Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 92–101.

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОИЗЛУЧЕНИЯ

В работе получена оценка части аналитического гибридного решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего при описании математической модели задачи теплоизлучения.

Введение

Большинство прикладных задач, описывающих реальные физические процессы, сводятся к системам нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1],[2]. К такому классу задач можно отнести задачу о теплоизлучении радиатора трапецеидального сечения (см. [3]). Данная конструкция используется в космических установках и описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r,\varepsilon)U'(r) - \beta b(r,\varepsilon)U^4(r) = 0, \tag{1}$$

$$U_0(d) = 1, \qquad U_0'(f) = 0 \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(r,\varepsilon)$, $b(r,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [4]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [5]). В результате применения данного подхода получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0, \tag{3}$$

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4. \tag{4}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(r)$ дифференцируема на отрезке $[d, f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия (2).

В результате применения метода Бернулли, уравнение (3) примет вид:

$$\varepsilon^2 Z'' - g(r)Z = 0, \tag{5}$$

где

$$g(r) = \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2}, \quad Y(r) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_d^r a(x)\,dx\right), \quad U_0(r) = Z(r)\cdot Y(r).$$

Однородное дифференциальное уравнение (5) содержит малый параметр ε^2, поэтому его общее решение будем искать с помощью гибридного ВКБ-Галеркин метода, согласно которому решение уравнения (5) описывается аналитическим выражением

$$Z^H(r,\varepsilon) = \exp\left(\int\limits_d^r (\delta_0\varphi_0 + \ldots)\,dx\right). \tag{6}$$

Ограничимся в разложении (6) одним членом. Для нахождения неизвестного значения функции φ_0 используем метод фазовых интегралов, а для нахождения значения параметра δ_0 — критерий ортогональности Галеркина. Подробное решение уравнения (3) ВКБ—методом, а также и вычисление функции φ_0 описано в работе [6].

Итак,

$$Z^H(r) = c_{1,2}\exp\left(\int\limits_d^r \delta_{0_{1,2}} g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right),$$

где

$$\delta_{0_{1,2}} = \pm\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}.$$

Тогда

$$U_{0_H}(r) = c_{1,2}\exp\left(\int\limits_d^r (\delta_{0_{1,2}} g^{\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2\varepsilon^2}a(x))\,dx\right)$$

является общим решением уравнения (3).

Обозначая

$$G_1(r) = \exp\left(\int\limits_d^r \delta_{0_1} g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right), \quad G_2(r) = \exp\left(\int\limits_d^r \delta_{0_2} g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right), \tag{7}$$

$$\delta_{0_{1,2}} = G \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}, \qquad G = \frac{g(d) - g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx},$$

$$e(r) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_d^r a(x)\,dx\right),$$

получим следующий вид гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (3):

$$U_{0_H}(r) = C_1\frac{G_1(r)}{e(r)} + C_2\frac{G_2(r)}{e(r)}. \tag{8}$$

Таким образом, с применением гибридного ВКБ-Галеркин подходом было получено аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, содержащими параметр при старшей производной.

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Гибридное ВКБ-Галеркин решение строится на на основе развития метода фазовых интегралов. Поэтому можно ожидать, что при малых значениях параметра гибридное ВКБ-Галеркин решение имеет асимптотический характер.

Дадим следующее определение.

Определение 1. (см. [7], с. 291) Функцию $z(x, \varepsilon)$ назовем ε^r–асимптотическим решением, если для любого $x \in [a, b]$ искомое решение можно представить в виде

$$U(x, \varepsilon) = z(x, \varepsilon) + \nu(x, \varepsilon) \cdot \varepsilon^r, \tag{9}$$

где $\nu(x, \varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (3) отрезке $[d, f]$ с краевыми условиями

$$U_0(d) = U_d, \quad U_0'(f) = U_f. \tag{10}$$

Теорема. *Если существует единственное решение $U_0(x, \varepsilon)$ краевой задачи (3),(10), а функция $a(r)$ дифференцируема по r на отрезке $[d, f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условию $\alpha \leqslant \sqrt{g(r)} \leqslant \beta$ на $[d, f]$, тогда для любого $r \in [d, f]$ функция (8) является ε–асимптотическим решением уравнения (3).*

Доказательство. Найдем первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (8):

$$U'_{0_H} = -\frac{a(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) + \\ + \frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2), \quad (11)$$

$$U''_{0_H} = -\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) - \\ - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{\varepsilon^2 e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{\varepsilon^2 e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\ + \frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\ + \frac{2g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\ + \frac{g(r)}{e(r)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2\right)(C_1G_1 + C_2G_2). \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в исходное уравнение (3), получим

$$\varepsilon^2 U''_{0_H} + a(r)U'_{0_H} = -\frac{a'(r)}{2e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) - \\ - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\ + \frac{\varepsilon^2 g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{\varepsilon^2 g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\ + \frac{2\varepsilon^2 g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \frac{\varepsilon^2 g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\ + \frac{g(r)}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{g(r)}{e(r)}\varepsilon^2 G^2(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\ + \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) = \\ = -\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2}\right)\frac{C_1G_1 + C_2G_2}{e(r)} + \frac{\varepsilon^2 g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\ + \frac{2\varepsilon^2 g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{2\varepsilon^2 g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2 g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)+\frac{g(r)}{e(r)}(C_1G_1+C_2G_2)=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{e(r)}\left(\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}+2g(r)G\right)\left(G(C_1G_1+C_2G_2)+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)\right)=$$

$$=\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\left(\varepsilon^2\left(\frac{\sqrt{g(r)}G}{e(r)}(C_1G_1+C_2G_2)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)-\frac{a(r)}{2e(r)\varepsilon^2}(C_1G_1+C_2G_2)\right)+$$

$$\left.+\frac{a(r)}{2}\frac{C_1G_1+C_2G_2}{e(r)}\right)=\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\left(\varepsilon^2U'_{0_H}+\frac{a(r)}{2}U_{0_H}\right).$$

Таким образом, U_{0_H} является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2U''_{0_H}+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_{0_H}-$$
$$-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_{0_H}=0. \quad (13)$$

Используя способ, основанный в [7], обозначим

$$D_0=U_0-U_{0_H} \quad (14)$$

и запишем уравнение (3) в виде

$$\varepsilon^2U''_0+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_0-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_0=$$
$$=-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U'_0-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_0. \quad (15)$$

Обозначим
$$F=-\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right).$$

Находя разность уравнений (15) и (13), используя (14), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_0:

$$\varepsilon^2D''_0+(a(r)+\varepsilon^2F)D'_0+\frac{a(r)}{2}FD_0=\left(\varepsilon^2U'_0+\frac{a(r)}{2}U_0\right)F. \quad (16)$$

На концах отрезка $[d,f]$ функция D_0 удовлетворяет краевым условиям

$$D_0(d)=0, \qquad D'_0(f)=0. \quad (17)$$

Уравнение (16) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_0. Тогда, согласно [8], в случае, когда соответствующая линейная однородная задача (16)–(17) имеет только тривиальное решение (это выполняется кроме случая $\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2} = 1)$, интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (16)–(17) имеет единственное решение

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right)F\,ds, \tag{18}$$

где $Gr(r,s)$ — функция Грина задачи (16)–(17).

Функция $Gr(r,s)$ определена при $r \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $r \neq s$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_0'' + (a(r) + \varepsilon^2 F)D_0' + \frac{a(r)}{2}FD_0 = 0; \tag{19}$$

2) при $r = d$ и $r = f$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет краевым условиям (17);

3) при $r = s$ функция $Gr(r,s)$ непрерывна по r, а ее производная по r имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$Gr(s+0,s) = Gr(s-0,s), \qquad Gr_r'(s+0,s) - Gr_r'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Чтобы найти функцию Грина задачи (16)–(17), нужно построить решение $D_{0_1}(r) \neq 0$ уравнения (19), удовлетворяющее только первому ($r = d$) условию (17), и решение $D_{0_2}(r) \neq 0$, удовлетворяющее второму краевому условию.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (13) $U_{0_{H_1}}$ и $U_{0_{H_2}}$:

$$U_{0_{H_1}} = \frac{G_1(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})\int\limits_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right), \tag{20}$$

$$U_{0_{H_2}} = \frac{G_2(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})\int\limits_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right). \tag{21}$$

Тогда функции D_{0_1} и D_{0_2} могут быть определены как

$$D_{0_1} = U_{0_{H_1}} - U_{0_{H_2}}, \tag{22}$$

$$D_{0_2} = U_{0_{H_1}} -$$
$$- \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}U_{0_{H_2}}. \tag{23}$$

Функцию $Gr(r,s)$ будем искать в виде

$$Gr(r,s) = \begin{cases} \varphi(s)D_{0_1}(r), & d \leqslant r \leqslant s, \\ \psi(s)D_{0_2}(r), & s \leqslant r \leqslant f. \end{cases} \tag{24}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \psi(s)D_{0_2}(r) = \varphi(s)D_{0_1}(r), \\ \psi(s)D'_{0_2}(r) - \varphi(s)D'_{0_1}(r) = 1/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{25}$$

Отсюда

$$\varphi(s) = \frac{D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}, \tag{26}$$

$$\psi(s) = \frac{D_{0_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}. \tag{27}$$

Обозначив

$$P^* = D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (22)–(23), получим

$$P^* = (U_{0_{H_1}} - U_{0_{H_2}})(U'_{0_{H_1}} - e^*U'_{0_{H_2}}) - (U'_{0_{H_1}} - U'_{0_{H_2}})(U_{0_{H_1}} - e^*U_{0_{H_2}}) =$$
$$= (U_{0_{H_1}}U'_{0_{H_2}} - U'_{0_{H_1}}U_{0_{H_2}})(1 - e^*).$$

Учитывая (20)–(21), и то, что

$$U'_{0_{H_1}} = U_{0_{H_1}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

$$U'_{0_{H_2}} = U_{0_{H_2}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}U_{0_{H_1}}U_{0_{H_2}}(1 - e^*) =$$
$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}(1 - e^*)\frac{1}{e^2(s)}\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right). \tag{28}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(r,s) = \begin{cases} \dfrac{D_{0_1}(r)D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2 P^*}, & d \leqslant r \leqslant s, \\ \dfrac{D_{0_1}(s)D_{0_2}(r)}{\varepsilon^2 P^*}, & s \leqslant r \leqslant f. \end{cases} \tag{29}$$

Запишем решение задачи (16)–(17) с помощью функции Грина

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds =$$

$$= -(U_{0_{H_1}}(r) - U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_d^r \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - e^* U_{0_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)} -$$

$$-(U_{0_{H_1}}(r) - e^* U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_r^f \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - U_{0_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}. \quad (30)$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad |G_2| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad (31)$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(r)}}\right| = \left|2G + \frac{g'(r)}{2g(r)\sqrt{g(r)}}\right| \leqslant 2|G| + \frac{|g'(r)|}{2\min|g^{3/2}(r)|} = K, \quad (32)$$

$$\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right) \geqslant \exp(2G\alpha(s-d)) \geqslant N, \quad (33)$$

где

$$N = \begin{cases} 1, \ \ \alpha > 0, \\ \exp(2G\alpha(f-d)), \ \ \alpha < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Учитывая (31)–(34), можно записать

$$|D_0| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1-e^*|}\Big|(U_{0_{H_1}}(r) - U_{0_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^r \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - e^* U_{0_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}e^2(s)\left(U_0' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_0\right)\,ds +$$

$$+(U_{0_{H_1}}(r) - e^* U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_r^f \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - U_{0_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}e^2(s)\left(U_0' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_0\right)\,ds\ \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|G_1| + |G_2|)(|G_1| + e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1-e^*|e^2(r)}\left|\int\limits_d^f \frac{F}{\sqrt{g(s)}}\frac{e(s)(e(s)U_0)'\,ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2\varepsilon}{N\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} \left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right| \frac{K}{e(r)} \left|\int\limits_d^f (e(s)U_0)'\,ds\right|.$$

Обозначив

$$C = \frac{L^2 K}{N} \left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

получим

$$|D_0| \leqslant \frac{C\varepsilon}{e(r)\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} \left|e(f)U_0(f) - e(d)U_0(d)\right|,$$

или

$$|D_0| \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|.$$

Функция

$$\mu(r) = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, обозначив

$$M = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|,$$

имеем оценку

$$|U_0 - U_{0_H}| \leqslant \varepsilon \cdot M,$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (8)– (7) уравнения (3).

Теорема доказана. □

Выводы

Таким образом, показано, что часть гибридного ВКБ-Галеркин решения, возникающая при решении дифференциального уравнения (3), носит асимптотический характер. Это свидетельствует о высокой точности приближения его к точному решению уравнения (3). В дальнейшем предполагается рассмотрение точности оценки аналитического решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (4), что даст возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [4].

Список литературы

[1] Couto P. *Parametric analysis of heat transfer on muststage cryogenic radiator* /P. Couto, M. Mantelli // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 2002. – Vol.16. – No. 3. – P. 313–316.

[2] Schnurr N.M. *Radiation from an array of gray circular fins of trapezoidal profile* /N.M. Schnurr, C.A. Cothran // AIA Journal. – 1974. – Vol.12. – No.11. – P. 1476–1480.

[3] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[4] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik (to appear).

[5] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування.* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[6] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 93–99.

[7] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[8] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

В роботі отримано оцінку частини аналітичного гібридного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що виникає при описанні математичної моделі задачі тепловипромінювання.

In this paper the estimate of the part of an analytical hybrid solution for the nonlinear second order differential equation, that arises while describing the mathematical model of the thermal emission problem, is obtained.