

УДК 535.1

ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФАЗА В НАВИТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Алексеев К.Н., Лапин Б.П., Яворский М.А.

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: alexeyev@cssu.crimea.ua*

Получено аналитическое решение векторного волнового уравнения для навитого анизотропного эллиптического волокна (АЭНВ) методом теории возмущений с вырождением. Показано, что для азимутальных чисел $l > 1$ в случае сильной анизотропии моды представляют собой линейно поляризованные оптические вихри с топологическим зарядом l . Получены аналитические выражения для постоянных распространения мод и определена величина топологической фазы линейно поляризованного оптического вихря.

Ключевые слова: навитые оптические волокна, оптический вихрь, топологическая фаза.

ВВЕДЕНИЕ

Навитые волокна представляют собой отдельный класс волокон. Это обусловлено тем, что поправки к постоянным распространения, обусловленные геометрическими факторами, не зависят от внешних условий, например, от температуры. Было показано, что фундаментальные моды идеального навитого волокна представлены циркулярно поляризованными полями [1,2]. Влияние возмущения на модовую структуру было изучено в работах [3,4,5]. Было показано, что $l = 0$ моды анизотропных и эллиптических волокон представлены эллиптически поляризованными полями. Для случая мод с $l = 1$ были исследованы идеальные [6,7], анизотропные и эллиптические [8,9] навитые волокна. В реальных волокнах в той или иной степени могут присутствовать оба типа анизотропии (материала и формы), поэтому представляется актуальным исследовать совместное влияние навивки и указанных типов анизотропий на распространение оптических вихрей высших порядков и топологическую фазу.

1. МОДЕЛЬ АЭНВ

Рассмотрим навитое волокно, в поперечном сечении которого наведена одноосная материальная анизотропия, а форма поперечного сечения имеет вид эллипса (Рис.1).

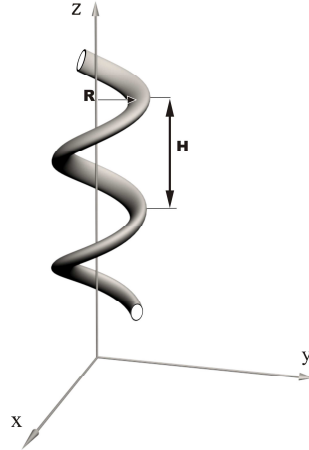


Рис. 1. Модель навитого волокна. R - радиус навивки, H - шаг навивки. (X, Y, Z) – лабораторный базис.

Для того чтобы ввести одноосную материальную анизотропию в поперечном сечении, необходимо представить показатель преломления в виде тензора [8]. В базисе Френе (Рис.2) он будет иметь вид:

$$\kappa_{co,t}^2 = \begin{pmatrix} n_e^2 & 0 \\ 0 & n_o^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где n_e, n_o являются главными значениями тензора показателя преломления. Так как тензор $\kappa_{co,t}^2$ построен в локальном базисе Френе $(\vec{e}_\nu, \vec{e}_\beta)$, то оси анизотропии будут направлены вдоль этих векторов. В локальном базисе (r, φ, s) показатель преломления приобретает азимутальную зависимость:

$$\kappa_{co,t}^2(\varphi) = \bar{n}^2 \mathbf{F} + \Delta n^2 \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\bar{n}^2 = (n_e^2 + n_o^2) / 2$, $\Delta n^2 = (n_e^2 - n_o^2) / 2 \ll 1$.

Эллиптичность поперечного сечения волокна вводится с помощью замены координат в показателе преломления в левой части уравнения:

$$n(x, y) \rightarrow n(x(1 + \delta), y(1 - \delta)), \quad (3)$$

где $\delta \ll 1$ и связано с эксцентриситетом эллипса e следующим образом:

$$e = \frac{2\sqrt{\delta}}{1 + \delta}. \quad (4)$$

В конечном итоге можно записать показатель преломления в следующем виде:

$$\kappa^2 = \bar{n}^2 \mathbf{F} + \Delta n^2 \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} - 2n_{co}^2 \Delta \delta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \cos 2\varphi, \quad (5)$$

В данной работе не учитываются радиационные потери [10] и эффекты, связанные с фотоупругостью [8].

2. МОДЫ С $l > 1$ АЭНВ

Как известно, распространение монохроматического излучения в волокне описывается с помощью векторного волнового уравнения [11]:

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 n^2(x, y)\right) \mathbf{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} \left(\mathbf{E}(x, y, z) \cdot \vec{\nabla} \ln n^2(x, y) \right), \quad (6)$$

где $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $k = 2\pi / \lambda$ - волновое число, λ - длина волны в вакууме.

Показатель преломления обычно записывается в следующем виде $\tilde{n}^2 = n_{co}^2 (1 - 2\Delta \tilde{f}(r))$, где $\Delta = (n_{co}^2 - n_{cl}^2) / 2n_{co}^2$ - высота профиля показателя преломления, $\tilde{f}(r)$ - функция профиля, определяющая распределение показателя преломления, тильда обозначает осевую симметрию. В данной работе рассматриваются волокна, для которых $\Delta \ll 1$.

Одним из способов решения уравнения (1) является использование локальных координат (r, φ, s) (Рис.2) [2], где r и φ - полярные координаты в поперечном сечении, s - длина центральной линии волокна.

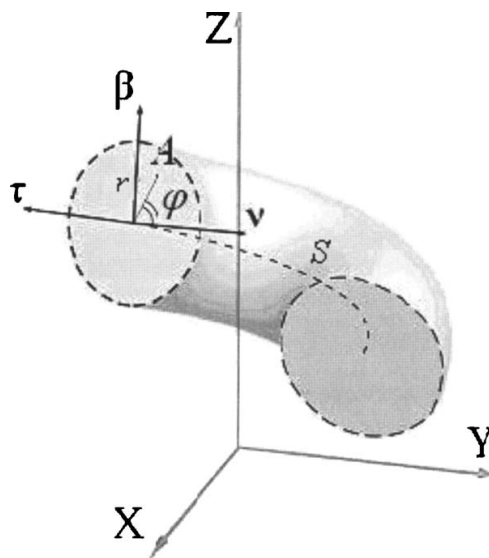


Рис. 2. Локальные геликоидальные координаты (r, φ, s) в базисе Френе $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$, где \vec{v} - единичный вектор главной нормали, $\vec{\beta}$ - единичный вектор бинормали, $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор.

Запишем уравнение (1) в локальных координатах и получаем его вид в матричной форме:

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{\mathcal{E}}\right)|\Phi\rangle_h = \beta^2 |\Phi\rangle_h, \quad (7)$$

$$\hat{H}_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} + k^2 \tilde{n}^2(r) \right) \mathcal{E}_0 + \frac{2i}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_2, \quad (8)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{ea} - 2i\beta r v \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \psi'_r \mathcal{E}_0 + \frac{\psi'_r}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_1 - \frac{i\psi'_r}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_2 + \frac{\partial}{\partial r} \psi'_r \mathcal{E}_3 \right\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}_{ea} = k^2 \Delta n^2 (\mathcal{E}_3 \cos 2\varphi - \mathcal{E}_1 \sin 2\varphi) - 2k^2 n_{co}^2 \delta \Delta r \tilde{f}'_r \cos 2\varphi, \quad (10)$$

$$v = \frac{2\pi H}{H^2 + (2\pi R)^2}, \quad (11)$$

где β - точная постоянная распространения, $|\Phi\rangle_h = \begin{pmatrix} e_r(r, \varphi) \\ e_\varphi(r, \varphi) \end{pmatrix}$, \mathcal{E}_i - матрицы Паули,

v - кручение, $\psi = \ln \tilde{n}^2$. \hat{H}_0 описывает распространение монохроматического света в идеальном прямом волокне в цилиндрическом базисе, оператор $\hat{\mathcal{E}}$ можно рассматривать в качестве возмущения к основному состоянию $(\Delta, \Delta n^2, \delta \ll 1$, влияние навивки мало), в котором \mathcal{E}_{ea} описывает влияние анизотропии и эллиптичности, слагаемое, пропорциональное v , дает основной вклад, вносимый влиянием навивки, оставшиеся слагаемые отвечают за спин-орбитальное взаимодействие (СОВ).

С математической точки зрения уравнение (7) представляет собой уравнение на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{H}_0 + \hat{\mathcal{E}}$. Решить это уравнение можно с помощью теории возмущений. Так как спектр \hat{H}_0 четырехкратно вырожден, когда $l \neq 0$, то необходимо применить теорию возмущений с вырождением. При $l \geq 1$ в качестве решений нулевого приближения уравнения $\hat{H}_0 |\Phi\rangle_h = \tilde{\beta}_l^2 |\Phi\rangle_h$ можно выбрать оптические вихри[9]:

$$\begin{aligned} |1\rangle_{0h} &= e^{i(l+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} F_l(r), \quad |2\rangle_{0h} = e^{i(1-l)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} F_l(r), \\ |3\rangle_{0h} &= e^{-i(l+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} F_l(r), \quad |4\rangle_{0h} = e^{i(l-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} F_l(r), \end{aligned} \quad (12)$$

где $F_l(r)$ - функция Бесселя для волокон со ступенчатым показателем преломления. Структура мод получается из стандартного уравнения:

$$V|i\rangle = \Delta \beta_i^2 |i\rangle, \quad (13)$$

где $\Delta\beta_i^2 = \beta_i^2 - \tilde{\beta}^2$. Матричные элементы V могут быть найдены с помощью формулы $V_{ij} = {}_{h0}\langle i | \mathcal{E} | j \rangle_{h0}$. Скалярное произведение определяется формулой:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \Phi_r^* & \Phi_\varphi^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_\varphi \end{pmatrix} r dr d\varphi, \quad (14)$$

В результате усреднения для $l > 1$ получим:

$$V = \begin{pmatrix} A_l + 2\beta\nu(l+1) & 0 & 0 & E \\ 0 & B_l + 2\beta\nu(1-l) & E & 0 \\ 0 & E & A_l - 2\beta\nu(l+1) & 0 \\ E & 0 & 0 & B_l - 2\beta\nu(1-l) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $E = k^2 \Delta n^2$, $A_l = \frac{\Delta}{Q_l r_0^2} (l F_l^2 - F_l F_l')$, $B_l = \frac{\Delta}{Q_l r_0^2} (F_l F_l' + l F_l^2)$, $R=1$,

$Q_l = \int_0^\infty R F_l^2(R) dR$ и $R = r/r_0$, β - точная постоянная распространения. Нужно

отметить, что эллиптичность не влияет на распространение высших мод, потому что член, отвечающий за эллиптичность, дает нулевой вклад в матрицу (15). Рассмотрим наиболее практически важный случай, когда элемент E в матрице (15) много больше чем остальные элементы: $E \gg 2(l \pm 1)\beta\nu$, A_l , B_l , поэтому целесообразно разбить получение модовой структуры на два этапа: на первом найти моды и поправки к постоянным распространения для анизотропного волокна, которое описывается следующей матрицей:

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

Значения $\Delta\bar{\beta}_i^2$ для (16) имеют следующий вид:

$$\Delta\bar{\beta}_{1,2}^2 = E, \quad \Delta\bar{\beta}_{3,4}^2 = -E. \quad (17)$$

Вектора состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= (1 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad |2\rangle = (0 \ 1 \ 1 \ 0)^T, \\ |3\rangle &= (-1 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad |4\rangle = (0 \ -1 \ 1 \ 0)^T \end{aligned} \quad (18)$$

Векторы $|1\rangle$ и $|2\rangle$ относятся к собственному значению E , а $|3\rangle$ и $|4\rangle$ относятся к $-E$. На втором этапе усредним матрицу, отвечающую за влияние навивки и спин-орбитального взаимодействия по состояниям (18). В результате усреднения получим одинаковый результат для подпространств $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ и $\{|3\rangle, |4\rangle\}$:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+B+4\beta vl & 0 \\ 0 & A+B-4\beta vl \end{pmatrix}, \quad (19)$$

Собственные значения оператора \bar{V} :

$$\lambda_{1,3} = \frac{A+B+4\beta vl}{2}, \quad \lambda_{2,4} = \frac{A+B-4\beta vl}{2}, \quad (20)$$

Исходя из (19) и (20) находим моды анизотропного эллиптического навитого волокна с учетом СОВ и навивки:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= e^{il\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F_l(R), \quad |\psi_2\rangle = e^{-il\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F_l(R), \\ |\psi_3\rangle &= e^{il\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_l(R), \quad |\psi_4\rangle = e^{-il\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_l(R), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\beta_{1,2} = \tilde{\beta} \pm vl + \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left(v^2 l^2 + E + \frac{A_l + B_l}{2} \right), \quad \beta_{3,4} = \tilde{\beta} \pm vl + \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left(v^2 l^2 - E + \frac{A_l + B_l}{2} \right), \quad (22)$$

Нужно отметить, что моды (21) записаны в базисе Френе и представляют собой линейно поляризованные оптические вихри с топологическим зарядом $\pm l$. Так как эллиптичность не влияет на распространение высших мод можно сказать, что фактически мы решили задачу для анизотропного навитого волокна (АНВ) для $l > 1$. Сравним результаты (21) и (22) со случаем $l=1$ мод АНВ. Моды $l=1$ АНВ в общем случае представлены линейно поляризованными анизотропными оптическими вихрями, угловое распределение которых определяется соотношением констант навивки и СОВ. В нашем случае моды представлены чистыми линейно поляризованными вихрями, при этом константа, описывающая влияние навивки, не гибридизуется с константами спин-орбитального взаимодействия в спектре постоянных распространения (22).

3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Распространение света в навитом волокне сопровождается эффектами, которые не зависят от динамических факторов, таких как материал, структура волокна и т.д. В данном разделе мы продемонстрируем, что линейно поляризованный вихрь $|LV\rangle = |1\rangle_{0h} + |4\rangle_{0h}$ приобретает дополнительную геометрическую фазу при прохождении через волокно. Действительно, $|LV\rangle$ совпадает с $|\psi_1\rangle$, поэтому после прохождения одного витка ($\Delta s = 2\pi / K$, $K = 2\pi / \sqrt{H^2 + (2\pi R)^2}$), фаза вихря приобретает добавку $\gamma = 2\pi v = 2\pi \cos\theta$, где θ есть угол между осью z и волновым вектором \vec{k} . Отнимая ненаблюдаемую фазу -2π , получим:

$$\gamma = -2\pi(1 - \cos\theta) \text{sign}l = -\Omega \text{sign}l, \quad (23)$$

где Ω - телесный угол, охватываемый волновым вектором при прохождении через один виток волокна. Нужно отметить, что в случае $l=1$ топологическая фаза начинает проявляться лишь в том случае, когда влияние навивки много больше СОВ. В данном же случае топологическая фаза будет проявляться всегда, независимо от соотношения констант, описывающих влияние навивки и СОВ.

ВЫВОДЫ

В данной работе была установлена модовая структура анизотропного эллиптического навитого волокна для случая высших мод. Модовая структура представлена линейно поляризованными оптическими вихрями. Аналитически определены поправки к постоянным распространения мод. Подсчитана величина топологической фазы $|LV\rangle$ после прохождения одного витка волокна.

Список литературы

1. Berry M.V. Interpreting the anholonomy of coiled light / M.V. Berry // Nature. – 1987. – V. 326. – P. 277-8.
2. Chen G. Local fields in single-mode helical fibres / G. Chen, Q. Wang // Opt. Quantum Electron. – 1995. – V. 27. – P. 1069-74.
3. Ross J.N. The rotation of the polarization in low birefringence monomode optical fibres due to geometric effects / J.N. Ross // Opt. Quantum Electron. – 1984. – V. 16. – P. 455.
4. Alexeyev C.N. and Yavorsky M.A. Hybridization of the topological and dynamical phase in coiled optical fibres / C.N. Alexeyev and M.A. Yavorsky // J. Opt. A.: Pure and Appl. Opt. – 2007. – V. 8. – P. 647-651.
5. Chen G. Mode coupling in single-mode helical fibres under perturbation / G. Chen, Q. Wang // Opt. Quantum Electron. – 1998. – V. 30. – P. 209-216.
6. Alexeyev C.N. Berry's phase for optical vortices in coiled optical fibers / C.N. Alexeyev and M.A. Yavorsky // J. Opt. A.: Pure and Appl. Opt. – 2007. – V. 9. – P. 6-14.
7. Alexeyev C.N. Propagation of optical vortices in coiled weakly guiding optical fibres / C.N. Alexeyev and M.A. Yavorsky // Opt. Spektrosk. – 2007. – V. 102 – P. 754-759.
8. Alexeyev C.N. Optical vortices and topological phase in strongly anisotropic coiled few-mode optical fibers / C.N. Alexeyev, B.A. Lapin, M.A. Yavorsky // J. Opt. Soc. Am. B. – 2007. – V. 24, № 10. – P. 2666-2675.
9. Alexeyev C.N. Higher order modes and topological phase in the coiled elliptical weakly guiding optical fibers / C.N. Alexeyev, B.P. Lapin and M.A. Yavorsky // Ukr. J. Phys. Opt. – 2007. – V. 9, № 1. – P. 34-50.
10. Soh D.B.S. Geometrical factor modification of helical-core fiber radiation loss formula / D.B.S. Soh, J. Nilsson, J.K. Sahu, L.J. Cooper // Opt. Com. – 2003. – V. 222. – P. 235-42.
11. Snyder A.W. Optical Waveguide Theory / A.W. Snyder, J.D. Love. – London, New York : Chapman and Hall, 1985. – P. 652.

Алексеев К.М. Оптичні вихорі вищого порядку та топологічна фаза у навитих анізотропних еліптичних волокнах / К.М. Алексеев, Б.П. Лапін, М.О. Яворський // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), № 1. Ч. I. – С. 67-74.

Винайдено аналітичне рішення векторного хвильового рівняння для навитого анізотропного еліптичного волокна методом теорії збурень з виродженням. Винайдено, що для азимутальних чисел $l > 1$ у випадку сильної анізотропії мода структура волокна представлена лінійно поляризованими оптичними вихорами. Отримані аналітичні вирази для постійних розповсюдження мод та підрахована величина топологічної фази лінійно поляризованого оптичного.

Ключові слова: навиті оптичні волокна, оптичний вихор, топологічна фаза.

Alexeyev C.N. The higher order optical vortices and topological phase in coiled anisotropic elliptic fibers / Alexeyev C.N., Lapin B.P., Yavorsky M.A. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010. – Vol. 23(62), No. 1. P. I. – P. 67-74.

An analytical solution has been obtained for vectorial wave equation for coiled anisotropic elliptic fibers by using the perturbation theory with degeneracy. It has been showed that for the azimuthal numbers $l > 1$ in the case of strong anisotropy the mode's structure is presented by linear polarized optical vortices. The propagation constants are calculated and the topological phase is computed for linear polarized optical vortex.

Key words: coiled optical fiber, optical vortex, topological phase.

Поступила в редакцію 16.12.2009 г.