Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 97–112.

УДК 517.98

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн

ПОРЯДКОВАЯ СХОДИМОСТЬ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

В настоящей работе приводятся необходимые и достаточные условия порядковой сходимости чезаровских средних для абсолютных сжатий в пространствах Орлича. Мы рассматриваем случай пространства с бесконечной мерой. Рассмотрение порядковой сходимости приводит как к доминантной, так и к индивидуальной эргодическим теоремам. Классические доминантная и индивидуальная эргодические теоремы в пространствах $\mathbf{L}_p$ *и классах Зигмунда* $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$ *также получаются как частные случаи. При исследовании используется техника симметричных пространств измеримых функций на пространстве с бесконечной мерой и эргодической теории.*

Ключевые слова: Пространства Орлича, классы Зигмунда, эргодические теоремы, порядковая сходимость

1. Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [1], [7] - [9], [13] - [17]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема, которая рассматривалась Г.Харди и Д.Литлвудом [6] для трансляций, Н.Винером [16] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [3] для положительных сжатий. Индивидуальная эргодическая теорема для сохраняющих меру преобразований была получена Биркгоффом [1], дальнейшее развитие этой теории можно найти в [10].

В работах [2], [21] - [23] рассматривались аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0,1]$ и на полуоси $[0,+\infty)$.

В данной статье приводятся необходимые и достаточные условия порядковой сходимости чезаровских средних для абсолютных сжатий в пространствах Орлича измеримых функций на пространствах с бесконечной мерой. Из этих результатов следуют, в частности, классические доминантная и индивидуальная эргодические теоремы для пространств $\mathbf{L}_p$ и классов Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [2], [4], [10], [12], [19].

2. Предварительные сведения

Пусть $(\mathbf{\Omega},\mu)$ пространство с бесконечной σ-конечной неатомической мерой, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega},\mu)$ пространство всех μ-измеримых почти всюду конечных функций f на $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega},\mu)$, $1 \le p \le +\infty$.

В случае, когда $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ и $\mu = \mathbf{m}$ — мера Лебега на $[0,+\infty)$, будем писать: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+,\mathbf{m})$.

Линейный оператор $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным сжатием или* $(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$*-сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$ так и в $\mathbf{L}_\infty$. Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех абсолютных сжатий.

Для любых $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим чезаровские средние

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

и соответствующую доминантную функцию

$$B_T f = \sup_{n\ge 1} A_{n,T}|f|.$$

Заметим, что $B_T f$ почти всюду конечна, то есть $B_T f \in \mathbf{L}_0$ для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ (см. [3]).

Напомним, что банахово пространство $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ измеримых функций из $\mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega},\mu)$ называется *перестановочно инвариантным (п.и.) или симметричным*, если выполнены следующие два условия:

(i). Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ почти всюду на $\mathbf{\Omega}$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|g\|_{\mathbf{E}}$;

(ii). Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Здесь f^* — невозрастающая, непрерывная справа перестановка функции $|f|$. Отметим, что невозрастающая перестановка f^* может быть определена формулой:

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0,+\infty)\colon \mathbf{n}_f(y) \le x\}, \quad x \in [0,\infty),$$

где $\mathbf{n}_f$ — функция распределения $|f|$:

$$\mathbf{n}_f(y) = \mu\{u \in \mathbf{\Omega}\colon |f(u)| > y\}.$$

Функции f и g называются *равноизмеримыми* ([19]), если $n_{|f|}(y) = n_{|g|}(y)$, то есть $f^* = g^*$.

Если $(\mathbf{\Omega}, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то п.и. пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ называется *стандартным.* Для п.и. пространства $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ на произвольном пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ существует единственное стандартное п.и. пространство $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ (называемое стандартной реализацией $\mathbf{E}$) такое, что

$$f \in \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f^* \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m}).$$

Здесь и далее мы не предполагаем, что пространство с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ сепарабельно и изоморфно стандартному пространству с мерой $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Известно, что для каждого п.и. пространства $\mathbf{E}$ имеет место вложение

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_0.$$

Мы будем использовать максимальную функцию Харди-Литлвуда, которая определяется для $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ следующим образом:

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x f^*(s)\, ds, \quad x \in (0, +\infty).$$

Известно, что $f^{**}(t)$ — непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция, $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$, для $u > f^*(\infty)$ имеет место равенство $f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u$ и $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$.

Важную роль в исследовании порядковой сходимости играет пространство $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon f^*(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f^*(x) = 0\}.$$

Это пространство является перестановочно инвариантным и для него верны следующие равенства, каждое из которых можно рассматривать как определение:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \mathbf{n}_f(y) < +\infty\,, \text{ для всех } y > 0\};$$

$$\mathcal{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty);$$

$$\mathcal{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1),$$

где через $cl_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ мы обозначаем замыкание банахова пространства $\mathbf{A}$ в банаховом пространстве $\mathbf{B}$.

Пусть для любой функции $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$:

$$D_t f(x) := f(x/t)\ ,\ 0 < x, t < \infty$$

Тогда $\{D_t\,,\, 0 < t < \infty\}$ — группа ограниченных линейных операторов $D_t \colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ на стандартном п.и. пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, соответствующем $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Функция $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$ является полумультипликативной на $(0,\infty)$, то есть

$$d_{\mathbf{E}}(s+t) \le d_{\mathbf{E}}(s)\, d_{\mathbf{E}}(t)$$

для всех s, t. Поэтому существуют пределы

$$p_{\mathbf{E}} := \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \sup_{t>1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} \quad , \quad q_{\mathbf{E}} := \lim_{t\to 0} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \inf_{0<t<1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} \ ,$$

которые называются *нижним и верхним индексами Бойда* п.и. пространства $\mathbf{E}$ (см. [19], [12]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты:

Предложение 1. *([21]) Если $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то для $x > f^{**}(+\infty)$ имеет место неравенство:*

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m} \le \mathbf{m}\{f^{**} > x\}. \tag{1}$$

Предложение 2. *([21]) Если $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то для $C > 1$ и $x > f^{**}(+\infty)$ имеет место неравенство:*

$$\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\} \le \frac{1}{(C-1)x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m}. \tag{2}$$

Теорема 1. *([4]) Пусть оператор $T \in \mathcal{PAC}$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}_0$ последовательность чезаровских средних*

$$A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Пусть θ — сохраняющее меру преобразование пространства $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и $T = T_\theta \in \mathcal{PAC}$ такой оператор, что

$$T_\theta f = f \circ \theta.$$

Так как $\mu(\mathbf{\Omega}) = \infty$, то из [10], §4.3 следует:

Предложение 3. *Для любого эргодического консервативного, сохраняющего меру преобразования θ существует $f \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{\Omega}, \mu)$ такая, что последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T_\theta}\}$ не сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.*

3. Пространства Орлича

Функция $\Phi: \ [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется *функцией Орлича*, если Φ — непрерывна слева, неубывающая, выпуклая функция, для которой $\Phi(0) = 0$. Предполагается также, что функция Орлича Φ — нетривиальна, т.е. существуют такие $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, что $\Phi(x_1) > 0$ и $\Phi(x_2) < +\infty$.

Левая производная $\Phi'(u)$ функции $\Phi(u)$ существует почти всюду, непрерывна слева и имеет место следующее представление:

$$\Phi(x) = \int_0^x \Phi'(u)\, du, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Предполагается, что $\Phi'(x) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = +\infty$.

Сопряженная функция Орлича Ψ определяется при помощи ее производной Ψ', которая является непрерывной слева обратной к функции Φ', то есть

$$\Psi(y) = \int_0^y \Psi'(v)\, dv, \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

Пространством Орлича называется множество

$$\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu) = \left\{ f \in \mathbf{L}_0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu < \infty \ \text{ для некоторого } \ a > 0 \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf \left\{ a > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu \leqslant 1 \right\}, \ f \in \mathbf{L}_0,$$

где предполагается, что $\inf \emptyset := \infty$.

Пространство Орлича $(\mathbf{L}_\Phi, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi})$ является перестановочно инвариантным и следовательно,

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{L}_\Phi \subset \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty.$$

В свою очередь, пространства $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$, $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, а также классы Зигмунда $\mathbf{L} \log^r \mathbf{L}$, являются пространствами Орлича (см. [4], [14], [15], [20]).

Ядром пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$, называется

$$\mathbf{H}_\Phi = \mathbf{H}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu) := \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu < \infty \ \text{ для всех } \ a > 0 \right\}.$$

$\mathbf{H}_\Phi$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}_\Phi$. Если $\Phi(x) < +\infty$ для всех $x > 0$, то ядро $\mathbf{H}_\Phi$ совпадает с замыканием $cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пересечения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{L}_\Phi$. Если $\Phi(x) = +\infty$ для некоторого $x > 0$, то $\mathbf{H}_\Phi = \{0\}$.

Отметим, что пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ является интерполяционным между пространствами банаховой пары $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_\infty$. Поэтому для любого $T \in \mathcal{PAC}$

$$T(\mathbf{L}_\Phi) \subseteq \mathbf{L}_\Phi,$$

и сужение $T|_{\mathbf{L}_\Phi} \colon \mathbf{L}_\Phi \to \mathbf{L}_\Phi$ является сжатием:

$$\|Tf\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f\|_{\mathbf{L}_\Phi}.$$

Как и всякое перестановочно инвариантное пространство, пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ является банаховой решеткой и подрешеткой решетки $\mathbf{L}_0$ относительно обычного частичного порядка на функциях.

Пространство $\mathbf{L}_0$ также является порядково σ-полной, и вполне порядково полной решеткой, поскольку мера μ σ-конечна. Это означает, что каждое порядково ограниченное подмножество $F \subset \mathbf{L}_0$ имеет наименьшую верхнюю грань $\bigvee F \in \mathbf{L}_0$ и наибольшую нижнюю грань $\bigwedge F \in \mathbf{L}_0$ (см. [12], [18]). Отметим, что

$$\bigvee F = ess \sup F, \quad \bigwedge F = ess \inf F.$$

Напомним еще, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов частично упорядоченного множества F называется (o)-*сходящейся или порядково сходящейся* к $f \in F$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$), если существуют такие $g_n \in F$ и $h_n \in F$, что

$$g_n \uparrow f, \quad h_n \downarrow f, \quad f = \bigvee_{n\geq 1} g_n = \bigwedge_{n \geq 1} h_n \in F.$$

Если F — σ-полная решетка, то последовательность $f_n \xrightarrow{(o)} f \in F$ тогда и только тогда, когда множество $\{f_n\,,\, n \geq 1\}$ порядково ограничено в F и

$$f = \bigvee_{n\geq 1} \bigwedge_{m \geq n} f_m = \bigwedge_{n\geq 1} \bigvee_{m\geq n} f_m \in F.$$

Таким образом, для каждого пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ имеем, что:

(i). $\mathbf{L}_\Phi$ является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$;

(ii). Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{L}_\Phi$) тогда и только тогда, когда

(1) $\{f_n\,,\, n \geq 1\}$ порядково ограничено в $\mathbf{L}_\Phi$ (то есть $|f_n| \leq g$ для всех n и некоторого $g \in \mathbf{L}_\Phi$), и

(2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_0$ (то есть $f_n \to f$ почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$).

Далее будут рассмотрены две взаимосвязанные задачи:

Проблема 1. Пусть $T \in \mathcal{PAC}$. Описать подмножество

$$\mathbf{L}_\Phi^T := \{f \in \mathbf{L}_\Phi \colon \{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty \ (o)\text{-сходится в } \mathbf{L}_\Phi \}.$$

Проблема 2. Описать подкласс всех пространств Орлича, таких что $\mathbf{L}_\Phi^T = \mathbf{L}_\Phi$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, то есть, для которых последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T} f\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ для всех $f \in \mathbf{L}_\Phi$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Отметим, что последовательность $\{A_{n,T} f\}_{n \geq 1}$ чезаровских средних

$$A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

(o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ тогда и только тогда, когда соответствующая доминантная функция $B_T f = \sup\limits_{n \geq 1} A_{n,T}|f|$ принадлежит $\mathbf{L}_\Phi$, и последовательность $\{A_{n,T} f\}_{n \geq 1}$ сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Это означает, что приведенная постановка задачи включает как доминантную эргодическую теорему, так и индивидуальную эргодическую теорему в случае классических $\mathbf{L}_p$ пространств, $1 \leq p < +\infty$ и классов Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L} \log^r \mathbf{L}$.

Определение 1. Будем говорить, что пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$

1) удовлетворяет *доминантной эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{DET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T} f$ является порядково ограниченной в $\mathbf{L}_\Phi$, то есть $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$;

2) удовлетворяет *индивидуальной эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{IET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T} f$ является порядково сходящейся в $\mathbf{L}_0$, т.е. сходящейся почти всюду на $\mathbf{\Omega}$, для любой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$;

3) удовлетворяет *порядковой эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$), если

$$\mathbf{L}_\Phi^T = \mathbf{L}_\Phi$$

для всех $T \in \mathcal{PAC}$, т.е., для любого $f \in \mathbf{L}_\Phi$ и $T \in \mathcal{PAC}$ последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T} f\}_{n \geq 1}$ порядково сходится в $\mathbf{L}_\Phi$.

Заметим что $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$ тогда и только тогда. когда $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{DET}$ и $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{IET}$.

Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$ пространство Орлича на пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$, и $\mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ — соответствующее ему стандартное пространство Орлича. Если функция $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то $f \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Обозначим

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}(\mathbf{\Omega}, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu) : \ f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})\}$$

и положим $\|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}} = \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi}$.

Тогда пространство $((\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}})$ является п.и. и $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{L}_\Phi$.

Наша цель — найти подпространство $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$. Для этого для любой функции Орлича Φ рассмотрим функцию ξ_Φ:

$$\xi_\Phi(x) = \Psi(\Phi'(x)) \ .$$

Если $y = \Phi'(x) < +\infty$, то в неравенстве Юнга

$$xy \le \Phi(x) + \Psi(y)$$

достигается равенство:

$$xy = \Phi(x) + \Psi(y),$$

и значит

$$\xi_\Phi(x) = x\Phi'(x) - \Phi(x).$$

Во многих важных случаях (но не всегда) ξ_Φ является функцией Орлича.

Возникает вопрос: существует ли функция Орлича Φ_H такая, что $\xi_{\Phi_H} = \Phi$, для данной функции Орлича Φ?

Предложение 4. *Пусть Φ — функция Орлича и*

$$\Phi_H(x) = x \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x), \tag{3}$$

причем интеграл сходится для некоторого достаточно малого $x > 0$. Тогда функция Φ_H — функция Орлича и $\xi_{\Phi_H} = \Phi$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ такое, что интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u} du$ сходится.

Ясно, что $\Phi_H(0) = 0$. Пусть $x_0 > 0$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \uparrow x_0} \Phi_H(x) = \lim_{x \uparrow x_0} \left[x \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right] =$$

$$= x_0 \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x_0 \int\limits_\delta^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x_0) =$$

$$= x_0 \int\limits_0^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x_0) = \Phi_H(x_0).$$

Следовательно, функция $\Phi_H(x)$ непрерывна слева на $(0, +\infty)$. Так как

$$\Phi'_H(x) = \left[x \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right]' = \left[x \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right]' =$$

$$= \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + x\frac{\Phi'(x)}{x} - \Phi'(x) = \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du \geq 0,$$

то функция $\Phi_H(x)$ неубывает на $[0, +\infty)$. Далее,

$$\Phi''_H(x) = \left[\int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du\right]' = \frac{\Phi'(x)}{x} \geq 0$$

при $x > 0$. Поэтому функция $\Phi_H(x)$ — выпуклая. Осталось заметить, что нетривиальность функции $\Phi_H(x)$ следует из нетривиальности функции $\Phi(x)$.

Так как

$$\Phi'_H(x) = \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du,$$

то

$$\xi_{\Phi_H} = x\Phi'_H(x) - \Phi_H(x) = x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du - x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \Phi(x) = \Phi(x).$$

□

Предложение 5. *([4]) Если $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и Φ — функция Орлича, то имеет место равенство:*

$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \Phi(|f|)d\mu = \int\limits_0^\infty \Phi'(x)\mu\{|f| > x\}\,dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для функций Орлича Φ и Φ_H имеют место равенства:*

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_H} \quad \text{и} \quad (\mathbf{H}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\Phi_H}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Орлича

$$\Phi_1(x) = \Phi_H(x) + \Phi(x) = x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du.$$

Ясно, что $\Phi(x) \leq \Phi_1(x)$ для любого $x > 0$. Поэтому,

$$\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset \mathbf{L}_\Phi$$

Покажем, что

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_1}$$

Пусть $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$. Тогда $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ и поэтому

$$\int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right)d\mathbf{m} < \infty.$$

для некоторого $c > 0$. Без ограничения общности, в дальнейшем полагаем, что $c = 1$, т.е.

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \mathbf{m}[\Phi(f^{**}) > x]dx < \infty.$$

Поэтому, в силу равенства (4)

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^{**} > x\}\,dx$$

и неравенства (1)

$$\frac{1}{x}\int_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m} \le \mathbf{m}\{f^{**} > x\}, \quad \text{если} \quad x > f^{**}(+\infty)$$

получим:

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^{**} > x\}\,dx \ge \int_0^\infty \Phi'(x)\left(\frac{1}{x}\int_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m}\right)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left(\int_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m}\right)\,dx = \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[x\cdot\mathbf{m}\{f^* > x\} + \int_x^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\,dt\right]\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^* > x\}\,dx + \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[\int_x^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\,dt\right]\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\left[\int_0^t \frac{\Phi'(x)}{x}\,dx\right]\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}[\Phi_1'(t) - \Phi'(t)]\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi_1'(t)\,dt - \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi_1'(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_1(f^*)d\mathbf{m}.$$

Следовательно

$$\int_0^\infty \Phi_1(f^*)d\mathbf{m} \le \int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} < \infty,$$

откуда $f^* \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ и следовательно, $f \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Таким образом, мы получили вложение

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} \subset \mathbf{L}_{\Phi_1}.$$

Пусть теперь $f \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Тогда $f^* \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, и поэтому

$$\int\limits_0^\infty \Phi_1(f^*) d\mathbf{m} < \infty.$$

Так как $\Phi \le \Phi_1$, то $\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset \mathbf{L}_\Phi$. Отсюда $f^* \in \mathbf{L}_\Phi$ и

$$\int\limits_0^\infty \Phi(f^*) d\mathbf{m} < \infty$$

В силу неравенства (2)

$$\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\} \le \frac{1}{(C-1)x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^* \, d\mathbf{m}, \quad C > 1,$$

имеем:

$$\int\limits_0^\infty \Phi_1(f^*) d\mathbf{m} = \int\limits_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left(\int\limits_{\{f^*>x\}} f^* \, d\mathbf{m} \right) dx \ge \int\limits_0^\infty \Phi'(x)(C-1)\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\} \, dx =$$

$$= (C-1) \int\limits_0^\infty \Phi'(x) \mathbf{m} \left\{ \frac{f^{**}}{C} \ge x \right\} dx = (C-1) \int\limits_0^\infty \Phi \left(\frac{f^{**}}{C} \right)(x) \, dx =$$

$$= (C-1) \int\limits_0^\infty \Phi \left(\frac{f^{**}}{C} \right) d\mathbf{m}.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^\infty \Phi \left(\frac{f^{**}}{C} \right) d\mathbf{m} < \infty.$$

Поэтому

$$\frac{f^{**}}{C} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$$

и значит $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$. Таким образом $f \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Тогда

$$\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}.$$

Объединяя полученные вложения, имеем

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_1}.$$

Наконец, так как $\Phi_1(x) = \Phi_H(x) + \Phi(x)$, то $\mathbf{L}_{\Phi_1} = \mathbf{L}_{\Phi_H}$. Поэтому

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_H}.$$

Равенство $(\mathbf{H}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\Phi_H}$ проверяется аналогично.

□

Предложение 6. *([12])*

Для пространств Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ индексы Бойда $p_{\mathbf{L}_\Phi}$ и $q_{\mathbf{L}_\Phi}$ совпадают с индексами растяжения функции Φ:

$$p_{\mathbf{L}_\Phi} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x} = \inf_{x>1} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x},$$

$$q_{\mathbf{L}_\Phi} = \lim_{x\to+0} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x} = \sup_{0<x<1} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x}$$

где

$$M_\Phi(x) = \sup_{0<y<\infty} \frac{\Phi(xy)}{\Phi(y)}.$$

Предложение 7. [19] *Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича, $d_{\mathbf{L}_\Phi}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{L}_\Phi\to\mathbf{L}_\Phi}$ и $p_{\mathbf{L}_\Phi}$ — нижний индекс Бойда. Тогда, следующие условия эквивалентны:*

(i). $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_\Phi$.

(ii). $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$.

(iii). $\int\limits_0^1 d_{\mathbf{L}_\Phi}(1/t)\,dt < \infty$.

(iv). $d_{\mathbf{L}_\Phi}(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что это предложение верно для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$.

Условие $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_\Phi$ (которое эквивалентно условию $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$) легко проверяется с помощью индекса

$$p(\Phi) := \sup\left\{p > 0\colon \inf_{x>0,y>1} \frac{\Phi(xy)}{x^p\Phi(x)} > 0\right\}.$$

Индекс $p(\Phi)$ был изучен в [2] в случае $\mu(\boldsymbol{\Omega}) < +\infty$, и в [5] при выполнении Δ_2-условия.

Предложение 8. *$p(\Phi) > 1$ тогда и только тогда, когда $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$*

Для конечной меры это утверждение доказано в [2], для случая бесконечной меры доказательство аналогично.

Из предложений 7 и 8 получаем теорему:

Теорема 3. *Пусть Φ — функция Орлича.*

(i). $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_\Phi$ тогда и только тогда, когда $p(\Phi) > 1$;

(ii). Если $p(\Phi) > 1$, то $(\mathbf{H}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{H}_\Phi$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{L}_\Phi$ *— пространство Орлича и* $T \in \mathcal{PAC}$.

Тогда из $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$ *следует, что доминантная функция* $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi$ *и*

$$\|B_T f\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$. Тогда $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\boldsymbol{\Omega}, \mu)$ и $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$. Следовательно,

$$(B_T f)^*(s) \leq f^{**}(s)$$

для любого $s \in (0, +\infty)$ (см. [21]).

Поэтому, $(B_T f)^* \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ и

$$\|(B_T f)^*\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi}.$$

Но функции $B_T f$ и $(B_T f)^*$ имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_T f)^*]^* = (B_T f)^*.$$

Поэтому $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi(\boldsymbol{\Omega}, \mu)$ и

$$\|B_T f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|(B_T f)^*\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}}.$$

$\square$

Замечание 2. (i). $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) > 0$ для любого $x > 0$.

Действительно, пусть $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$. Тогда $f^*(+\infty) = 0$ для каждой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$, и потому $\mathbf{L}_\Phi$ не содержит $\mathbf{1}$, т.е. $\mathbf{L}_\infty \nsubseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Обратно, пусть функция $f \in \mathbf{L}_\Phi$ такая, что

$$f^*(+\infty) = \lambda > 0$$

Тогда для функции $g \equiv \lambda$ имеем, что $g^* \leq f^* \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, и потому $g \in \mathbf{L}_\Phi$. Таким образом, $\mathbf{1} \in \mathbf{L}_\Phi$, т.е. $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_\Phi$. Следовательно, $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{1} \notin \mathbf{L}_\Phi$, т.е. когда $\mathbf{L}_\infty \nsubseteq \mathbf{L}_\Phi$.

В свою очередь, $\mathbf{L}_\Phi$ содержит единицу $\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда функция Орлича Φ равна нулю в некоторой окрестности нуля.

(ii). Так как $\mu(\boldsymbol{\Omega}) = \infty$, то $\mathbf{H}_\Phi$ никогда не содержит $\mathbf{1}$, и потому $\mathbf{H}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$.

Из теорем 1, 2 и 4 и предложения 3 получаем:

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{L}_\Phi$ *— пространство Орлича. Тогда для всех* $f \in \mathbf{L}_{\Phi_H} \cap \mathcal{R}_0$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *последовательность чезаровских средних* $\{A_{n,T} f\}$ *порядково сходится в* $\mathbf{L}_\Phi$.

Обратно, пусть $\mathbf{L}_\Phi$ *— такое пространство Орлича, что* $\mathbf{L}_\Phi \neq \mathbf{L}_{\Phi_H} \cap \mathcal{R}_0$. *Тогда, существуют* $f \in \mathbf{L}_\Phi$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *такие, что последовательность* $\{A_{n,T} f\}$ *не является порядково сходящейся в* $\mathbf{L}_\Phi$.

Теорема 5 решает проблему 1. Решением проблемы 2 является следующая теорема:

Теорема 6. *Для пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ выполняется порядковая эргодическая теорема ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$) тогда и только тогда, когда $p(\Phi) > 1$ и $\Phi(x) > 0$ для всех $x > 0$.*

Для ядер пространств Орлича результаты аналогичны.

Теорема 7. (i). *Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича и $\mathbf{H}_\Phi$ — его ядро. Тогда для всех $f \in \mathbf{H}_{\Phi_H}$ и $T \in \mathcal{PAC}$ последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}$ порядково сходится в $\mathbf{H}_\Phi$;*

(ii). *Для $\mathbf{H}_\Phi$ выполняется порядковая эргодическая теорема ($\mathbf{H}_\Phi \in \mathcal{OET}$) тогда и только тогда, когда $p(\Phi) > 1$.*

Классы Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}, \quad 0 \le r < +\infty$

Рассмотрим, в частности, важный класс пространств Орлича $\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_r(\boldsymbol{\Omega}, \mu)$, которые называют обычно классами Зигмунда. Эти пространства строятся по следующим функциям Орлича:

$$\Phi_r(x) := \begin{cases} 0 & ,0 \le x \le 1 \\ x\log^r x & ,1 < x < \infty \end{cases} \quad , \quad 0 < r < +\infty$$

и

$$\Phi_0(x) := \begin{cases} 0 & ,0 \le x \le 1 \\ x - 1 & ,1 < x < \infty \end{cases}$$

Мы полагаем $\mathcal{Z}_r := \mathbf{L}_{\Phi_r} = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$, $\mathcal{R}_r := \mathbf{H}_{\Phi_r}$ при $0 < r < \infty$ и

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbf{L}_{\Phi_0} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty.$$

Отметим, что ядро $\mathcal{Z}_0$ совпадает с $\mathcal{R}_0$. Прямое вычисление показывает, что $\xi_{\Phi_r} = \Phi_{r-1}$ для любого $r > 1$. В следующем предложении приведены некоторые свойства классов Зигмунда и их ядер.

Предложение 9. *Для всех $0 \le r < +\infty$:*

(i). *$(\mathcal{Z}_r)_{\mathbf{H}} = \mathcal{Z}_{r+1}$ и $(\mathcal{R}_r)_{\mathbf{H}} = \mathcal{R}_{r+1}$ для всех $0 \le r < +\infty$;*

(ii). *$\mathcal{Z}_r \cap \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_r = cl_{\mathcal{Z}_r}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ для всех $0 \le r < +\infty$;*

Из теорем 6 и 7 для любых $0 \le r < +\infty$ имеем:

Следствие 1. (i). *Если $f \in \mathcal{Z}_{r+1}$, то последовательность средних $\{A_{n,T}f\}$ порядково ограничена в $\mathcal{Z}_r$.*

(ii). *Если $f \in \mathcal{R}_{r+1}$, то последовательность средних $\{A_{n,T}f\}$ порядково сходится в $\mathcal{Z}_r$.*

Пространства $\mathbf{L}_p$

Для пространств $\mathbf{L}_p$ индексы Бойда совпадают:

$$p_{\mathbf{L}_p} = q_{\mathbf{L}_p} = p$$

для каждого $1 \leq p \leq +\infty$. При $p > 1$ выполняется равенство:

$$(\mathbf{L}_p)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_p,$$

в то время как

$$(\mathbf{L}_1)_{\mathbf{H}} = \mathcal{Z}_1 \not\subset \mathbf{L}_1$$

Таким образом, имеет место:

Следствие 2. (i). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{OET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p < +\infty$.

(ii). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{DET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p \leq +\infty$.

(iii). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{IET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 \leq p < +\infty$.

Список литературы

[1] Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.

[2] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.

[3] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.

[4] Edgar G.A., Sucheston L. Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.

[5] A. Florenza, M. Krbec. Indeces of Orlicz spaces and some applications. Comm. Math. Univ. Corolinae, 38(1997), 433–451.

[6] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.

[7] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators // J. Reinc. Ang. Math. — 1960. — No. 205. — P. 101–106.

[8] Hopf E. The general temporally descrete Markov process // J. Rat. Meca. Anal. — 1954. — No. 3. — P. 13–45.

[9] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 295–300.

[10] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.

[11] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I. Sequemce Spaces. Springer, 1979.

[12] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.

[13] von Neumann J. Proof of the qlasiergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1932. — No. 18. — P. 70–82.

[14] M.M. Rao. App;ications of Orlicz spaces. M.Dekker, New-York, 2002.

[15] M.M. Rao, Z.D.Ren. Theory of Orlicz spaces. M.Dekker, Inc., New-York, 1991.
[16] Weiner N. The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.
[17] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 292–294.
[18] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ — Москва: Наука, 1977. — 742 с.
[19] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
[20] M.A. Krasnoselskii, Ya.B. Rutitzkii. Convex functions and Orlicz spaces. Noordhoff, 1961.
[21] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.
[22] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.
[23] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.

Порядкова збіжність в єргодичних теоремах в просторах Орлича

У даній роботі наданні необхідні та достатні умови порядкової збіжності середніх Чезаро для абсолютних стисків в просторах Орліча. Розглядаються простори з нескінченной мірой. Вивчення порядкової збіжності дозволяє довести класичні домінантну та індівідуальну єргодичні теореми в просторах $\mathbf{L}_p$, *та класах Зігмунда* $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$ *як окремі випадки. При дослідженні використана техніка симетричних просторів вимірних функцій на просторах з нескінченной мірой і ергодичной теории.*

Ключові слова: Простори Орліча, класи Зігмунда, порядкова збіжність, єргодичні теореми

Order Ergodic Theorems in Orlicz spaces

In this work we study the order convergence of Cesáro averages in Orlicz spaces. We investigate the case, when the considered measure is infinite. The problems of order convergence is connected with both Dominated and Individual Ergodic Theorems. In particular, the classical Dominated and Individual Ergodic Theorems for spaces $\mathbf{L}_p$ *and Zygmund classes* $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$ *are obtained as the partial cases. The method's of the rearrangements invariant spaces and of Ergodic Theory are used.*

Keywords: Orlicz spaces, Zygmund classes, order convergence, Ergodic Theorems