Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 85–91.

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн

ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

В настоящей работе доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространствах Лоренца измеримых функций на положительной полуоси. Используются методы теории симметричных пространств измеримых функций в пространствах с бесконечной мерой.

1. Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [5], [7], [9] — [12], [15] — [17]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема

Теорема 1. *(ДЕТ) Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *пространство с мерой и* T *— положительное* $(L_1 - L_\infty)$*-сжатие. Тогда для любой неотрицательной измеримой функции* f *имеет место неравенство*

$$\|B_T f\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \quad (1 < p < \infty),$$

где $B_T f = \sup\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k f$.

В работах [2] — [4] и [6] рассматривались аналоги доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ и на полуоси $[0, +\infty)$.

В данной статье доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространствах Лоренца.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [1], [6], [8], [13], [14].

2. Предварительные сведения

Пусть μ – мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $S(0, \infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, \infty)$.

Функцией распределения функции f называют функцию n_f, определяемую для любого $\tau \in (0, +\infty)$ равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : \ |f(t)| > \tau\}.$$

Обознчим через $S_0(0, +\infty)$ подпространство функций из $S(0, +\infty)$, для которых функция распределения $n_f(\tau) \not\equiv +\infty$.

Убывающей перестановкой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ называется убывающая непрерывная справа функция f^*, равноизмеримая с функцией $f(t)$. Функция f^* имеет вид:

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : \ n_{f(t)}(\tau) \le t\}.$$

Определение 1. Банахово пространство $(E, \| \cdot \|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \le |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E \le \|g(t)\|_E$.

$S2^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$.

Как известно, симметричными пространствами являются пространства L_p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича и многие другие.

Известно, что любое симметричное пространство $(E, \| \cdot \|_E)$ является промежуточным между $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$, то есть

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Для каждой $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^* \, d\mu, \ t \in (0, +\infty).$$

Определение 2. Положительный линейный оператор

$$T : \ L_1 + L_\infty \longrightarrow L_1 + L_\infty$$

называется положительным $(L_1 - L_\infty)$-сжатием или абсолютным сжатием, если

1^o. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;

2^o. $\|T\|_{L_1 \to L_1} \le 1$, $\|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \le 1$.

Обозначим, как и в [6], множество всех положительных $(L_1 - L_\infty)$-сжатий через $\mathcal{PC}$.

Для $T \in \mathcal{PC}$ положим:

$$B_T f = \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Пусть $\psi(t)$ $(\neq 0)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,\ \infty)$ и $\psi(0) = 0$.

Множество

$$\Lambda_\psi = \left\{ f(t) \in S_0(0,\ \infty):\ \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^{+\infty} f^*(t) d\psi(t) < \infty \right\}$$

называется пространством Лоренца

Пространство Лоренца Λ_ψ является симметричным пространством.

Рассматривается и другой класс простанств Лоренца:

$$L_{p,q} = \left\{ f \in S_0(0,\infty):\ \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

с нормой:

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $1 \le p \le \infty,\ 1 \le q < \infty,\ q \leqslant p.$

Пространства Лоренца $L_{p,q}$ также являются симметричными пространствами.

Заметим, что справедливо следующее соотношение:

$$L_{p,p} = L_p.$$

3. Доминантная эргодическая теорема

Рассмотрим для любого $\tau > 0$ оператор растяжения σ_τ: $S(0,\ \infty) \to S(0,\ \infty)$

$$\sigma_\tau f(t) = f\left(\frac{t}{\tau}\right),\ \tau > 0.$$

Как известно, операторы σ_τ ограниченно действуют в любом симметричном пространстве E ([1]).

Вычислим норму $\|\sigma_\tau\|_{E\to E}$ для пространств $E = L_{p,q}$ и $E = \Lambda_\psi$.

Напомним, что функцией растяжения положительной всюду конечной функции $\psi(t)$ на полуоси $(0,\ \infty)$ называется функция

$$M_\psi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)},\quad 0 < s < \infty.$$

- Вычислим $\|\sigma_\tau f\|_{L_{p,q}}$.

$$\|\sigma_\tau f\|_{L_{p,q}} = \left[\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left[f^*\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]^q \frac{dt}{\tau}\right]^{\frac{1}{q}} = \left|\frac{t}{\tau} = s, \quad t = \tau s\right| =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty (\tau s)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{\tau ds}{\tau s}\right]^{\frac{1}{q}} = \tau^{\frac{1}{p}} \left[\int\limits_0^\infty (s)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}} = \tau^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Следовательно

$$\|\sigma_\tau\|_{L_{p,q}} = \tau^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что для $E = L_p \quad \|\sigma_\tau\|_{L_p} = \tau^{\frac{1}{p}}$.

- Рассмотрим теперь $\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi}$:

$$\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^\infty f^*\left(\frac{t}{\tau}\right) d\psi(t) = \left[\frac{t}{\tau} = s, \ \ t = \tau\, s\right] = \int\limits_0^\infty f^*(s) d\psi(\tau\, s).$$

Так как

$$\int\limits_0^\theta d\psi(\tau\, s) = \psi(\tau\,\theta), \quad \int\limits_0^\theta d\psi(s) = \psi(\theta),$$

то

$$\int\limits_0^\theta d\psi(\tau\, s) = \psi(\tau\,\theta) = \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)}\psi(\theta) =$$

$$= \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} \int\limits_0^\theta d\psi(s) \leqslant \int\limits_0^\theta \sup_{\theta>0} \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} d\psi(s).$$

По свойству перестановок (см. [1], гл. II, § 2.) имеем:

$$\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \sup_{0<\theta<\infty} \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} \int\limits_0^\infty f^*(s) d\psi(s) = M_\psi(\tau)\|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

С другой стороны,

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} \geqslant \sup_{t>0} \frac{\|\sigma_\tau\, \chi_{(0,\,t)}\|_{\Lambda_\psi}}{\|\chi_{(0,\,t)}\|_{\Lambda_\psi}} = \sup_{t>0} \frac{\int_0^\infty \chi^*_{(0,\,t)}(s) d\psi(\tau\, s)}{\int_0^\infty \chi^*_{(0,\,t)}(s) d\psi(s)} =$$

$$= \sup_{t>0} \frac{\int\limits_0^t d\psi(\tau\, s)}{\int\limits_0^t d\psi(s)} = \sup_{t>0} \frac{\psi(\tau\, t)}{\psi(t)} = M_\psi(\tau).$$

Следовательно

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = M_\psi(\tau).$$

Для симметричного пространства E положим:

$$d_E = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{E\to E}\, d\,\tau.$$

Для пространства Лоренца $L_{p,q}$ с $p>1$ имеем:

$$d_{L_{p,q}} = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{L_{p,q}}\, d\,\tau = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} d\,\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \tau^{-\frac{1}{p}}\, d\,\tau = \left.\frac{\tau^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\right|_0^1 = \frac{p}{p-1} - \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}.$$

Так как $p>1$, то $1-\frac{1}{p}>0$, и

$$d_{L_{p,q}} = \frac{p}{p-1}.$$

Следующая теорема, представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы в пространствах Лоренца Λ_ψ.

Теорема 2. *Если* $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau)$, *при* $\tau\to\infty$, $T\in\mathcal{PC}$ *и* $f\in\Lambda_\psi$, *то* $B_T f\in\Lambda_\psi$ *и*

$$\|B_T f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \|f^{**}\|_{\Lambda_\psi} \leqslant d_{\Lambda_\psi}\|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

Доказательство. Так как $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau)$ при $\tau\to\infty$, то оператор Харди $Hf(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)\, d\tau$ ограниченно действует в Λ_ψ ([1], теорема 6.6). Следовательно, если $f\in\Lambda_\psi$, то $f^{**} = Hf^*\in\Lambda_\psi$. Тогда, в силу теоремы 3 [2] $B_T f\in\Lambda_\psi$ и $\|B_T f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \|f^{**}\|_{\Lambda_\psi}$.

Далее,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)ds = |\, s=\tau\, t\,| = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(\tau\, t)d(\tau\, t) =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^1 f^*(\tau\, t)\, t\, d\tau = \int\limits_0^1 f^*(\tau\, t)d\tau = \int\limits_0^1 \sigma_{\frac{1}{\tau}} f^*(t)d\tau.$$

Следовательно

$$\|f^{**}\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau \cdot \|f^*\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau \cdot \|f\|_{\Lambda_\psi} = d_{\Lambda_\psi}\|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

□

Заметим, что

$$d_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau < \infty$$

при

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Для пространства Лоренца $L_{p,q}$, имеет место аналогичный результат:

Теорема 3. *Если* $p > 1$, $f \in L_{p,q}$, *и* $T \in \mathcal{PC}$, *то* $B_T f \in L_{p,q}$ *и*

$$\|B_T f\|_{L_{p,q}} \leqslant \|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,q}$. Так как

$$\|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{L_{p,q}}\, d\tau \cdot \|f^*\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}} < \infty,$$

то $f^{**} \in L_{p,q}$ и по [2]

$$\|B_T f\|_{L_{p,q}} \leqslant \|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}} \quad (\text{ при } \ p > 1\ ).$$

□

Отметим, что формулировка полученного результата согласуется с формулировкой классической доминантной эргодической теоремы в пространствах L_p, приведенной во введении.

Список литературы

[1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.

[3] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.

[4] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.

[5] Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.

[6] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.

[7] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.

[8] Edgar G.A., Sucheston L. Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.

[9] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.

[10] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators // J. Reinc. Ang. Math. — 1960. — No. 205. — P. 101–106.

[11] Hopf E. The general temporally descrete Markov process // J. Rat. Meca. Anal. — 1954. — No. 3. — P. 13–45.

[12] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 295–300.

[13] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.

[14] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.

[15] von Neumann J. Proof of the qlasiergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1932. — No. 18. — P. 70–82.

[16] Weiner N. The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.

[17] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 292–294.

У даній роботі доведено аналог домінантної ергодичної теореми для абсолютних стисків у просторах Лоренца вимірніх функцій на додатній напівосі. Використовано методи теорії симетричних просторів вимірних функцій на просторах з необмеженной мірой.

In the present work we study conditions under which Dominated Ergodic Theorems hold in Lorenz spaces for a positive contraction on positive semiaxis. The method's of the rearrangements invariant spaces was used.