Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 124–131.

УДК 517.968.7

О. И. Рудницкий, И. А. Романенко

АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ ПОГОРЕЛОВА ОКТАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП

Исследованы алгебры P^{O_m} многочленов Погорелова октаэдральных групп O_m, порожденных отражениями на унитарной плоскости. Найдены степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Ключевые слова: многочлены Погорелова, октаэдральных групп, порожденных отражениями, степени образующих алгебры.

Введение

Данная статья является продолжением начатого в [2] изучения строения алгебр P^G многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями, в случае, когда алгебра P^G не совпадает с алгеброй I^G инвариантов группы G. В настоящей заметке изучено строение алгебры многочленов Погорелова для октаэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости U^2.

Постановка задачи

Как и в [1], многочлены Погорелова группы G — это формы вида

$$P_{2r}^G(\vec{x}) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma\vec{s})^{2r}, \quad r \geq 1,$$

где $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{s}$ — единичный вектор нормали (с началом O) одной из осей, отражения σ относительно которых порождают группу G; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — ортонормированный базис U^2, определяющий прямоугольную декартову систему координат с началом O.

На унитарной плоскости U^2 существуют следующие конечные унитарные группы, порожденные отражениями: тетраэдральные — T_m, октаэдральные — O_m и икосаэдральные — I_m (m — число отражений, содержащихся в группе) [4].

Строение алгебры P^{T_m} для тетраэдральных групп T_m изучено в [2]. Данная статья посвящена изучению алгебр P^{O_m} многочленов Погорелова октаэдральных групп O_m.

В работе [1] установлено, что, в случае октаэдральных групп O_m, алгебра многочленов Погорелова P^{O_m} совпадает с алгеброй I^{O_m} инвариантов группы O_m для всех $m \neq 46$. При этом, найдены все образующие алгебр $P^{O_m} = I^{O_m}$ $(m \neq 46)$.

Цель настоящей заметки — построить образующие алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Доказана следующая

Теорема. Степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ равны 24, 48, 72, 96.

Доказательство теоремы

Группа O_{46} порождается тремя отражениями $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ второго, третьего и четвертого порядков относительно осей с уравнениями

$$v_4 x_1 - \varepsilon v_3 x_2 = 0, \quad v_2 x_1 + \eta v_1 x_2 = 0$$

и $x_1 = 0$ соответственно; здесь

$$v_1 = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}},$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad v_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

η — первообразный корень восьмой степени из единицы, $\varepsilon = \sqrt{-1}$ [4].

Отметим, что отражения σ_1 и σ_2 порождают группу симметрий O_{28}, σ_1 и σ_3 — группу O_{30}, а σ_2 и σ_3 — группу O_{34} [3]. Порядок группы равен 576. Она содержит 18, 16 и 12 отражений ворого, третьего и четвертого порядков соответственно. Показатели группы $m_1 = m_2 = 24$ [4].

Множество $\sigma\vec{s}$ распадается на три O_{46} - инвариантных подмножества:
S_1, состоящего из векторов

$$\varepsilon^h \eta^{l+1} \omega^t \vec{e}_i, \quad \frac{\varepsilon^h \eta^l \omega^t}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_1 \pm \varepsilon^i \vec{e}_2\right);$$

S_2 — из векторов

$$\omega^t \eta^l \left(v_2 \vec{e}_i + \varepsilon^h \bar{\eta}\, v_1 \vec{e}_j\right);$$

S_3 — из векторов

$$\omega^t \eta^l \left(v_4 \vec{e}_i + \varepsilon^h v_3 \vec{e}_j\right), \quad \eta^l \frac{\omega^t}{\sqrt{2}} \mu \left(\vec{e}_i \pm \eta \vec{e}_j\right),$$

где $l = \overline{1,8},\ t = \overline{1,3},\ h = \overline{1,4},\ i,j = 1,2\ (i \neq j)$, ω — первообразный корень третьей степени из единицы, μ — первообразный корень шестнадцатой степени из единицы.

Обозначим через ${P_{24}^{(i)}}^{O_{46}} = \sum\limits_{\vec{s} \in S_i} (\vec{x},\vec{s})^{24} \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$

С точностью до постоянного множителя они имеют вид

$$\begin{aligned}
{P_{24}^{(1)}}^{O_{46}} &= 1025(x_1^{24}+x_2^{24})+10626(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735471(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+\\
&+2704156x_1^{12}x_2^{12},\\
{P_{24}^{(2)}}^{O_{46}} &= 193(x_1^{24}+x_2^{24})-147246(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735471(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})-\\
&-386308x_1^{12}x_2^{12},\\
{P_{24}^{(3)}}^{O_{46}} &= 593(x_1^{24}+x_2^{24})+196098(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})-334305(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+\\
&+2704156x_1^{12}x_2^{12}.
\end{aligned}$$

В качестве образующих алгебры $I^{O_{46}}$ могут быть взяты, например, формы

$$P_{24}^{T_{22}}={P_{24}^{(1)}}^{O_{46}}+{P_{24}^{(2)}}^{O_{46}} \quad \text{и} \quad P_{24}^{O_{46}}={P_{24}^{(1)}}^{O_{46}}+{P_{24}^{(2)}}^{O_{46}}+{P_{24}^{(3)}}^{O_{46}}.$$

Любой элемент $P_{24r}^{O_{46}}\in P^{O_{46}},\ r>1$ представим в виде многочлена подходящей степени от образующих $P_{24}^{T_{22}}$ и $P_{24}^{O_{46}}$, то есть

$$P_{24r}^{O_{46}}=\varphi\left(P_{24}^{T_{22}},\,P_{24}^{O_{46}}\right)=\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{r+1-i}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{i-1}. \tag{1}$$

Числа λ_{ri} определяются из равенства (1), как равенства многочленов от переменных x_i $(i=1,\,2)$.

Используя равенство (1), будем последовательно представлять инвариант $P_{24t}^{O_{46}}\in P^{O_{46}}$, $t>1$, в виде многочлена подходящей степени от форм $P_{24r}^{O_{46}}$ $(1\le r<t)$:

$$\begin{aligned}
P_{24t}^{O_{46}} &= \varphi\left(P_{24r}^{O_{46}}\right)=\sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\prod_r\left(P_{24r}^{O_{46}}\right)^{n_r}=\\
&= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{n_1}\prod_{r\ne1}\left(\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{r+1-i}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{i-1}\right)^{n_r}=\\
&= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{n_1}\prod_{r\ne1}\Biggl(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1}n_{ri}=n_r}}P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1})\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}^{n_{ri}}\times\\
&\qquad\times\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{(r+1)n_r-\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r}\Biggr)=
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left((r+1)n_r - \sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}\right)} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{t-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg),$$

где $j=\overline{1,s(t)}$ при $s(t) = \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{n_r=0}^{\left[\frac{t-\sum\limits_{k>r} k\cdot n_k}{r}\right]} 1 & \text{, если } r>1, \\ 1 & \text{, если } r=1 \end{array} \right.$,

$P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) = \dfrac{(n_{r1}+\ldots+n_{rr+1})!}{n_{r1}!\cdot\ldots\cdot n_{rr+1}!}$.

Таким образом,

$$P_{24t}^{O_{46}} = \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{t-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg). \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) (при $r=t$) и (2), получим равенство многочленов от форм $P_{24}^{T_{22}}$, $P_{24}^{O_{46}}$.

Приравняв соответствующие коэффициенты при одинаковых одночленах в правой и левой частях равенства, получим систему $t+1$ уравнений относительно $s(t)$ неизвестных μ_j.

Столбцы матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ этой системы образованы коэффициентами в правой части равенства (2) при соответствующих одночленах вида $\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{\alpha}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\beta}$ у неизвестных μ_j. При этом, пусть порядок строк матрицы соответствует возрастанию степени α образующей $P_{24}^{T_{22}}$.

При $t=2$ получим несовместную систему трех уравнений с одним неизвестным, расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{22} \\ 0 & \lambda_{21} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{48}^{O_{46}}$ не выражается через форму $P_{24}^{O_{46}}$.

Если $t=3$, то получим несовместную систему четырех уравнений с двумя неизвестными, расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{72}^{O_{46}}$ не представима в виде многочлена третьей степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$ и $P_{48}^{O_{46}}$.

При $t=4$ имеем несовместную систему пяти уравнений относительно четырех неизвестных с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} & \lambda_{23}^2 & \lambda_{45} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} & 2\lambda_{22}\lambda_{23} & \lambda_{44} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} & \lambda_{22}^2+2\lambda_{21}\lambda_{23} & \lambda_{43} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} & 2\lambda_{21}\lambda_{22} & \lambda_{42} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}^2 & \lambda_{41} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{96}^{O_{46}}$ не представима в виде многочлена четвертой степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$ и $P_{72}^{O_{46}}$.

Если $t=5$, получим совместную систему шести уравнений относительно шести неизвестных с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} & \lambda_{23}^2 & \lambda_{45} & \lambda_{23}\lambda_{34} & \lambda_{56} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} & 2\lambda_{22}\lambda_{23} & \lambda_{44} & \lambda_{23}\lambda_{33}+\lambda_{22}\lambda_{34} & \lambda_{55} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} & \lambda_{22}^2+2\lambda_{21}\lambda_{23} & \lambda_{43} & \lambda_{23}\lambda_{32}+\lambda_{22}\lambda_{33}+\lambda_{21}\lambda_{34} & \lambda_{54} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} & 2\lambda_{21}\lambda_{22} & \lambda_{42} & \lambda_{23}\lambda_{31}+\lambda_{22}\lambda_{32}+\lambda_{21}\lambda_{33} & \lambda_{53} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}^2 & \lambda_{41} & \lambda_{22}\lambda_{31}+\lambda_{21}\lambda_{32} & \lambda_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}\lambda_{31} & \lambda_{51} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{120}^{O_{46}}$ выражается через формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$.

Отметим, что, в каждом из рассмотренных случаев, числа

$$\lambda_{ti} \neq 0 \ (t=2,\,3,\,4). \tag{3}$$

Для каждого следующего значения t количество строк матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ увеличивается на 1, а количество столбцов (слагаемых в равенстве (2)) — более, чем на 1. Поэтому $t+1<s(t)$ при $t>5$.

Покажем, что любой элемент $P_{24t}^{O_{46}}\in P^{O_{46}}$ $(t\geq 5)$ представим в виде (2) при $r=\overline{1,4}$. Для этого методом математической индукции докажем, что ранг матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ $(t\geq 5,\ r=\overline{1,4})$ равен $t+1$.

При $t=5$ нетрудно убедиться в том, что ранг матрицы $A_{6\times 6}$ равен шести.

Предположим, что при $t=k$ ранг матрицы $A_{(k+1)\times s(k)}$ равен $k+1$, и докажем, что при $t=k+1$ ранг матрицы $A_{(k+2)\times s(k+1)}$ равен $k+2$.

Элемент $P_{24(k+1)}^{O_{46}}$ имеет степень на 24 большую, чем элемент $P_{24k}^{O_{46}}$. Поэтому его можно представить в виде

$$P_{24(k+1)}^{O_{46}}=F_{24k}P_{24}^{O_{46}}+\varphi\left(P_{48}^{O_{46}},\,P_{72}^{O_{46}},\,P_{96}^{O_{46}}\right),$$

где форма F_{24k} имеет тот же вид относительно форм $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$, что и элемент $P_{24k}^{O_{46}}$ относительно этих же форм.

Тогда, на основании (2),

$$\begin{aligned}P_{24(k+1)}^{O_{46}} \;=\; & \sum_{\substack{n_r=\overline{0,k}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=k}}\mu_l\Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1}n_{ri}=n_r\\ r\neq 1}}\prod_{r\neq 1}P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1})\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}^{n_{ri}}\times\\ & \times\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{k-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1+1}\Bigg)+\\ & +\sum_{\substack{n_r=\overline{0,k+1}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=k+1\\ r\neq 1}}\mu_m\Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1}n_{ri}=n_r\\ r\neq 1}}\prod_{r\neq 1}P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1})\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}^{n_{ri}}\times\\ & \times\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{k+1-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r\right)}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r\right)}\Bigg),\end{aligned}$$

где $l=\overline{1,s(k)},\ m=\overline{s(k)+1,s(k+1)}$.

В первых $s(k)$ столбцах матрицы $A_{(k+2)\times s(k+1)}$ элементы, соответствующие $(k+1)$-й степени образующей $P_{24}^{T_{22}}$, равны нулю, так как $\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r\right)\geq 0$. Значит, в матрице $A_{(k+2)\times s(k)}$, образованной этими столбцами, $(k{+}2)$-я строка будет нулевой. Тогда, по предположению, $rangA_{(k+2)\times s(k)}=k+1$. Следовательно, среди $s(k)$ столбцов ровно $k+1$ линейно независимых.

В остальных $s(k+1)-s(k)$ столбцах элементы $(k+2)$-й строки будут отличны от нуля (см.(3)). Поэтому, добавив любой из этих столбцов к $k+1$ линейно независимым столбцам, получим $k+2$ линейно независимых столбцов. Таким образом, $rangA_{(k+2)\times s(k+1)} = k+2$.

Следовательно, любой элемент $P_{24t}^{O_{46}} \in P^{O_{46}}$ $(t \geq 5)$ представим в виде многочлена подходящей степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$, то есть

$$P_{24t}^{O_{46}} = \varphi\left(P_{24}^{O_{46}},\, P_{48}^{O_{46}},\, P_{72}^{O_{46}},\, P_{96}^{O_{46}}\right). \tag{4}$$

Алгебра $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46} порождается многочленами степеней 24, 48, 72, 96, а формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$— ее образующие.

Теорема доказана.

Отметим, что формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$, $P_{96}^{O_{46}}$ не являются алгебраически независимыми. Действительно, между образующими алгебры $P^{O_{46}}$ имеются сизигии, то есть существуют многочлены

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2,z_3) &= a_{11}z_1^6 + a_{12}z_1^4z_2 + a_{13}z_1^3z_3 + a_{14}z_1^2z_2^2 + a_{15}z_1z_2z_3 + \\ &\quad + a_{16}z_2^3 + z_3^2, \\ f_2(z_1,z_2,z_3,z_4) &= a_{21}z_1^6 + a_{22}z_1^4z_2 + a_{23}z_1^3z_3 + a_{24}z_1^2z_2^2 + a_{25}z_1^2z_4 + \\ &\quad + a_{26}z_1z_2z_3 + a_{27}z_2^3 + z_2z_4, \end{aligned}$$

такие, что подстановка $z_1 = P_{24}^{O_{46}},\ z_2 = P_{48}^{O_{46}},\ z_3 = P_{72}^{O_{46}},\ z_4 = P_{96}^{O_{46}}$ обращает их тождественно в ноль.

Значения коэффициентов a_{ij} $(i = 1,\, 2,\ j = \overline{1,7})$, найденные из соответствующего равенства (4), здесь не приведены из-за их громоздкости. Например, коэффициент a_{11} имеет вид:

$$a_{11} = \frac{468198532513568854520345044886896935661013933936007809666547915706059239161174504598013770308906316}{11262022626602494809105663582908985079392573672484364948121064906561842075825441745693875}$$

Вывод

В работе продолжено исследование строения алгебр многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями, в случае, когда алгебра P^G не совпадает с алгеброй I^G инвариантов группы G. Получено решение указанной задачи для октаэдральных групп O_m унитарной плоскости. А именно: найдены степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Список литературы

[1] Рудницкий О.И. *Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве.* – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Минск: БГУ, 1990. - 11 с.

[2] Рудницкий О.И., Романенко И.А. *О специальных инвариантах тетраэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. - 2006. - Т.19(58),N1. - с. 29 – 37.

[3] Crowe D.W. *Some tow-dimensional unitary groups generated by three reflections* // Can. J. Math. - 1961. - 13. - P. 418 – 426.

[4] Shephard G.C., Todd J.A. *Finite unitary reflection groups* // Can. J. Math. - 1954. - 6, N2. - P. 274 – 304.

Алгебри многочленів Погорелова октаедральних груп

Досліджені алгебри P^{O_m} многочленів Погорелова октаедральних груп O_m, що породжені віддзеркаленнями на унітарної площині. Знайдені степені твірних алгебри $P^{O_{46}}$ многочленів Погорелова групи O_{46}.

Ключові слова: многочлени Погорелова, октаедральних груп, породжені віддзеркаленнями, степені твірних алгебри.

Algebras of polynomials Pogorelov of the octahedral groups

The algebras P^{O_m} of the Pogorelov polynomials of the octahedral groups O_m generated by reflections on the unitary plane are investigated. The degrees of a generators of the algebra $P^{O_{46}}$ of the Pogorelov polynomials of the group O_{46} are found.

Keywords: Pogorelov polynomials, octahedral groups, reflection groups, degrees of a generators of the algebra.