_0 \nu^2 \psi_n(x) + k_0^2 \varepsilon \psi(b) \delta\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = 0, \\ \psi_n(0) = \psi_n(\alpha) = 0, \;\; \nu_n^2 = 1 - \Gamma_n^2 \end{cases} \tag{4}$$

Решение уравнения (4) аналогично нахождению функции Грина краевой задачи [4]:

$$\psi(x) = \frac{\pi\kappa\varepsilon\psi(b)}{\nu\sin(\pi\kappa\nu)} \times \begin{cases} \sin\left(\pi\kappa\dfrac{b}{a}\nu\right)\sin\left[\pi\kappa\nu\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\right], & x \ge b, \\ \sin\left(\pi\kappa\dfrac{c}{a}\nu\right)\sin\left(\pi\kappa\dfrac{x}{a}\nu\right), & x \le b. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь обозначено $\kappa = 2a/\lambda$, $c = a - b$. Полагая в (5) $x = b$, получим дисперсионное уравнение, определяющее величины $\Gamma_n^2 = 1 - \nu_n^2$:

$$\frac{\sin\left(\pi\kappa\frac{c}{a}\nu\right)\sin\left(\pi\kappa\frac{b}{a}\nu\right)}{\nu\sin(\pi\kappa\nu)} = \frac{1}{\pi\kappa\varepsilon}. \tag{6}$$

Налагая условие непрерывности компонент электрического и магнитного полей на границе $z = 0$ областей I и II, получим пару функциональных уравнений, проектируя которые на ортогональную систему функции $\psi_n(x)$, получим бесконечную СЛАУ относительно неизвестных амплитуд $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, состоящую из двух подсистем. После исключения величин $\{B\}$, получим следующую СЛАУ:

$$\frac{S_1}{\gamma_1 + \Gamma_n} = \sum S_m A_m \frac{1}{\gamma_m - \Gamma_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad 7)$$

Система вида (7) допускает аналитическое решение методом прямого обращения [5]. Получим

$$A_m = -\frac{\sin(\pi в/\alpha)}{\sin(m\pi в/\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n - \gamma_m}{\Gamma_n + \gamma_1} \prod_{n=1}^{\infty}{}^{(m)} \frac{\gamma_n + \gamma_1}{\gamma_n - \gamma_m} \tag{8}$$

Сходимость входящих в (8) бесконечных произведений доказывается с учетом асимптотического поведения Γ_n, γ_n при $n \to \infty$.

2. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, РАЗДЕЛЕННОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Пластина толщиной τ с диэлектрической проницаемостью, ε_r расположена в области II волновода $(z > 0)$, занимая в направлении оси x область $x_0 - \frac{\tau}{2} \le x \le x_0 + \frac{\tau}{2}$. Решение задачи о собственных H-модах волновода с диэлектрической пластиной приведено в [6]. Постоянные распространения определяются из трансцендентного уравнения более сложного по сравнению с (6) вида, которое при выполнении условия $\tau << a$ переходит в дисперсионное уравнение (6), если положить:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sqrt{\varepsilon_r}\,tg\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_r}\,\tau\right). \tag{9}$$

Задача рассеяния волны основного типа на пластине конечной толщины сводится методом сшивания, аналогично полученному выше решению задачи рассеяния на дельта-плоскости, к решению бесконечной СЛАУ, определяющей амплитуды рассеянного поля в области I. Последняя, в отличие от СЛАУ (7), не имеет аналитического решения, в связи с чем эта система решалась численно методом редукции. Численные расчеты проводились при $\frac{\tau}{\lambda} = 0.01$ в диапазоне длин волн, соответствующем одномодовому режиму волновода. Вещественная и мнимая части ε_r изменялись в пределах от 1 до 10^3. Сравнение значений амплитуды A_1 рассеянной моды основного типа, имеющей смысл коэффициента отражения, рассчитанной для пластины конечной толщины, со значениями, вычисленными по формуле (8), с подстановкой (9), показало, что разница не превышает 0.02, как для действительной, так и для мнимой частей коэффициента отражения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения задачи рассеяния волны основного типа в прямоугольном волноводе, содержащем тонкую диэлектрическую пластину, показано, что последнюю можно рассматривать как предельно тонкий слой с эффективной диэлектрической проницаемостью, описываемой дельта-функцией Дирака. Получена связь между параметрами реальной пластины и эффективной диэлектрической проницаемостью предельно тонкого слоя. Показано, что замена реальной пластины предельно тонкой позволяет получить аналитическое решение задачи рассеяния.

Результаты настоящей работы могут быть использованы разработчиками радиопоглощающих покрытий для моделирования структур, содержащих тонкие пластины с высокой диэлектрической проницаемостью.

Список литературы

1. Suomin C. Novel Planar Electromagnetic Absorber Designs Using Genetic Algorithms / Suomin C., Daniel S.W., John L.V. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – Vol. 54, No 6. – P. 1811-1817.
2. Costa F. Analysis and Design of Ultra Thin Electromagnetic Absorbers Comprising Resistively Loaded High Impedance Surfaces / Costa F., Monorchio A., Manara G. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2010. – Vol. 58, No 5. – P. 1551-1558.
3. Пономаренко В.И. Расчёт коэффициента отражения электромагнитных волн шахтной структурой из проводящих полос / Пономаренко В.И., Мировицкий Д.И., Бугадян И.Ф. // Радиотехника. – 1984. – Т. 39, № II – С. 68 – 71.
4. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции / Арсенин В.Я. – М.: Наука, 1966. – 367 с.
5. Митра Р. Аналитические методы теории волноводов / Митра Р., Ли С. – М.: Мир, 1974. – 324 с.
6. Левин Л. Теория волноводов: Монография / Левин Л. – М.: Радио и Связь, 1981. – 310 с.

Пономаренко В.І. Ефективна діелектрична проникність тонкої пластини в полі поздовжньої електромагнітної хвилі / Пономаренко В.І., Попов В.В., Скальска О.Л. // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), №3. – С. 131-135.
Розв'язано задачу розсіяння в прямокутному хвилеводі, що містить тонку діелектричну пластину. Показано, що діелектричну пластину можна розглядати як гранично тонкий шар з ефективною діелектричною проникністю, описуваної дельта-функцією Дірака. Отримано зв'язок між параметрами реальної пластини і ефективної діелектричної проникністю гранично тонкого шару.
Ключові слова: діелектрична пластина, задача розсіювання, прямокутний хвилевод.

Ponomarenko V.I. Effective dielectric permittivity of thin strip in the field of longitudinal electromagnetic wave / Ponomarenko V.I., Popov V.V., Skalskaya O.L. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010. – Vol. 23(62), No.3. – P. 131-135.
We solved the scattering problem in a rectangular waveguide with a thin dielectric strip. It has been shown, that the dielectric strip may be considered as an infinite thin layer with the effective permittivity in a form of Dirac delta-function. A relation between parameters of the real strip and the effective permittivity of the infinitely thin layer has been established.
Keywords: dielectric strip, scattering problem, rectangular waveguide.

Поступила в редакцию 03.11.2010 г.