Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 66–77.

УДК 517.968.7

О.А. Дудик

О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследованы нормальные колебания маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Изучены свойства спектра, доказана теорема о базисности системы корневых элементов, получена асимптотика собственных значений. Приведена теорема Лагранжа о неустойчивости.

Ключевые слова: нормальные колебания, собственные значения, асимптотика, неустойчивость.

Введение

В работе исследованы нормальные колебания маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Изучены свойства спектра, получена асимптотика собственных значений. Доказано, что система корневых элементов образует базис Абеля–Лидского по норме графика либо, с точностью до конечного дефекта, в пространстве с нормой графика. Рассмотрен случай, когда оператор потенциальной энергии имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Приведено обращение теоремы Лагранжа об устойчивости изучаемой гидромеханической системы.

1. Постановка спектральной задачи и некоторые свойства ее решений

Сформулируем полную постановку задачи о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Эту постановку можно найти, например, в [1], с. 23–24. Имеем

$$\rho\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{u})d\Omega+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-\rho g\int\limits_{\Gamma}(\vec{e_3}\times\vec{r})\zeta d\Gamma=\vec{M}(t), \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\nabla p=\mu\triangle\vec{u}+\rho\vec{f},\quad \mathrm{div}\vec{u}=0\quad (\text{в }\Omega), \tag{2}$$

$$\vec{u}=\vec{0}\quad (\text{на } S),\quad \mu(u_{j,3}+u_{3,j})=0\quad (j=1,2;\ \text{на }\Gamma), \tag{3}$$

$$-p+2\mu u_{3,3}=-\mathcal{L}_\sigma\zeta-\rho g\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e_3}\right]:=\sigma\Delta_\Gamma\zeta-a_\Gamma\zeta-\rho g\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e_3}\right]\quad (\text{на }\Gamma), \tag{4}$$

$$a_\Gamma=a_\Gamma(x):=-\sigma(k_1^2+k_2^2)+\rho g\cos\widehat{(\vec{n},\vec{e_3})},\quad x\in\Gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}=:\gamma_n\vec{u}\quad (\text{на }\Gamma), \tag{6}$$

$$\zeta(t,\hat{\xi})=0\quad (\text{на }\partial\Gamma),\quad \int\limits_{\Gamma}\zeta d\Gamma=0, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3, \tag{8}$$

$$\vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x),\quad x\in\Omega;\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,$$
$$\zeta(0,\hat{\xi})=\zeta^0(\hat{\xi}),\quad \hat{\xi}=\left(\xi^1,\xi^2\right)\in\Gamma. \tag{9}$$

В уравнениях (1)–(9): ρ — плотность жидкости, Ω — область, занятая жидкостью, она ограничена твердой стенкой S и равновесной поверхностью Γ, $\alpha>0$ — коэффициент трения в шарнире, $\mu=\nu\rho>0$ — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\nu>0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле, $u_{j,k}$ — ковариантная производная вектора u_j по переменной ξ^k, $\sigma>0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе "жидкость–газ", $k_1(x)$ и $k_2(x)$, $x\in\Gamma$, — главные кривизны равновесной поверхности Γ, Δ_Γ — дифференциальный оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ, a_Γ — заданная формулой (5) функция, определяемая формой равновесной поверхности Γ, $P_2\vec{\delta}(t)=\sum\limits_{k=1}^{2}\delta_k(t)\vec{e}_k$, — проекция вектора углового перемещения $\vec{\delta}$ на плоскость Ox_1x_2, $m>0$ — масса всей системы, $\vec{u}(t,x)$ — поле относительных скоростей, $\vec{J}$ — тензор инерции системы, $\vec{\omega}(t)$ — вектор угловой скорости, ζ — функция, описывающая отклонение вдоль нормали $\vec{n}$ движущейся поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ.

Воспользуемся методом вспомогательных краевых задач С.Г. Крейна (см., например, [4], с. 277–280) и осуществим переход от задачи (1)–(9) к задаче Коши для системы дифференциально–операторных уравнений:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}+\rho\frac{d\vec{w}}{dt}+\rho P_{0,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\rho\nu A\vec{v}=\rho P_{0,S}\vec{f}, \tag{10}$$

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} + \nu^{-1} V B_\sigma \, \gamma_n \, (\vec{v} + \vec{w}) + \rho \nu^{-1} g V \theta \, [(P_2 \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3] = \vec{0}, \tag{11}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega [\vec{r} \times (\vec{v} + \vec{w})] \, d\Omega + \vec{J} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha \vec{\omega} + mglP_2 \vec{\delta} - \rho g \int\limits_\Gamma (\vec{e}_3 \times \vec{r}) \, \zeta \, d\Gamma = \vec{M}(t), \tag{12}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n \, (\vec{v} + \vec{w}) = 0, \;\; \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta} = P_2 \vec{\omega}, \;\; \frac{d}{dt} \delta_3 = \omega_3, \tag{13}$$

$$\vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \;\; \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \;\; \zeta(0) = \zeta^0, \;\; \vec{v}(0) = \vec{u}^0 - \vec{w}(0), \tag{14}$$

$$\vec{w}(0) = -(\rho\nu)^{-1} \, V \, B_\sigma \, \zeta^0 - g\nu^{-1} V \theta \left[(P_2 \vec{\delta}^0 \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3 \right].$$

Здесь оператор $B_\sigma := \theta \mathcal{L}_\sigma \theta$, θ — ортопроектор гильбертова пространства $L_2(\Gamma)$ на его подпространство $L_{2,\Gamma}$ коразмерности 1, состоящее из элементов ζ, удовлетворяющих условию сохранения объема жидкости в процессе малых движений; $P_{0,S}$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ соленоидальных полей с функциями, обращающимися в нуль на Γ; поле скоростей представимо в виде суммы $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, где $\vec{v} := (\mu A)^{-1} \left\{ -\rho d\vec{u}/dt - \rho P_{0,\,S} \, (d\vec{\omega}/dt \times \vec{r}) + \rho P_{0,\,S} \vec{f} \right\}$ является решением первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна, а $\vec{w} := \mu^{-1} V \left(-B_\sigma \zeta - \rho g \theta \left[(P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3 \right] \right)$ — решение второй вспомогательной задачи С.Г. Крейна. Следует отметить, что оператор A — самосопряженный положительно определенный оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A) = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ (см. [4], с. 278-279); при этом $0 < A^{-1}$ — компактный оператор.

Определение 1. Назовем решения однородной системы уравнений (1)–(9), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$, нормальными движениями исследуемой гидромеханической системы. $\square$

Для определения искомых амплитудных элементов и спектрального параметра λ возникает следующая однородная спектральная краевая задача:

$$-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \lambda \rho \left(\vec{u} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right), \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на} \quad S), \tag{15}$$

$$\alpha \vec{\omega} + mglP_2 \vec{\delta} - \rho g \int\limits_\Gamma (\vec{e}_3 \times \vec{r}) \, \zeta \, d\Gamma = \lambda \left(\vec{J} \vec{\omega} + \rho \int\limits_\Omega (\vec{r} \times \vec{u}) \, d\Omega \right), \tag{16}$$

$$\mu \, (u_{j,3} + u_{3,j}) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad -p + 2\mu \, u_{3,3} = -\mathcal{L}_\sigma \zeta - \rho \, g \, \left[(P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3 \right] \quad (\text{на} \quad \Gamma), \tag{17}$$

$$u_n = -\lambda \zeta \quad (\text{на} \quad \Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на} \quad \partial\Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad P_2 \vec{\omega} = -\lambda P_2 \vec{\delta}, \quad \omega_3 = -\lambda \delta_3. \tag{18}$$

Задачу (15)–(18) можно изучать теми же операторными методами, которые используются в [1] при исследовании начально–краевой задачи (1)–(9). В частности, начально–краевой задаче (10)–(14) отвечает спектральная краевая задача

$$\rho\nu A\vec{v} = \lambda\rho\left(\vec{v} + \vec{w} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right), \tag{19}$$

$$\rho\vec{w} = -\nu^{-1}V\left\{B_\sigma\zeta + \rho\, g\,\theta\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right\}, \tag{20}$$

$$\alpha\vec{\omega} + mglP_2\vec{\delta} - \rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta\, d\Gamma = \lambda\left[\rho\int\limits_\Omega\left(\vec{r}\times(\vec{v}+\vec{w})\right)\,d\Omega + \vec{J}\vec{\omega}\right], \tag{21}$$

$$\gamma_n(\vec{v}+\vec{w}) = -\lambda\zeta, \quad P_2\vec{\omega} = -\lambda P_2\vec{\delta}, \quad \omega_3 = -\lambda\delta_3. \tag{22}$$

Далее преобразуем систему уравнений (19)–(22), введя поле $\vec{u} = \vec{v}+\vec{w}$ и используя векторно–матричную форму записи для искомых амплитудных элементов.

Из (19) имеем

$$\mu\vec{v} = \lambda\rho A^{-1}\left(\vec{v} + \vec{w} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right), \quad \mu = \rho\nu; \tag{23}$$

складывая левые и правые части этого соотношения и (20), будем иметь после замены $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$$\mu\vec{u} = \lambda\rho A^{-1}\left(\vec{u} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right) - V\left\{B_\sigma\zeta + \rho\, g\,\theta\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right\}. \tag{24}$$

Вместе с (21) это уравнение можно переписать в векторно–матричной форме в следующем виде

$$\begin{pmatrix}\mu I & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\mathcal{B}_\sigma\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\mathcal{C}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\mathcal{B}_\sigma$ — оператор потенциальной энергии,

$$\mathcal{B}_\sigma\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_\sigma\zeta + \rho g\theta\left[\left(P_2\vec{\delta}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right]\\ -\rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta d\Gamma + mglP_2\vec{\delta}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а $\mathcal{C}$ — оператор кинетической энергии исследуемой гидромеханической системы,

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\vec{u} + \rho P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\\ \rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times\vec{u})\,d\Omega + \vec{J}\vec{\omega}\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Запишем еще первые два соотношения в (22) в векторно–матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\gamma_n & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Кроме того, остается еще последняя связь (22):

$$\omega_3 = -\lambda\delta_3. \tag{29}$$

Таким образом, далее следует изучать нетривиальную спектральную задачу (25), (28) и тривиальное соотношение (29).

Если задача (25), (28) имеет решение для некоторого $\lambda \neq 0$, то можно исключить из рассмотрения столбец $\left(\zeta;\, P_2\vec{\delta}\right)^t$ и получить уравнение для искомого столбца $(\vec{u};\vec{\omega})^t$. В самом деле, находя $\left(\zeta;\, P_2\vec{\delta}\right)^t$ из (28) и подставляя его в (25), получим

$$\begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \mathcal{B}_\sigma \begin{pmatrix} \gamma_n & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Преобразуем это уравнение к более симметричному виду путем замены

$$\vec{u} = A^{-1/2}\vec{\eta}, \quad \vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega). \quad (31)$$

Тогда, после применения слева оператора $\operatorname{diag}\left(A^{1/2}; I\right)$, будем иметь уравнение

$$\begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda^{-1} \begin{pmatrix} Q^* & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \mathcal{B}_\sigma \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}, \quad Q^* = A^{1/2}V, \quad Q = \gamma_n A^{-1/2}. \quad (32)$$

Эта форма записи спектральной задачи удобна тем, что здесь все коэффициенты — операторные матрицы — являются самосопряженными, т.е. исследуемой задаче отвечает самосопряженный операторный пучок (оператор–функция, зависящая от λ)

$$\mathcal{L}(\lambda) := \operatorname{diag}(\mu I;\, \alpha) - \lambda \operatorname{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right) \mathcal{C} \operatorname{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right) -$$

$$-\lambda^{-1} \operatorname{diag}(Q^*; P_2)\, \mathcal{B}_\sigma \operatorname{diag}(Q;\, P_2) \equiv \left(\mathcal{L}(\overline{\lambda})\right)^*, \quad (33)$$

действующий в гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$. Рассмотрим, опираясь на вид (25), (28), (29), а также на вид (32), (29) исследуемой спектральной задачи, некоторые простые свойства ее решений.

Теорема 1. *Число $\lambda = 0$ всегда является собственным значением задачи* (25), (28), (29). *Если выполнено условие*

$$\ker \mathcal{B}_\sigma = \{0\}, \quad \mathcal{B}_\sigma : \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_\sigma) \subset L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2 \to L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \quad (34)$$

то это нулевое собственное значение однократно, а соответствующий собственный элемент отвечает нулевому решению задачи (25), (28) *и произвольному значению $\delta_3 \in \mathbb{C}$. Такие тривиальные решения связаны с переходом маятника от исходного состояния покоя к новому состоянию покоя, полученному из исходного путем произвольного поворота на угол $\vec{\delta} = \delta_3\vec{e}_3$.*

Если выполнено условие

$$\ker \mathcal{B}_\sigma \neq \{0\}, \quad \dim \ker \mathcal{B}_\sigma = q > 0, \quad (35)$$

то задача (25), (28), (29) *имеет* $(q+1)$*–кратное нулевое собственное значение. Условие* (35) *выполнено, в частности, тогда, когда исследуемая гидромеханическая система находится на границе области устойчивости, т.е.*

$$\lambda_{\min}(\mathcal{B}_\sigma) = 0. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства решений задачи (25), (28), (29) при $\lambda \neq 0$, когда она эквивалентна задаче (32), (29). При этом будем пользоваться некоторыми определениями и положениями спектральной теории операторных пучков (см. [2], [6]).

Лемма 1. *В задаче* (32) *невещественные собственные значения* λ*, а также те вещественные, которым отвечают присоединенные элементы пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$ *из* (33)*, расположены в полуплоскости*

$$Re\lambda \geq \min(\mu;\, \alpha)/\left(2\|\mathcal{C}^{1/2}\operatorname{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right)\|^2\right) > 0. \tag{37}$$

Важным выводом из леммы 1 является такое утверждение.

Теорема 2. *(принцип смены устойчивости). При непрерывном изменении физических параметров исследуемой гидромеханической системы собственные значения* λ *задачи* (25), (28), (29) *могут непрерывно переходить из правой комплексной полуплоскости в левую лишь по вещественной оси через нуль комплексной плоскости, причем в момент перехода должно выполняться условие* (35).

Доказательство. В самом деле, по лемме 1 такие переходящие собственные значения не могут быть невещественными, а вещественным собственным значениям отвечают лишь собственные элементы. Отметим еще, что в левой комплексной полуплоскости собственные значения задачи (25), (28), (29) также могут быть лишь вещественными, причем им не могут отвечать присоединенные элементы.

Далее, так как задача (25), (28), (29) все время имеет одно нулевое собственное значение, то из соображений непрерывности по параметрам (до критического — в правой полуплоскости, после критического — в левой) в момент перехода собственное значение $\lambda = 0$ должно быть более чем однократно, а тогда по необходимости должно выполняться условие (35). Впервые (при изменении параметра или параметров) этот момент наступает, когда выполнено условие (36). □

2. О полноте и базисности системы корневых элементов спектральной задачи

Отметим, что свойство базисности по Абелю–Лидскому является промежуточным между свойством полноты некоторой системы элементов гильбертова пространства и свойством базисности со скобками: здесь разложение любого элемента в ряд по данной системе производится с помощью специального метода, который называют методом Абеля–Лидского (см. [7], с. 248–249).

Как следует из рассмотрений [1], исследуемую спектральную задачу можно записать в виде:

$$-\omega_3 = \lambda\delta_3,\ \widetilde{B}x = \lambda\widetilde{A}x,\ x = \left(\vec{v};\vec{z};\vec{\omega};\zeta;P_2\vec{\delta}\right)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{M}_0(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus L_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C}^2, \tag{38}$$

где, в частности, операторная матрица $\widetilde{B}$ имеет структуру

$$\widetilde{B} = (I+R_2)\,B_0 + B_1,\quad B_0 = \mathrm{diag}(\rho\,\nu\,A;\,\nu^{-1}\,B;\,\alpha;\,I;\,1),$$

$$B_1\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),\quad R_2\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),\quad B := Q^*B_\sigma Q.$$

Здесь, однако, “главный” оператор $B_0 = B_0^* \gg 0$ неограничен, но не имеет компактного обратного, так как единичный оператор I действует в бесконечномерном пространстве $L_{2,\Gamma}$. Это не позволяет в задаче (38) использовать утверждения, связанные со свойством базисности Абеля–Лидского и получением асимптотики собственных значений.

Данную трудность можно преодолеть следующим образом. Исключим переменную ζ, тогда для амплитудных элементов

$$y := \left(\vec{v};\,\vec{z};\,\vec{\omega};\,P_2\vec{\delta}\right)^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{M}_0(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_0 \tag{39}$$

возникает проблема

$$\begin{pmatrix} \rho\nu A\vec{v} \\ B^{1/2}A^{1/2}\vec{v}+\nu^{-1}B\vec{z}+\rho g B^{-1/2}\,PQ^*\theta\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] \\ \alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta} \\ -P_2\vec{\omega}\end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\rho g}{\lambda}\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\\ \int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\gamma_n\left(\vec{v}+\nu^{-1}R^+\vec{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0}\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\rho\vec{v}+\rho\nu^{-1}R^*\vec{z}+\rho P_{0,S}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\\ \rho\vec{z}\\ \vec{J}\vec{\omega}+\rho\int\limits_\Omega\vec{r}\times\left(\vec{v}+\nu^{-1}R^+\vec{z}\right)d\Omega \\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix}, \tag{40}$$

а также связи

$$-\gamma_n\,\left(\vec{v}+\nu^{-1}\,R^+\vec{z}\right) = \lambda\zeta,\quad -\omega_3 = \lambda\delta_3. \tag{41}$$

Коротко задачу (40) можно переписать в виде:

$$\mathcal{A}y + \rho g\lambda^{-1}\mathcal{F}y = \lambda\mathcal{Z}y,\quad y\in\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(B)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{42}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}$ определяются соответствующими столбцами из (40).

Следует отметить, что оператор $\mathcal{Z}$ обратим и имеет структуру

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1,\quad \mathcal{Z}_0 = \mathrm{diag}\left(\rho I;\,\rho I;\,\vec{J};\,1\right),\quad \mathcal{J}_1\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0). \tag{43}$$

Оператор $\mathcal{A}$ из (42), (40) обратим и имеет структуру

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1,\quad \mathcal{A}_0 = \mathrm{diag}\left(\rho\nu A;\,\nu^{-1}B;\,\alpha;\,1\right),\quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(B)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{44}$$

где $\mathcal{A}_1$ вполне подчинен $\mathcal{A}_0$, т.е. $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

Оператор $\mathcal{F}$ из (42), определенный вторым столбцом слева в (40) на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см. (44)), вполне подчинен оператору $\mathcal{A}_0$, т.е. $\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

В результате задачу (42) можно переписать в виде

$$\left(I + \mathcal{J}_0 + \rho g \lambda^{-1} \mathcal{J}_{-1}\right) \mathcal{A}_0 y = \lambda \left(\mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1\right) y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{45}$$

$$\mathcal{J}_0 := \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \quad \mathcal{J}_{-1} := \mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \quad \mathcal{J}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \tag{46}$$

$$\mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}\left(\rho\nu A;\, \nu^{-1} B;\, \alpha;\, 1\right), \quad \mathcal{Z}_0 := \operatorname{diag}\left(\rho I;\, \rho I;\, \vec{J};\, 1\right). \tag{47}$$

Теорема 3. *Задача* (45)*, а потому и исходная спектральная задача о нормальных колебаниях исследуемой гидромеханической системы имеет дискретный спектр* $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$ *и асимптотическим поведением*

$$\lambda_j = (\rho\nu)^{-1} \left(\frac{|\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{48}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\mathcal{A}_0 y = \lambda \mathcal{Z}_0 y. \tag{49}$$

Отсюда и из определений (47) операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{Z}_0$ получаем совокупность распавшихся задач:

$$\rho\nu A\vec{v} = \rho\lambda\vec{v} \quad \left(\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)\right), \quad \nu^{-1} B\vec{z} = \lambda\rho\vec{z} \quad \left(\vec{z} \in \vec{M}_0(\Omega)\right), \tag{50}$$

$$\alpha\vec{\omega} = \lambda\vec{J}\vec{\omega} \quad \left(\vec{\omega} \in \mathbb{C}^3\right), \quad P_2\vec{\delta} = \lambda P_2\vec{\delta} \quad \left(P_2\vec{\delta} \in \mathbb{C}^2\right). \tag{51}$$

Конечномерные задачи (51), очевидно, не влияют на характер асимптотики, а задачам (50) отвечают две ветви собственных значений. С учетом асимптотических формул для собственных значений операторов A и B имеем

$$\lambda_{j1} = \nu\lambda_j(A) = \nu \left(\frac{|\,\Omega|}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \tag{52}$$

$$\lambda_{j2} = (\rho\nu)^{-1}\lambda_j(B) = (\rho\nu)^{-1} \left(\frac{|\,\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{53}$$

Введем в рассмотрение функции распределения (с учетом кратностей) собственных значений операторов A и B:

$$N_A(\lambda) := \sum_{\lambda_j(A) < \lambda} 1, \quad N_B(\lambda) := \sum_{\lambda_j(B) < \lambda} 1. \tag{54}$$

Из (52), (53) следует, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} N_A(\lambda)\lambda^{-3/2} = \nu^{-3/2} \frac{|\,\Omega|}{3\pi^2}, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} N_B(\lambda)\lambda^{-2} = (\rho\nu)^2 \frac{|\,\Gamma|}{\pi}. \tag{55}$$

Так как задача (49) равносильна совокупности задач (50), (51), то функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений задачи (49) равна сумме функций распределения собственных значений бесконечномерных задач (50) и конечномерных задач (51). Отсюда и из (55) получаем, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda)\lambda^{-2} = \lim_{\lambda\to+\infty} N_B(\lambda)\lambda^{-2} = (\rho\nu)^2\frac{|\,\Gamma|}{\pi}, \tag{56}$$

откуда следует, что для оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}$ в соответствующей задаче, полученной из (45) некоторыми преобразованиями,имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = (\rho\nu)^{-1}\left(\frac{|\,\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \tag{57}$$

Рассмотрим теперь, опираясь на теорему 3, вопросы полноты и базисности системы корневых элементов исследуемой задачи о нормальных колебаниях гидромеханической системы, в частности, задачи (45)–(47). При этом будем использовать методы, основанные на аналитическом возмущении линейных операторных пучков, а также на канонической факторизации оператор–функций (см., например, [6]).

Далее, введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{F}_0\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{-1} := \rho g\mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_1 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_1\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \tag{58}$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}),$$
$$\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}) = \mathcal{H}_0.$$

Здесь операторы $\widetilde{\mathcal{J}}_0$, $\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_1$ компактные, $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \widetilde{\mathcal{A}}_0^* \gg 0, \quad 0 < \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

Для исследуемой задачи приходим из (45) к уравнению

$$\left(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0 + \lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}\right)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = \lambda(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)v, \quad v = \mathcal{Z}_0^{1/2}y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0). \tag{59}$$

Осуществляя здесь далее замены вида

$$\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}, \quad \mathcal{I} + \widehat{S}_0 := (\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0), \tag{60}$$

$$(\mathcal{I}+\widehat{S}_0)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = w, \tag{61}$$

получаем уравнение

$$\mathcal{L}(\widetilde{\lambda})w := \left(\mathcal{I} + \widetilde{\lambda}\widehat{\mathcal{B}} - \widetilde{\lambda}^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\right)w = 0, \quad w \in \mathcal{H}_0, \tag{62}$$

$$\widehat{\mathcal{B}} := (\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \tag{63}$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0). \tag{64}$$

Напомним, что собственные значения $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0)$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ имеют асимптотическое поведение (57), и тогда

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_0), \quad p > 2. \tag{65}$$

Приведенные свойства операторов задачи (62) показывают, что для этой задачи справедливы следующие теоремы о базисности системы собственных и присоединенных (корневых) элементов спектральной задачи.

Теорема 4. *Пусть геометрические и физические параметры исследуемой гидромеханической системы таковы, что выполнено условие*

$$4\|\widehat{\mathcal{A}}\| \cdot \|\widehat{\mathcal{B}}\| < 1. \tag{66}$$

Тогда система корневых элементов задачи (45)–(47) *является полной в пространстве с нормой графика оператора* $\widetilde{\mathcal{A}}_0$*:*

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}_0 v\|^2_{\mathcal{H}_0} = \left(\mathcal{Z}_0^{-1}\mathcal{A}_0 y, \mathcal{A}_0 y\right)_{\mathcal{H}_0} =$$

$$= \rho\nu^2\|A\vec{v}\|^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\rho^3\nu^2)^{-1}\|B\vec{z}\|^2_{\vec{M}_0(\Omega)} + \alpha^2\left(\vec{J}^{-1}\vec{\omega}\right)\cdot\vec{\omega} + |P_2\vec{\delta}|^2. \tag{67}$$

Если условие (66) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (45)–(47)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, является полной с точностью до конечного дефекта по норме* (67).

Теорема 5. *Если выполнено условие* (66)*, то система корневых элементов задачи* (45)–(47) *образует базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha_0 > 2$ *в пространстве с нормой графика* (67). *Если условие* (66) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (45)–(47)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, образует базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha_0 > 2$ *с точностью до конечного дефекта в пространстве с нормой* (67).

3. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

В условиях, близких к невесомости, когда следует учитывать капиллярные силы, оператор потенциальной энергии $\mathcal{B}_\sigma$ может быть не обязательно положительно определенным, т.е. потенциальная энергия гидромеханической системы может не иметь минимума в состоянии равновесия (жидкость, подвешенная в пробирке при достаточно большой силе тяжести). В этом случае система является не только статически, но и динамически неустойчивой.

Теорема 6. *Пусть оператор потенциальной энергии* $\mathcal{B}_\sigma$ *имеет* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей),* q*–кратное нулевое собственное значение, а остальные собственные значения оператора* $\mathcal{B}_\sigma$ *положительны. Тогда задача* (25)–(29) *имеет* $(q+1)$*–кратное нулевое собственное значение,* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений, а остальные собственные значения расположены в правой полуплоскости.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в работе [5], с соответствующими усложнениями, связанными со спецификой задачи (25)–(29). □

Следствием этой теоремы является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости: *если потенциальная энергия гидромеханической системы не имеет минимума в состоянии равновесия и минимальное собственное значение* $\lambda_{\min}(\mathcal{B}_\sigma)$ *оператора потенциальной энергии* $\mathcal{B}_\sigma$ *отрицательно, то по крайней мере одно собственное значение* λ *задачи* (25)–(29) *расположено в левой полуплоскости, т.е. гидромеханическая система динамически неустойчива.*

Список литературы

[1] Батыр Э.И., Дудик О.А., Копачевский Н.Д. *Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью* // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. С. 15–29.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* – М.: Наука, 1965. — 448 с.

[3] Дудик О.А. *Нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, при условии статической неустойчивости* // Ученые Записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — Симферополь. — Т. 20 (59), № 1, 2007, с. 57–64.

[4] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* – М: Наука, 1989. – 416 с.

[5] Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н. *О достаточном условии неустойчивости конвективных движений жидкости в открытом сосуде* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – Т. 33. – 1993, № 1. – С. 101–118.

[6] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков* – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

[7] Arganovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory* – Berlin : WILEY – VCH Verlag. – 1999. – 377 p.

Про нормальні коливання маятника з порожниною, частково заповненою капілярною в'язкою рідиною

В роботі досліджені задачі про нормальні коливання маятника з порожниною, частково заповненою капілярною в'язкою рідиною. Вивчені властивості спектру, доведена теорема про базісність системи кореневих елементів, отримана асимптотика власних значень. Доведена теорема Лагранжа про нестійкість.

Ключові слова: нормальні коливання, власні значення, асимптотика, нестійкість.

On normal oscillations of a pendulum with a cavity partially filled with a capillary viscous fluid

The problem on normal oscillations of a pendulum with a cavity partially filled with a capillary viscous fluid is investigated in the work. Spectral properties are studied, the theorem on basisity of the system of root elements is proved. The Lagrange theorem on nonstability is proved.

Keywords: normal oscillations, eigenvalues, asymptotic, nonstability.