Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 23 (62). 2010 г. № 3. С. 13-16

УДК 539. 391+514. 764.2

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ РАДИАЛЬНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В ПЛОСКОСТИ $z = 0$

Усачев А.С., Леляков А.П.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@tnu.crimea.ua, as213@mail.ru

В работе проведен анализ системы уравнений Эйнштейна и квадратичной формы, описывающих гравитационное поле радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны. Показана возможность существования большого числа вакуумных решений уравнений Эйнштейна, удовлетворяющих симметриям поставленной задачи.
Ключевые слова: нуль-струна, квадратичная форма, космология.

ВВЕДЕНИЕ

Теория струн является одной из самых сложных и амбициозных теорий в современной теоретической и математической физике. Одним из направлений теории струн является исследование роли этих объектов в космологии. В рамках различных моделей Теории Великого Объединения космические струны проявляются как топологические дефекты (наряду с доменными стенками и монополями) и поэтому представляют собой устойчивые во времени образования. Наряду со струнами во Вселенной могут существовать и так называемые нуль-струны, которые реализуют предел нулевого натяжения в теории струн [1-4]. Положение струны задается линией в D-мерном пространстве-времени. Эта линия, замкнутая для замкнутых струн и имеет концы для открытых. Траекторией струны является двумерная мировая поверхность, которая математически описывается функциями $x^m(\tau,\sigma)$, где τ и σ - параметры на мировой поверхности нуль-струны.

Целью работы является поиск возможных внешних решений системы уравнений Эйнштейна, описывающей гравитационное поле радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны в плоскости $z = 0$.

1. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ НУЛЬ-СТРУНЫ

В цилиндрической системе координат функции $x^m(\tau,\sigma)$, определяющие траекторию движения замкнутой, радиально расширяющейся нуль-струны в плоскости $z = 0$, имеют следующий вид

$$x^0 = t = \tau,\ \ x^1 = \rho = \tau,\ x^2 = \theta = \sigma,\ x^3 = z = 0,\ \tau \ge 0\,. \qquad (1.1)$$

Отметим, что для траектории (1.1) замкнутая нуль струна в каждый момент времени

t полностью лежит в плоскости $z=0$. Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса [4] нуль-струны, для (1.1), имеют следующий вид

$$T^{00}=T^{01}=T^{11}=\frac{\gamma}{\sqrt{-g}}\delta(\rho-t)\delta(z-z_0)\ , \tag{1.2}$$

где $g=|g_{mn}|$, g_{mn}; $m,n=0,1,2,3$ метрический тензор внешнего пространства-времени, $\gamma=const$. Поскольку для сохраняющейся траектории движения (1.1), все направления на гиперповерхностях $z=const.$ эквивалентны, то метрические функции не зависят от координаты θ, т.е.:

$$g_{mn}=g_{mn}(t,\rho,z)\,. \tag{1.3}$$

Тогда, используя инвариантность квадратичной формы относительно инверсии θ на $-\theta$ получаем

$$g_{02}=g_{12}=g_{32}=0\,. \tag{1.4}$$

Так же можно заметить, что квадратичная форма пространства времени в решаемой задаче должна быть инвариантна относительно инверсии $z\to -z$, тогда

$$g_{mn}(t,\rho,z)=g_{mn}(t,\rho,-z)\,. \tag{1.5}$$

Для (1.5)

$$g_{30}=g_{31}=0\,. \tag{1.6}$$

Окончательно, используя свободу выбора систем координат в Общей Теории Относительности (ОТО), частично зафиксируем ее следующим образом

$$g_{10}=0\,. \tag{1.7}$$

Учитывая (1.3)-(1.7) квадратичная форма для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2=e^{2\nu}(dt)^2-A(d\rho)^2-B(d\theta)^2-e^{2\mu}(dz)^2\,, \tag{1.8}$$

где $\nu,\ \mu,\ A,\ B,$ функции переменных t,ρ,z.

Движение нуль струны в псевдоримановом пространстве-времени определяется следующей системой уравнений:

$$x^{\alpha}{}_{,\tau\tau}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}{}_{,\tau}x^{\gamma}{}_{,\tau}=0,\ g_{\beta\gamma}x^{\beta}{}_{,\tau}x^{\gamma}{}_{,\tau}=0,\ g_{\beta\gamma}x^{\beta}{}_{,\tau}x^{\gamma}{}_{,\sigma}=0\,, \tag{1.9}$$

где $x^{\alpha}{}_{,\tau}=\partial x^{\alpha}/\partial\tau$, $x^{\alpha}{}_{,\sigma}=\partial x^{\alpha}/\partial\sigma$. Расписывая уравнения (1.9) для (1.8) с учетом того, что траектория (1.1) должна быть одним из частных решений уравнений движения, можно получить уравнения (связи) на метрические функции, при которых траектория движения нуль струны, задаваемая (1.1), остается неизменной:

$$e^{2\nu}=A\,,\quad \nu=\nu(\eta,z)\,,\ \text{где}\ \eta=t-\rho\,. \tag{1.10}$$

Таким образом, условием того, что траектория движения замкнутой нуль-струны, задаваемая (1.1), будет сохраняться при движении в собственном гравитационном поле, есть выполнение равенств (1.10). Используя (1.10) для (1.8) получим

$$dS^2=e^{2\nu}(dt^2-d\rho^2)-Bd\theta^2-e^{2\mu}dz^2\,. \tag{1.11}$$

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Из (1.2) видно, что все компоненты тензора энергии-импульса нуль-струны стремятся к бесконечности непосредственно на самой струне, а вне нее тождественно равны нулю. Анализ системы уравнений Эйнштейна построенной для квадратичной формы (1.11) позволил доопределить функциональную зависимость метрических функций искомой квадратичной формы, которая имеет вид

$$\nu = \nu(\eta, z),\ B = B(\eta, z),\ \mu = \mu(\eta, z)\,,$$

при этом система уравнений Эйнштейна приводится к следующему виду:

$$2\nu_{,\eta}\mu_{,\eta} + \nu_{,\eta}\frac{B_{,\eta}}{B} - \mu_{,\eta\eta} - \mu_{,\eta}^2 - \frac{1}{2}\frac{B_{,\eta\eta}}{B} + \frac{B_{,\eta\eta}^2}{4B^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$2\nu_{,zz} + \frac{B_{,zz}}{B} + 2\nu_{,z}^2 - \frac{B_{,z}^2}{2B^2} - 2\mu_{,z}\nu_{,z} - \frac{B_{,z}\mu_{,z}}{B} + \frac{B_{,z}\nu_{,z}}{B} = 0, \tag{2.2}$$

$$\nu_{,\eta z} + \frac{B_{,\eta z}}{2B} - \frac{B_{,z}B_{,\eta}}{4B^2} - \frac{B_{,\eta}\nu_{,z}}{2B} - \frac{B_{,z}\mu_{,\eta}}{2B} - \mu_{,\eta}\nu_{,z} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nu_{,zz} + 3\nu_{,z}^2/2 - \nu_{,z}\mu_{,z} = 0, \tag{2.4}$$

$$\nu_{,z}\left(\nu_{,z} + B_{,z}/B\right) = 0. \tag{2.5}$$

3. ВОЗМОЖНЫЕ ВНЕШНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Выполнить уравнение (2.5) можно одним из следующих способов

$$\nu_{,z} = 0\,,\ \nu_{,z} + B_{,z}/B = 0,\ \ \Rightarrow\ \ \nu = \nu(\eta),\ B = B(\eta), \tag{3.1}$$

$$\nu_{,z} = 0,\ \ \nu_{,z} + B_{,z}/B \neq 0\ \ \Rightarrow\ \ \nu = \nu(\eta),\ B = B(\eta, z), \tag{3.2}$$

$$\nu_{,z} \neq 0,\ \ \nu_{,z} + B_{,z}/B = 0\ \ \Rightarrow\ \ \nu = \nu(\eta, z),\ B = \alpha e^{-\nu}. \tag{3.3}$$

Для (3.1) уравнения (2.2)-(2.4) выполняются тождественно, и остается единственное уравнение (2.1), которое связывает между собой три искомые метрические функции $\nu(\eta)$, $\mu(\eta,z)$, и $B(\eta)$. Для случая (3.2) система уравнений Эйнштейна (2.1)-(2.4) сводится к единственному уравнению, связывающему метрические функции, которое имеет следующий вид:

$$2\nu_{,\eta}\mu_{,\eta} + 2\nu_{,\eta}\mathrm{N}_{,\eta}/\mathrm{N} - \mu_{,\eta\eta} - \mu_{,\eta}^2 - \mathrm{N}_{,\eta\eta}/\mathrm{N} = 0\,,\ \text{где}\,\mathrm{N} = \int e^{-\mu}\,dz. \tag{3.4}$$

Для случая (3.3) система уравнений (2.1)-(2.4) может быть приведена к виду:

$$3\alpha_{,\eta}\nu_{,\eta}/2\alpha - \left(\nu_{,\eta} - \mu_{,\eta}\right)^2 + \left(\alpha_{,\eta}/\alpha - \nu_{,\eta}\right)\left(\alpha_{,\eta}/\alpha + \nu_{,\eta}\right)/4 - \mu_{,\eta\eta} - \alpha_{,\eta\eta}/2\alpha + \nu_{,\eta\eta}/2 = 0, \tag{3.5}$$

$$2\nu_{,zz} + 3\nu_{,z}^2 - 2\nu_{,z}\mu_{,z} = 0,\ 3\nu_{,z}\left(\nu_{,\eta} - \alpha_{,\eta}/\alpha\right) + 2\left(\nu_{,\eta z} - \nu_{,z}\mu_{,z}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Интегрируя (3.6) получим

$$\nu_{,z}e^{3\nu/2-\mu} = C_3(\eta)\ \text{ и }\ \nu_{,z}^2 e^{3\nu-2\mu} = C_4\alpha^3\,. \tag{3.7}$$

Сравнивая полученные уравнений видно, что $C_4 = 1$, а $C_3 = \alpha^{3/2}$, поэтому

$$\nu_{,z} e^{3\nu/2} = \alpha^{3/2} e^{\mu}. \tag{3.9}$$

Поскольку функции $\nu(\eta, z)$ и $\mu(\eta, z)$ - четные по z, а функция $\nu_{,z}$ - нечетная по переменной z, то в левой части равенства (3.11) стоит нечетная по z функция, а в правой – четная по z, что невозможно. Следовательно, случай (3.3) не может быть реализован.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено общее выражение квадратичной формы, описывающей пространство-время радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны. Анализ системы уравнений Эйнштейна, построенной для искомой квадратичной формы, позволил доопределить функциональную зависимость функций метрического тензора внешнего пространства-времени. Показана возможность существования большого числа вакуумных гравитационных полей, удовлетворяющих симметриям поставленной задачи. Следующим этапом станет поиск критериев, позволяющих выделить из полученной совокупности единственное решение, которое описывает движение нуль-струны для исследуемой траектории.

Список литературы:

1. Peebles P.J.E. Principles of Physical Cosmology / Peebles P.J.E. – Princeton University Press, 1994. – 850 p.
2. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и космология / Линде А.Д – М.: Наука, 1990. – 275с.
3. Kibble T.W.B. Some implications of cosmological phase transitions / Kibble T.W.B. // Phys. Repts. – 1980. –Vol.67. –p. 183-189.
4. Vilenkin A. Cosmic strings / Vilenkin A. // Phys. Rev. – 1981. – Vol. 26 D. – p. 2082–2093.

Леляков О.П. Квадратична форма, яка описує гравітаційне поле замкненої нуль-струни, що радіально розширюється в площині $z = 0$ / Леляков О.П., Усачев О.С. // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), №3. – С. 13-16.

У роботі був проведений аналіз квадратичної форми, метричних функцій та системи рівнянь Ейнштейна, які описують гравітаційне поле замкненої нуль-струни, що радіально розширюється у площині $z = 0$. Була показана можливість існування великої кількості вакуумних розв'язків рівнянь Ейнштейна, які задовольняють симетріям поставленої задачі.

Ключові слова: нуль-струна, квадратична форма, космологія.

Lelyakov A.P. Quadratic form, describing gravitational field of the radially expanding closed null string / Lelyakov A.P., Usachyov A.S. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010 – Vol. 23(62), No.3. – P. 13-16.

In this work we have analyzed the quadratic form, metric functions and Einstein's equations, describing gravitational filed of the radially expanding closed null-string in the flat $z = 0$. There is also shown the existence of many gravitational vacuum fields, satisfying the symmetries of the problem.

Keywords: null string, quadratic form, cosmology.

Поступила в редакцию 04.10.2010 г.