Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 53–76.

Д. А. Закора

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В работе исследована спектральная задача о нормальных колебаниях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости. В начале работы приведена постановка задачи, а также выведен операторный пучок, ассоциированный с исследуемой задачей. Для этого пучка исследованы вопросы локализации, дискретности и асимптотики спектра. Доказаны утверждения о двукратной полноте (с дефектом или без дефекта) для системы собственных и присоединенных элементов, получено утверждение о существенном спектре задачи.

Введение

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области без учета вращения, а также при отсутствии силы тяжести и при некоторых модельных ограничениях на граничные условия для динамической плотности изучалась в [1], с. 390-410 (см. также [2]). В указанной монографии доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, а также исследована спектральная задача о нормальных колебаниях. В работе [3] изучена задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область и находящейся под действием гравитационного поля.

Настоящая работа посвящена общей модели, учитывающей вращение тела, гравитационное поле, а так же зависимость параметров модели от различных точек среды. Оказывается, что учет гравитационных сил приводит к нарушению симметрии в задаче (в предположении постоянства стационарной плотности), а также к некомпактным возмущениям в операторном пучке, отвечающем спектральной задаче. Тем не менее, в работе доказаны утверждения о расположении и структуре спектра, а также установлены асимптотические формулы для различных ветвей собственных значений. Доказано, что в случае переменных параметров модели в спектре задачи возникает несколько отрезков, расположенных на действительной положительной полуоси, существенного спектра. В случае постоянных параметров модели эти отрезки схлопываются в несколько различных точек, которые становятся предельными для некоторых ветвей собственных значений. Эти части спектра не возникают в модели баротропной жидкости и целиком связаны с эффектами памяти в релаксирующей жидкости. Кроме того в исследуемой модели доказано существование двух серий собственных значений, связанных со звуковыми волнами в среде. В случае, когда система вращается, доказано наличие отрезка существенного спектра, расположенного на мнимой оси и связанного с внутренними инерционными волнами в среде.

1. Малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

1.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $S := \partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать также, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Задача о малых движениях идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело, описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} - 2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}\times\vec{e}_3) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 + \rho_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\rho + \rho_0 \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{2}$$

где $\vec{w}(t,x)$ — поле смещений в жидкости, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ — динамическое давление и плотность в жидкости, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Релаксирующая жидкость моделируется следующим дополнительным уравнением состояния, связывающим динамическое давление $p(t,x)$ и динамическую плотность $\rho(t,x)$:

$$p(t,x) = a_\infty^2(x)\rho(t,x) - \int_0^t K(t-s,x)\rho(s,x)\,ds, \tag{3}$$

где положительная функция $K(t,x)$ определяет ядро интегрального оператора Вольтерра, а $a^2_\infty(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости. Важный частный случай получается, если определить ядро в форме

$$K(t,x) = \sum_{l=1}^{m} k_l(x)\exp(-b_l(x)t), \tag{4}$$

где $k_l(x)$ и $b_l(x)$ $(l=\overline{1,m})$ положительные ограниченные функции в области Ω.

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости заключается в отыскании полей $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ из уравнений и граничного условия (1)- (2), соотношения (3), и при начальных условиях

$$\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x) = \vec{w}^1(x). \tag{5}$$

1.2. **Проектирование уравнений движения.** Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [4]. Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму (см. [4], с. 103):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{6}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) | \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } S)\},$$

$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) | \quad \vec{v} = \nabla\Phi, \quad \int_\Omega \Phi \, d\Omega = 0\},$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [4], с. 100-102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{w}$ в виде:

$$\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega). \tag{7}$$

Подставим представление (7) в уравнение (1) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (6). Получим систему уравнений:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -g\rho_0^{-1}P_0(\rho\vec{e}_3) + P_0\vec{f}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] =$$
$$= -\rho_0^{-1}\nabla p - g\rho_0^{-1}P_G(\rho\vec{e}_3) + P_G\vec{f} \quad (\text{в } \Omega). \tag{9}$$

Подставим представление (7) в уравнение и граничное условие из (2). Получим:

$$\rho = -\rho_0\mathrm{div}\nabla\Phi \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{10}$$

С помощью соотношений (3) и (10) в уравнениях (8), (9) можно исключить функции $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и прийти к следующей системе уравнений, заданных в области Ω, и граничному условию:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = gP_0(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_0\vec{f}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -\Big[-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big] +$$
$$+\int\limits_0^t\Big[-\nabla(K(t-s,x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big]\,ds + gP_G(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_G\vec{f}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{13}$$

Начальные условия для уравнений (11), (12) имеют вид:

$$\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^0(x) =: \vec{v}^0(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^1(x) =: \vec{v}^1(x), \tag{14}$$
$$\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^0(x) =: \nabla\Phi^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^1(x) =: \nabla\Phi^1(x).$$

1.3. **Вспомогательные операторы и их свойства.** Для перехода к операторной формулировке задачи (11)-(14) введем ряд операторов и изучим их свойства. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}(\Omega)$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v};\nabla\Phi)^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} := \int\limits_\Omega(\vec{v}_1\cdot\overline{\vec{v}_2} + \nabla\Phi_1\cdot\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Omega, \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} := \int\limits_\Omega(|\vec{v}|^2 + |\nabla\Phi|^2)\,d\Omega.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2}\\ S_{2,1} & S_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \nabla\Phi\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\\ iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Лемма 1. *(см. [5]) Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\|=1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный (см. [6]) и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{ess}(S_{1,1}) = [-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Будем считать далее, что функции $a_\infty^2(x)$ и $K(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным, а граница S области Ω — класса C^2.

Лемма 2. *(см. [5]) Введем пространство*

$$H_A := \{\nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega)|\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\ (\text{на } S),\quad \int\limits_\Omega\Phi\,d\Omega = 0\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_A := \int\limits_{\Omega} a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1\overline{\mathrm{div}\nabla\Phi_2}\,d\Omega.$$

Пространство H_A является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство $\vec{G}(\Omega)$: $H_A \subset\!\to\subset\!\to \vec{G}(\Omega)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A; \vec{G}(\Omega))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\vec{G}(\Omega)$, обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$ существует и единственно обобщенное решение задачи

$$-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi) = \nabla q \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \int\limits_{\Omega} \Phi\, d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\Phi = A^{-1}\nabla q$. Более того, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega))$ при $p > 3/2$ и справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k(A) = \Big(\frac{1}{6\pi}\int\limits_{\Omega} a_\infty^{-3}(x)\,d\Omega\Big)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Аналогично оператору A, заменяя $a_\infty^2(x)$ на $K(t,x)$, введем оператор-функцию $K(t)$, при этом $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(K(t))$ для каждого $t \geq 0$.

Определим операторы B_0 и B_G следующим образом:

$$B_0\nabla\Phi := P_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad B_G\nabla\Phi := P_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(B_G) = H_A. \tag{16}$$

О свойствах операторов B_0 и B_G говорит следующая лемма.

Лемма 3. *Для операторов B_0 и B_G выполнены свойства*

$$B_0A^{-1/2} =: Q_0 \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega)),\ B_GA^{-1/2} =: Q_G \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega)). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\nabla\Phi \in \mathcal{D}(B_0) = H_A$, тогда

$$\|B_0\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \|\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \Big(\min_{x\in\overline{\Omega}} a_\infty^2(x)\Big)^{-1}\|A^{1/2}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}.$$

Отсюда, после замены $A^{1/2}\nabla\Phi = \nabla\Psi$, следует, что $B_0A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega))$. Аналогично доказывается, что $B_GA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega))$. □

1.4. **Переход к операторному уравнению. Исследование интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Разрешимость исходной начально-краевой задачи.** С использованием введенных операторов задачу (11)-(14) запишем в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)\xi(s)\,ds + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения: $\mathcal{A} := \operatorname{diag}(I, A)$, $\mathcal{K}(t) := \operatorname{diag}(0, K(t))$,

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & -gQ_0A^{-1/2} \\ 0 & I - gQ_GA^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0\vec{f}(t); P_G\vec{f}(t))^t,$$

$$\xi(0) = \xi^0 := (\vec{v}^0; \nabla\Phi^0)^t = (P_0\vec{w}^0; P_G\vec{w}^0)^t, \quad \xi'(0) = \xi^1 := (\vec{v}^1; \nabla\Phi^1)^t = (P_0\vec{w}^1; P_G\vec{w}^1)^t.$$

Таким образом, если $\vec{w}$, ρ, ∇p — такое решение задачи (1)-(5) о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области, что все проведенные до сих пор рассуждения законны, тогда функция ξ является решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка (18).

Дадим следующее определение.

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1)-(5) такие функции $\vec{w}$, ρ, ∇p для которых функция ξ является сильным решением задачи Коши (18). В свою очередь сильным решением задачи Коши (18) (см. [7], с. 291) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi'(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t)$, $\mathcal{A}^{1/2}\xi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из (18) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Осуществим в задаче (18) замену $\mathcal{A}^{1/2}\xi(t) = \eta'(t)$, $\eta(0) = 0$ и преобразуем ее к системе двух уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega_0 i\mathcal{S}\dfrac{d\xi}{dt} - \mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\eta}{dt} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\mathcal{A}^{-1/2}\dfrac{d\eta(s)}{ds}\,ds + \mathcal{F}(t), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\xi}{dt}, \qquad \xi'(0) = \xi^1, \quad \eta'(0) = \mathcal{A}^{1/2}\xi^0. \end{cases} \tag{19}$$

Просто проверяется, что $\mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2} = \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{R}$, $\mathcal{K}(t)\mathcal{A}^{-1/2} = \mathcal{K}_b(t)\mathcal{A}^{1/2}$, где $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_b(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. С использованием проведенных преобразований запишем систему (19) в виде одного интегродифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = \widehat{\mathcal{A}}y + \widehat{\mathcal{R}}y + \int_0^t \widehat{\mathcal{K}}(t-s)\widehat{\mathcal{C}}y(s)\,ds + \widehat{\mathcal{F}}(t), \quad y(0) = y^0, \text{ где} \tag{20}$$

$$y := (\xi'; \eta')^t,\ y^0 := (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t,\ \widehat{\mathcal{C}} := \operatorname{diag}(0, \mathcal{A}^{1/2}),\ \widehat{\mathcal{F}}(t) := (\mathcal{F}(t); 0)^t,$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\mathcal{S} & -\mathcal{A}^{1/2} \\ \mathcal{A}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathcal{K}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при этом $\widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ и $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, а области определения операторов $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{C}}$, очевидно, связаны включением $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$.

Определение 2. (см. [7], с. 38) Сильным решением задачи Коши (20) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{A}}y(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(0) = y^0$ и выполнено уравнение из (20) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *(см.* [5]*) Пусть* $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, *тогда для любого* $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ *существует и единственно сильное решение задачи Коши* (20).

Теорема 2. *(см.* [5]*) Пусть ядро интегрального оператора Вольтерра* $K(t,x)$ *из* (3) *и поле* $\vec{f}(t,x)$ *непрерывно дифференцируемы по переменной* $t \in \mathbb{R}_+$ *со значениями в* $C^1(\overline{\Omega})$ *и* $\vec{L}_2(\Omega)$ *соответственно, тогда для любых* $\vec{w}^0(x)$ *и* $\vec{w}^1(x)$ *таких, что* $P_0\vec{w}^0,\ P_0\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega)$, $P_G\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $P_G\vec{w}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, *существует и единственно сильное (в смысле определения 1) решение начально-краевой задачи* (1)-(5).

2. Нормальные колебания вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

2.1. **Вывод основного операторного пучка.** Задача (1)-(5) о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, приводится к задаче Коши (18). Будем считать далее, что ядро $K(t,x)$ определяется по формуле (4), где $b_l(x) = b_l = \mathrm{const}$ $(l = \overline{1,m})$. Тогда однородное уравнение из (18), записанное в виде системы, примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi + \\ \qquad\qquad +gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds, \end{cases} \tag{21}$$

где K_l $(l = \overline{1,m})$ — операторы, которые строятся аналогично оператору A (заменой $a^2_\infty(x)$ на $k_l(x)$ в лемме 2).

Систему интегродифференциальных операторных уравнений (21) можно свести к системе дифференциально-операторных уравнений второго порядка. А именно, осуществим в системе (21) следующие замены:

$$\nabla\Phi_l := \int_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{22}$$

Рассматривая продифференцированные соотношения (22) как систему дифференциальных уравнений, присоединенных к системе (21), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\nabla\Phi_l, \\ \dfrac{d\nabla\Phi_l}{dt} = K_l\nabla\Phi - b_l\nabla\Phi_l \quad (l=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{23}$$

Разыскивая решения системы (23) в виде:

$$(\vec{v}(t);\nabla\Phi(t);\nabla\Phi_1(t);...;\nabla\Phi_m(t))^t = \exp(-\lambda t)(\vec{v};\nabla\Phi;\nabla\Phi_1;...;\nabla\Phi_m)^t,$$

получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\nabla\Phi_l, \\ (b_l-\lambda)\nabla\Phi_l = K_l\nabla\Phi \quad (l=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{24}$$

где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(K_l)$, $\nabla\Phi_l\in\vec{G}(\Omega)$ $(l=\overline{1,m})$.

Всюду далее будем считать, что $b_1<...<b_m$. Покажем, что числа $\lambda=b_l$ $(l=\overline{1,m})$ не являются собственными значениями задачи (24). В самом деле, положим $\lambda=b_k$ в системе (24). Тогда, в силу положительной определенности оператора K_k, получим, что $\nabla\Phi=0$. Отсюда следует, что $\nabla\Phi_l=0$ $(l\neq k)$. При этих условиях из первого уравнения системы (24) следует, что $\vec{v}=0$. Тогда из второго уравнения системы (24) получим, что $\nabla\Phi_k=0$. Полученные равенства противоречат тому, что $\lambda=b_k$ собственное значение задачи (24). Учитывая это обстоятельство, преобразуем систему (24) к эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}K_l\nabla\Phi. \end{cases}$$

Осуществим здесь замену $A^{1/2}\nabla\Phi=\varphi$ (здесь и далее для краткости опущен знак градиента). В результате придем к следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 I_0\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + \widehat{S}_{1,2}\varphi) - gQ_0\varphi = 0, \\ \lambda^2 A^{-1}\varphi - 2\omega_0 i\lambda(\widehat{S}_{2,1}\vec{v} + \widehat{S}_{2,2}\varphi) + \Big(I_G - gA^{-1/2}Q_G - \sum_{l-1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}\widehat{K}_l\Big)\varphi = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\widehat{S}_{1,2}:=S_{1,2}A^{-1/2}$, $\widehat{S}_{2,1}:=A^{-1/2}S_{2,1}$, $\widehat{S}_{2,2}:=A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}$, $\widehat{K}_l:=A^{-1/2}K_lA^{-1/2}$ $(l=\overline{1,m})$. Операторы $\widehat{S}_{1,2}$, $\widehat{S}_{2,1}$ и $\widehat{S}_{2,2}$ компактны, а I_0, I_G — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно.

Для вывода окончательной системы операторных уравнений получим удобное для дальнейшего представление для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$. С этой целью рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω и его подпространство $L_{2,a}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) |\, (f, a_\infty^{-1})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Определим операторы

$$\Pi f := f - \int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x) f(x)\, d\Omega \Big(\int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x)\, d\Omega \Big)^{-1}, \quad \Pi^\perp := I - \Pi,$$

где I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Несложно проверить, что введенные операторы Π и $\Pi^\perp$ являются ортопроекторами пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,a}(\Omega)$ и $L_{2,a}^\perp(\Omega)$ соответственно. Размерность образа оператора $\Pi^\perp$ равна единице, а потому $\Pi^\perp \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega), L_{2,a}^\perp(\Omega))$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ справедливо представление*

$$\widehat{K}_l = U^* M_\Pi(p_l) U, \quad p_l(x) := k_l(x) a_\infty^{-2}(x) \quad (l=\overline{1,m}),$$

где $U : \vec{G}(\Omega) \to L_{2,a}(\Omega)$ — некоторый унитарный оператор, а $M_\Pi(p_l)$ — сужение на подпространство $L_{2,a}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Операторы $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ являются ограниченными, самосопряженными в $\vec{G}(\Omega)$ и

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)} \geq (\widehat{K}_l \nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega)} \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)} \tag{26}$$

Доказательство. Определим оператор $T\nabla\Phi := a_\infty \mathrm{div} \nabla\Phi$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_A$ (см. лемму 2). Оператор T замкнут из $\vec{G}(\Omega)$ в $L_{2,a}(\Omega)$. Сопряженный к T оператор $T^*\varphi = -\nabla(a_\infty \varphi)$ задан на плотном множестве $\mathcal{D}(T^*) \subset L_{2,a}(\Omega)$ и имеет нулевое ядро. Отсюда следует, что замыкание образа оператора T совпадает со всем пространством $L_{2,a}(\Omega)$. Из этих рассуждений и равенства $A = T^*T$ на $\mathcal{D}(A)$ следует, что имеет место полярное представление $T = UA^{1/2}$ (см. [8], с. 420), где $U : \vec{G}(\Omega) \to L_{2,a}(\Omega)$ — унитарный оператор.

Теперь операторы K_l $(l=\overline{1,m})$ с помощью введенных операторов T и U могут быть представлены в форме: $K_l = T^*\Pi M(p_l)\Pi T = A^{1/2} U^* \Pi M(p_l) \Pi U A^{1/2}$. Следовательно, $\widehat{K}_l = A^{-1/2} K_l A^{-1/2} = U^* \Pi M(p_l) \Pi U = U^* M_\Pi(p_l) U$, где $M_\Pi(p_l) := \Pi M(p_l) \Pi$ — сужение на подпространство $L_{2,a}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ограниченность и самосопряженность операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ очевидна. Докажем оценки (26). Пусть $\nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega)$, тогда

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)} = \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|U\nabla\Phi\|^2_{L_{2,a}(\Omega)} \geq$$
$$\geq (M(p_l) U\nabla\Phi, U\nabla\Phi)_{L_{2,a}(\Omega)} = (M(p_l)\Pi U\nabla\Phi, \Pi U\nabla\Phi)_{L_{2,a}(\Omega)} =$$

$$= (\widehat{K}_l \nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega)} \geq \dots \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}.$$

Здесь была использована унитарность оператора U, свойство ортогональности проектора Π, а также равенство $U = \Pi U$. □

С помощью полученного представления для операторов $\widehat{K}_l$ $(l = \overline{1,m})$ преобразуем систему (25). В результате придем к следующей основной спектральной задаче, записанной в векторно-матричной форме в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$:

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \lambda^2 \mathcal{A}\xi - 2\omega_0 i\lambda\mathcal{S}\xi + \mathcal{Q}(\lambda)\xi = 0, \text{ где } \xi := (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H}, \tag{27}$$

$\mathcal{A} := \mathrm{diag}(I_0, A^{-1})$, $\mathcal{S}_{1,1} := S_{1,1}$, $\mathcal{S}_{1,2} := \widehat{S}_{1,2}$, $\mathcal{S}_{2,1} := \widehat{S}_{2,1}$, $\mathcal{S}_{2,2} := \widehat{S}_{2,2}$, $\mathcal{Q}_{1,1}(\lambda) := 0$, $\mathcal{Q}_{2,1}(\lambda) =: 0$, $\mathcal{Q}_{1,2}(\lambda) := -gQ_0$, $\widehat{Q}_G := A^{-1/2}Q_G$, $\mathcal{Q}_{2,2}(\lambda) := I_G - g\widehat{Q}_G - \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U$.

Задача (27), которую мы назовем спектральной задачей ассоциированной с задачей о нормальных колебаниях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, и будет предметом дальнейших исследований.

2.2. **О существенном спектре задачи и локализации спектра.** Определим вспомогательную оператор-функцию $M(\lambda)$ и функцию $p_\lambda(x)$ $(x \in \Omega)$ по формулам:

$$M(\lambda) := I_G - \sum_{l=1}^m \frac{U^* M_\Pi(p_l) U}{b_l - \lambda}, \ \ p_\lambda(x) := 1 - \sum_{l=1}^m \frac{p_l(x)}{b_l - \lambda} \ \ (x \in \Omega). \tag{28}$$

Введем следующие условия на физические параметры системы:

$$(a): \ p_0(x) = 1 - \sum_{l=1}^m \frac{k_l(x)}{b_l a_\infty^2(x)} > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}; \tag{29}$$

$$(b): \ \exists\, a_l > 0\, (l = \overline{1,m}) : \sum_{l=1}^m a_l = 1, \ a_l - \frac{k_l(x)}{b_l a_\infty^2(x)} > 0 \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{30}$$

Очевидно, что из условия (30) следует (29), а значит условие (b) более жесткое. Эти ограничения предполагают, что времена релаксации b_l^{-1} в системе и корректирующие функции $k_l(x)$ достаточно малы в сравнении с квадратом скорости звука $a_\infty^2(x)$. Отметим здесь также, что функции $a_\infty^2(x)$ и $k_l(x)$ $(l = \overline{1,m})$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$.

Пусть выполнено условие (29). Рассмотрим уравнение $p_\lambda(x) = 0$. При каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l $(l = \overline{1,m})$ (напомним, что $b_1 < ... < b_m$). В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x \in \overline{\Omega}$ корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_l \subset (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0,\ l = \overline{1,m})$.

Лемма 5. *Весь спектр оператор-функции $M(\lambda)$ существенный и состоит из объединения отрезков Δ_l $(l=\overline{1,m})$: $\sigma(M(\lambda))=\sigma_{ess}(M(\lambda))=\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу $M(\lambda)\varphi=0$. Осуществляя замену $U\varphi=:f\in L_{2,a}(\Omega)$ преобразуем ее к эквивалентной спектральной задаче $M_\Pi(p_\lambda)f=\Pi M(p_\lambda)\Pi f=0$. Дальнейшее доказательство основано на построении некомпактной последовательности Вейля для последней задачи.

Отметим, что совокупность тех значений λ для которых функция $p_\lambda(x)$ имеет нули в Ω является плотным множеством в $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$. Пусть теперь λ_0 из этого плотного в $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$ множества и $x_0\in\Omega$ — один из нулей функции $p_{\lambda_0}(x)$. Рассмотрим шар $S_r:=\{x\in\mathbb{R}^3|\ |x-x_0|\le r\}$ и $S_{r,+}:=\{|x-x_0|\le r,\ x_3>x_{0,3}\}$, $S_{r,-}:=\{|x-x_0|\le r,\ x_3\le x_{0,3}\}$ — верхнюю и нижнюю его половины. Определим функцию

$$f_r(x):=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-1}a_\infty(x)(\chi_{S_{r,+}}(x)-\chi_{S_{r,-}}(x)),\quad r>0, \tag{31}$$

где $\chi_S(x)$ — индикатор множества S. Пусть r таково, что $S_r\subset\Omega$, тогда построенная функция обладает свойствами:

$$(f_r,a_\infty^{-1})_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x)f_r(x)\,d\Omega=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-1}\int\limits_\Omega(\chi_{S_{r,+}}(x)-\chi_{S_{r,-}}(x))\,d\Omega=0,$$

$$\|f_r\|^2=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega|a_\infty(x)\chi_{S_r}(x)|^2\,d\Omega=1.$$

Это означает, что $f_r\in L_{2,a}(\Omega)$, $\|f_r\|=1$ (при достаточно малых r).

Из вида построенных функций следует, что множество $\{f_r\}$ некомпактно в $L_{2,a}(\Omega)$. Осуществим следующие оценки

$$\begin{aligned}
&\|\Pi M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_{2,a}(\Omega)}\le\|M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_2(\Omega)}=\|M(p_{\lambda_0})f_r\|^2_{L_2(\Omega)}=\\
&=\int\limits_\Omega|p_{\lambda_0}(x)f_r(x)|^2\,d\Omega=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega a_\infty^2(x)p_{\lambda_0}^2(x)\chi_{S_r}(x)\,d\Omega=\\
&=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_{S_r}a_\infty^2(x)p_{\lambda_0}^2(x)\,dS_r=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_{S_r}a_\infty^2(x)\,dS_r\cdot p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}=\\
&=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega a_\infty^2(x)\chi_{S_r}(x)\,d\Omega\cdot p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}=p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}\to0\ \ (r\to0),
\end{aligned}$$

где последнее соотношение следует из непрерывности функции $p_{\lambda_0}(x)$ и равенства $p_{\lambda_0}(x_0)=0$. Таким образом $\lambda_0\in\sigma_{ess}(M(\lambda))$. Из свойства замкнутости спектра следует утверждение леммы. □

Для дальнейших рассуждений понадобится следующая лемма (см. [9]).

Лемма 6. *(Г.В. Радзиевский* [9]*, см. также* [10]*) Пусть H — гильбертово пространство, $0 \le A = A^*$, $B \in \mathfrak{S}_\infty$, $0 \le \beta < 1$, тогда*

$$\|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta\| \le C(\beta, \arg\lambda)|\lambda|^{-\beta}, \quad \lambda \in \Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\arg\lambda| > \varepsilon\},$$
$$\lim_{\eta\to\infty} \sup_{\{|\lambda|>\eta,\ |\arg\lambda|>\varepsilon\}} |\lambda|^\beta \|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta B\| = 0. \tag{32}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 2\omega_0$ такое, что весь спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ принадлежит множеству $\sigma_R := \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon} \cup C_R$, где*

$$\Lambda^\pm_{R,\varepsilon} := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \ |\lambda| > R,\ |\arg\lambda \mp \pi/2| < \varepsilon\},\ -\pi < \arg\lambda \le \pi, \tag{33}$$

C_R — круг радиуса R с центром в начале координат. Спектр, лежащий вне множества $\Lambda := [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \cup \{\cup_{l=1}^m \Delta_l\}$, состоит из изолированных конечнократных собственных значений (дискретный). Возможными предельными точками спектра могут быть только точки указанного множества и бесконечно удаленная точка.

Доказательство. Установим прежде, что точки $\lambda = b_l$ $(l = \overline{1,m})$, которые не являются собственными значениями $\mathcal{L}(\lambda)$, не являются также и предельными точками спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Для этого достаточно доказать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности этих точек. Рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1 = \xi_2$, где $\xi_2 := (\vec{v}_2; \varphi_2)^t \in \mathcal{H}$ — заданный элемент, а $\xi_1 := (\vec{v}_1; \varphi_1)^t$ — искомый. Если λ близко к b_{l_0} то из первого соотношения системы, через которую можно записать последнее уравнение, можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить $\vec{v}_1$ через φ_1 и $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 = \lambda^{-1}S(\lambda)\Big((2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\varphi_1 + \vec{v}_2\Big), \tag{34}$$

где $S(\lambda) := (\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}$. Подставим это представление во второе уравнение системы:

$$\Big(\lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + M(\lambda) - g\widehat{Q}_G\Big)\varphi_1 - \\ - 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\Big((2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\varphi_1 + \vec{v}_2\Big) = \varphi_2. \tag{35}$$

Учитывая вид оператор-функции $M(\lambda)$ из последнего соотношения можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить φ_1 через φ_2 и $\vec{v}_2$, если только λ достаточно близко к b_{l_0}. Это означает, что точка b_{l_0} не является предельной для спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $R > 2\omega_0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R$. Для этого достаточно показать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В связи с этим опять рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1 = \xi_2$. Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0 = \|2\omega_0 i S_{1,1}\|$, тогда в последней задаче можно с помощью ограниченных оператор-функций исключить $\vec{v}_1$ и прийти к задаче (35), которую представим в форме:

$$l(\lambda)\varphi_1 = 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\vec{v}_2 + \varphi_2, \;\; l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} + G(\lambda), \tag{36}$$

$$G(\lambda) := -\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^* M_\Pi(p_l)U - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} - g\widehat{Q}_G -$$
$$- 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0).$$

Нужно показать, что оператор-функция $l(\lambda)$ непрерывно обратима при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ (при достаточно большом $R > 2\omega_0$), тогда из (34)- (36) будет следовать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В самом деле, представим оператор-функцию $l(\lambda)$ в виде

$$l(\lambda) = (I_G + i\lambda A^{-1/2})\left(I_G + (I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\right)(I_G - i\lambda A^{-1/2}).$$

Здесь крайние скобки — непрерывно обратимые при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ операторы. Таким образом, для непрерывной обратимости $l(\lambda)$ достаточно показать, что

$$\|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| \to 0 \quad (\lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R). \tag{37}$$

Несложно проверить, что $\|S(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $\lambda\to\infty$. Отсюда и из оценки (32) (при $\beta = 0$) следует, что в (37) в оценке нуждается лишь следующее выражение:

$$\|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}\widehat{S}_{2,2}(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| =$$
$$= \|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| \le$$
$$\le \|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}(A^{-1/4}S_{2,2}A^{-1/4})\| \times$$
$$\times \|(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}\| = o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R). \tag{38}$$

Здесь использованы оценки из леммы 6. Из (38) и предыдущих рассуждений следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 2\omega_0$ такое, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$, а значит $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R = \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon} \cup C_R$.

Перейдем от задачи (27) к задаче для фредгольмовой оператор-функции:

$$\mathcal{L}_F(\lambda)\xi := \begin{pmatrix} \lambda(\lambda I_0 - 2\omega_0 iS_{1,1}) & -gQ_0 \\ 0 & M(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}\mathcal{L}(\lambda)\xi =: (\mathcal{I} + \mathcal{F}(\lambda))\xi = 0, \tag{39}$$

где $\mathcal{I}$ — это единичный оператор в $\mathcal{H}$, а оператор-функция $\mathcal{F}(\lambda)$, как несложно проверить, принимает компактные значения при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$. На множестве $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ спектры пучков $\mathcal{L}_F(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадают. Поскольку точки, достаточно близкие к числам b_l являются регулярными точками для $\mathcal{L}(\lambda)$, то из (39) заключаем, что они же будут регулярными и для $\mathcal{L}_F(\lambda)$, а значит пучок $\mathcal{L}_F(\lambda)$ является регулярным в $\mathbb{C}\backslash\Lambda$. Отсюда следует (см. [11], а также [4], с. 74), что все точки спектра, не принадлежащие множеству Λ, являются изолированными собственными значениями оператор-функции задачи (39), а значит и $\mathcal{L}(\lambda)$. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные кратности. Точками сгущения могут являться только особенности оператор-функции $\mathcal{F}(\lambda)$, то есть множество Λ и бесконечно удаленная точка. $\square$

Основываясь на доказанном утверждении установим теорему о дискретном и существенном спектре задачи (27).

Теорема 4. *Предельный (существенный) спектр пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$ *совпадает с множеством* Λ*:* $\sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda)) = \Lambda$.

Доказательство. Пусть λ принимает значения из окрестности множества $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить $\vec{v}$ и прийти к задаче

$$\Big(M(\lambda) + F_1(\lambda)\Big)\varphi := \Big(\lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + M(\lambda) - g\widehat{Q}_G - \\ - 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\Big)\varphi = 0, \quad (40)$$

где $F_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Пусть $\lambda_0 \in \cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, тогда $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0))$. Оператор $M(\lambda_0)$ самосопряжен, а $F_1(\lambda_0) \in \mathfrak{S}_\infty$. По теореме Вейля $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0) + F_1(\lambda_0))$. Следовательно, существует некомпактная последовательность Вейля $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|M(\lambda_0)\varphi_n + F_1(\lambda_0)\varphi_n\|_{\vec{G}(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$, а значит $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Для дальнейшего рассмотрим операторный пучок

$$l_1(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda)^{-1}U^* M_\Pi(p_l)U - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} - g\widehat{Q}_G.$$

Пучок $M^{-1}(\lambda)l_1(\lambda)$ имеет вид фредгольмовой оператор-функции, регулярной в $\mathbb{C}\setminus \cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, а значит в некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ может иметь лишь конечное количество изолированных собственных значений конечной кратности. Это же утверждение верно и для пучка $l_1(\lambda)$.

Пусть теперь λ принимает значения из некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и не совпадает ни с одним собственным значением пучка $l_1(\lambda)$. Тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить φ и прийти к задаче

$$\Big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} + F_2(\lambda)\Big)\vec{v} := \Big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} - (2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)2\omega_0 i l_1^{-1}(\lambda)\widehat{S}_{2,1}\Big)\vec{v} = 0,$$

где $F_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Осуществим в этой задаче замену спектрального параметра $\lambda = i\mu$ и умножим обе части уравнения на мнимую единицу: $(2\omega_0 S_{1,1} - \mu I_0 + iF_2(i\mu))\vec{v} = 0$. Применяя к этой задаче рассуждения из первой части теоремы и используя свойство замкнутости спектра получим, что $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Из проведенных рассуждений следует, что $\Lambda \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. В силу теоремы 3 вне множества Λ спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ — дискретен, следовательно, имеет место не включение, а равенство $\Lambda = \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. □

2.3. **Об асимптотике собственных значений.** Из теоремы 3 следует, что бесконечно удаленная точка является возможной предельной точкой для некоторых ветвей собственных значений пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, локализованных у мнимой оси. Для доказательства существования этих ветвей и отыскания асимптотических формул понадобится следующий абстрактный результат (см. [10]), опирающийся на результаты работы [12].

Лемма 7. *(см.* [10]*) Пусть $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty$, причем собственные значения оператора C имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda) := I + \lambda^2 C + G(\lambda), \quad T(\lambda) := (I - \lambda C^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda C^{1/2})^{-1}.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, а оператор-функция $T(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию: $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. Тогда

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i \lambda_k^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Для исследуемой задачи имеет место теорема.

Теорема 5. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $R = R(\varepsilon)$ задача* (27) *имеет две ветви $\{\lambda_k^{(\pm i)}\}_{k=1}^\infty$ собственных значений, расположенных в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, со следующей асимптотикой: $\lambda_k^{(\pm i)}(\mathcal{L}(\lambda)) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A)(1 + o(1))$ $(k \to \infty)$.*

Доказательство. Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, в результате получим задачу $l(\lambda)\varphi = 0$, где пучок $l(\lambda)$ определен в (36). Из леммы 2 следует, что оператор $A^{-1} > 0$ имеет степенную асимптотику собственных значений. Для пучка $l(\lambda)$ построим оператор-функцию $T(\lambda)$ из леммы 7. При помощи оценок, аналогичных тем, что были проведены в (38), можно убедиться, что $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. □

2.4. **О двукратной полноте с дефектом части собственных и присоединенных элементов.** Дадим определение собственного значения оператор-функции, а также собственного и присоединенных элементов.

Определение 3. (см. [13], с. 61) Число λ_0 называется собственным значением оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, если уравнение $\mathcal{L}(\lambda_0)\xi_0 = 0$ имеет ненулевое решение ξ_0. При этом ξ_0 называют собственным элементом $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающим числу λ_0.

Элементы ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} называют присоединенными к собственному элементу ξ_0, если $\sum_{k=0}^{j} (k!)^{-1} \mathcal{L}^{(k)}(\lambda_0)\xi_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$. Число n называют длиной цепочки ξ_0, ξ_1,..., ξ_{n-1} из собственного и присоединенных элементов.

Поступим далее, как в теореме 3 при выводе задачи (35) (или (36)). А именно, будем считать, что $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$. В результате получим задачу

$$l(\lambda)\varphi = 0, \;\; \varphi \in \vec{G}(\Omega), \quad l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} + G_1(\lambda), \tag{41}$$

$$G_1(\lambda) : -\sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U - g\widehat{Q}_G - 2\omega_0 i \widehat{S}_{2,1} S(\lambda)(2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{1,2} + gQ_0).$$

В задаче (41) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно-матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)} := \vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$,

$$\mathcal{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} I_G & 0 \\ 0 & I_G \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\omega_0 i \widehat{S}_{2,2} & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место лемма.

Лемма 8. *Набор элементов $\eta_k := (\varphi_k; \widehat{\varphi}_k)^t$ $(k = \overline{0, n-1})$ является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, тогда и только тогда, когда φ_k $(k = \overline{0, n-1})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\widehat{\varphi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_0, \quad \widehat{\varphi}_k = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_k + A^{-1/2}\varphi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{42}$$

Опираясь на лемму 8 докажем теорему о двукратной полноте с дефектом части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $l(\lambda)$.

Теорема 6. *Пусть $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$ из (41), отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $l(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\varphi_k^{(l)}$ и $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями (42) для каждого l, образует полную в $\vec{G}^{(2)}$ систему с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. В силу леммы 8 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям лежащим вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, полна в $\vec{G}^{(2)}$ с точностью до конечного дефекта. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = -i\mu^{-1}$, где μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на $-\mu$, придем к следующей спектральной задаче:

$$-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})\eta = \left(\widehat{\mathcal{A}} - \mu\widehat{\mathcal{I}} - \mu\widehat{\mathcal{G}}(\mu)\right)\eta = 0, \tag{43}$$

где $\quad \widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 2\omega_0 \widehat{S}_{2,2} & iA^{-1/2} \\ -iA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{G}}(\mu) := \begin{pmatrix} G_1(-i\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

а $\widehat{\mathcal{I}}$ — единичный оператор в $\vec{G}^{(2)}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}^* \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p > 3)$, $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}} = 0$, а $\widehat{\mathcal{G}}(\mu)$ — голоморфная в круге $|\mu| < R^{-1}$ оператор-функция, принимающая значения из $\mathcal{L}(\vec{G}^{(2)})$. По теореме из [4], с. 78 получаем, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})$, отвечающих собственным значениям из круга $|\mu| < R^{-1}$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)}$. После обратной замены спектрального параметра получим, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим вне круга $|\lambda| < R$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)} = \vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$. □

Из леммы 8 и теоремы 6 как следствие получаем следующее главное утверждение о двукратной полноте с дефектом для исходного операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Теорема 7. *Обозначим через $\mathcal{P}_G$ ортопроектор пространства $\mathcal{H}$ на $\vec{G}(\Omega)$. Пусть $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\mathcal{P}_G\xi_k^{(l)}; \widehat{\xi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\xi_k^{(l)}$ и $\widehat{\xi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями*

$$\widehat{\xi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_0, \quad \widehat{\xi}_k = \lambda_0 A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_k + A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, k(\lambda_l),$$

для каждого l, образует полную в $\vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$ систему с точностью до конечного дефекта.

Отметим здесь, что если $\omega_0 = 0$, $g = 0$ то, как будет показано далее, при некоторых условиях система элементов $\eta_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ из теоремы 7, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие у мнимой оси будет образовывать полную в $\vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$ систему.

2.5. **О локализации спектра в случае $g = 0$.** Здесь будет установлено, что если $g = 0$, то спектр задачи (27) лежит в правой замкнутой полуплоскости. Итак, пусть $g = 0$, запишем задачу $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, где $\xi := (\vec{v}; \varphi)^t \in \mathcal{H}$, в виде

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \Big(\lambda^2\mathcal{A} - 2\omega_0 i\lambda\mathcal{S} + \mathcal{P} - \sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda)^{-1}\mathcal{K}_l\Big)\xi = 0, \tag{44}$$

$\mathcal{P} := \mathrm{diag}(0, I_G)$, $\mathcal{K}_l := \mathrm{diag}(0, U^* M_\Pi(p_l)U) = \mathrm{diag}(0, \widehat{K}_l)$.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (b) *(см.* (30)*), тогда весь спектр задачи* (44) *лежит в полосе* $\{0 \le \mathrm{Re}\lambda < b_m\}$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что существенный спектр задачи (44) попадает в указанную полосу. Осталось доказать, что все изолированные собственные значения задачи попадают туда же. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение задачи (44), а $\xi = (\vec{v}; \varphi)^t$ — отвечающий ему собственный элемент, тогда

$$\lambda(\mathcal{A}\xi, \xi) - 2\omega_0 i(\mathcal{S}\xi, \xi) + \frac{1}{\lambda}(\mathcal{P}\xi, \xi) - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\lambda(b_l - \lambda)}(\mathcal{K}_l \xi, \xi) = 0. \tag{45}$$

Выделив действительную часть из (45) получим, что

$$\mathrm{Re}\lambda \left[(\mathcal{A}\xi, \xi) + \frac{(\mathcal{P}\xi, \xi)}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{|\lambda|^2 - |b_l - \lambda|^2}{|\lambda|^2 |b_l - \lambda|^2} \cdot \frac{(\mathcal{K}_l \xi, \xi)}{b_l} \right] = \sum_{l=1}^{m} \frac{(\mathcal{K}_l \xi, \xi)}{|b_l - \lambda|^2}. \tag{46}$$

Выберем теперь положительные числа a_l ($l = \overline{1, m}$), как в условии (b) (см. (30)), тогда из леммы 4 получим, что

$$(\mathcal{P}\xi, \xi) a_l b_l - (\mathcal{K}_l \xi, \xi) = \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega)} a_l b_l - (\widehat{K}_l \varphi, \varphi)_{\vec{G}(\Omega)} \geq \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega)} (a_l b_l - \max_{x \in \overline{\Omega}} p_l(x)) \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \left[\frac{|\lambda|^2 - |b_l - \lambda|^2}{|\lambda|^2 |b_l - \lambda|^2} \cdot \frac{(\mathcal{K}_l \xi, \xi)}{b_l} + \frac{a_l (\mathcal{P}\xi, \xi)}{|\lambda|^2} \right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{(\mathcal{K}_l \xi, \xi)|\lambda|^2 + |b_l - \lambda|^2 ((\mathcal{P}\xi, \xi) a_l b_l - (\mathcal{K}_l \xi, \xi))}{b_l |\lambda|^2 |b_l - \lambda|^2} \geq 0.$$

Отсюда и из (46) следует, что $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Если $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то из последнего неравенства и из (46) можно вывести, что $\mathrm{Re}\lambda < b_m$. □

2.6. **Свойства спектральной задачи в случае, когда $g = 0$, $\omega_0 = 0$.** Если $g = 0$, $\omega_0 = 0$, то учитывая, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи и рассуждая как в теореме 8 можно показать, что спектр задачи (27) лежит в правой открытой полуплоскости. Далее будет показано, что справедливо более сильное утверждение. В этом случае удается также доказать двукратную полноту без дефекта для некоторой системы, построенной по собственным и присоединенным элементам задачи. Пусть $g = 0$, $\omega_0 = 0$, в этом случае задача $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, где $\xi := (\vec{v}; \varphi)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$, принимает вид

$$l(\lambda)\varphi = 0, \;\; l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U. \tag{47}$$

В задаче (47) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)}$, $\mathcal{M}(\lambda) := \widehat{\mathcal{I}} + \lambda\widehat{\mathcal{A}} + \sum_{l=1}^{m} (\lambda - b_l)^{-1} \widehat{\mathcal{K}_l}$,

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{K}_l} := \begin{pmatrix} U^* M_\Pi(p_l) U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно связи собственных и присоединенных элементов пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место утверждение, аналогичное лемме 8 с очевидными изменениями. А также справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть существует* r*:* $b_m < r < b_1 + a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$*, где* $a := \|A^{-1/2}\|$*,* $b := m\max_{l=\overline{1,m},\, x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$*, и* $\varphi_k^{(l)}$ $(k=\overline{0,k(\lambda_l)})$ *— цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка* $l(\lambda)$ *из (47), отвечающая собственному значению* λ_l*. Тогда система элементов* $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k=\overline{0,k(\lambda_l)})$*, где индекс* l *пробегает все собственные значения* λ_l *пучка* $l(\lambda)$*, лежащие вне круга* $|\lambda - r|\le r$*, а* $\varphi_k^{(l)}$ *и* $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ *связаны соотношениями (42) для каждого* l*, образует полную в* $\vec{G}^{(2)}$ *систему.*

Доказательство. Как и в теореме 6 здесь нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям лежащим вне некоторого круга $|\lambda - r|\le r$, полна в $\vec{G}^{(2)}$. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = r^2\mu^{-1} + r$, где $r > b_m$ пока произвольно, а μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на μ, придем к следующей спектральной задаче:

$$\mu\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu} + r)\eta = \left[\mu(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}}) + r^2\widehat{\mathcal{A}} + \sum_{l=1}^{m}\frac{\mu^2}{r^2+\mu(r-b_l)}\widehat{\mathcal{K}_l}\right]\eta = 0. \qquad (48)$$

Применив к правой и левой части (48) оператор $(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ и проведя несложные преобразования придем к спектральной задаче

$$\mu(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu} + r)\eta = \Big[\mu\mathcal{I} + r^2(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} +$$
$$+(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\frac{\mu^2}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mu^n\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{r-b_l}{r^2}\right)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\right)\Big]\eta = 0 \qquad (49)$$

в области $|\mu| < r^2(r-b_1)^{-1}$.

Наша цель — установить, что пучок задачи (49) допускает факторизацию. Используя оценку $\|(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\|\le 1$ запишем условие, достаточное для факторизации пучка задачи (49):

$$\exists t\in(0,\frac{r^2}{r-b_1}):\quad \frac{r^2}{t}\|\widehat{\mathcal{A}}\| + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{r^2}\|\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{r-b_l}{r^2}\right)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\| < 1. \qquad (50)$$

Учитывая, что $\|\widehat{\mathcal{A}}\|\le a$, $\|\widehat{\mathcal{K}_l}\| = \|\widehat{K}_l\| = \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$ $(l=\overline{1,m})$, условие (50) будет выполнено, если

$$\exists t\in(0,\frac{r^2}{r-b_1}):\quad \frac{r^2 a}{t} + \frac{b}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}t^{n+1}\left(\frac{r-b_1}{r^2}\right)^n < 1. \qquad (51)$$

Просуммировав в (51) геометрическую прогрессию и проделав простые алгебраические преобразования найдем, что условие (51) эквивалентно следующему:

$$\exists t\in(0,\frac{r^2}{r-b_1}):\quad t^2(b+(r-b_1)) - tr^2(1+a(r-b_1)) + ar^4 < 0, \qquad (52)$$

Дискриминант в квадратичном выражении из (52) будет положительным, если $(r-b_1) \notin [a^{-1}(1-2\sqrt{ab}), a^{-1}(1+2\sqrt{ab})]$. В этом случае меньший корень квадратичного выражения будет меньше, чем $r^2(r-b_1)^{-1}$, если $a(r-b_1)<1$. Отсюда получаем, вспомнив условие $r>b_m$, что r должно удовлетворять неравенствам $b_m<r<b_1+a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$. В силу условий теоремы такое число r существует, а значит условие (50) выполнено.

По теореме 23.4 из [13], с. 130, пучок задачи (49) допускает факторизацию в форме $\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r) =: (\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu) = A_+(\mu)(\mu I - Z)$, где оператор-функция $A_+(\mu)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\mu|<t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\mu|<t$. В этой области задача для операторного пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Из равенства

$$\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r) = \left(A_+(0)+\frac{A'_+(0)\mu}{1!}+\dots\right)\cdot(\mu I - Z), \tag{53}$$

приравнивая коэффициенты при нулевой степени μ, получим, что $r^2(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z = -r^2A_+^{-1}(0)(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p>3)$. Приравнивая в (53) коэффициенты при первой степени μ получим, что $\mathcal{I} = A_+(0) - A'_+(0)Z$, откуда следует, что $A_+(0) = \mathcal{I} + A'_+(0)Z$. Из проведенных рассуждений следует, что $Z = (\mathcal{I}+\mathcal{T})\widehat{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{G}^{(2)})$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. Учитывая, что $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}} = \{0\}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ — нормальный оператор со спектром на двух лучах по теореме 4.2 из [13], с. 20, получаем, что система корневых элементов оператора Z, а следовательно и пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве $\vec{G}^{(2)}$. Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ и $\mathcal{M}_r(\mu)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. □

Установим теперь локализацию спектра задачи в случае, когда $g=0$, $\omega_0=0$.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* (*b*) *(см.* (30)*), тогда спектр задачи* (47)*, лежащий в окрестности множества* $\cup_{l=1}^m(b_{l-1},b_l)$ *действительный, а две комплексно сопряженные ветви попадают в полосу* $\{\alpha_1 \le \mathrm{Re}\lambda \le \alpha_2\}$*, где* $0<\alpha_1<\alpha_2<b_m$.

Доказательство. Для пучка $M(\lambda)$ (см. (28)), в силу леммы 5 и свойств функции $p_\lambda(x)$, справедливы свойства $M(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in (b_{l-1}, \inf\Delta_l)$ и $M(\lambda) \ll 0$ при $\lambda \in (\sup\Delta_l, b_l)$ $(l=\overline{1,m},\ b_0:=0)$.

Рассмотрим уравнение $p_l(x)+\lambda^2\|A^{-1}\|=0$. Если выполнено условие (30), то при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня и ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l $(l=\overline{1,m})$. В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x \in \overline{\Omega}$

действительные корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_{l,a} \subset (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0,\, l = \overline{1,m})$. При этом $\inf \Delta_l \le \inf \Delta_{l,a}$, $\sup \Delta_l \le \sup \Delta_{l,a}$. Отсюда следует, что $\lambda^{-2} l(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in (b_{l-1}, \inf \Delta_l)$ и $\lambda^{-2} l(\lambda) \ll 0$ при $\lambda \in (\sup \Delta_{l,a}, b_l)$ $(l = \overline{1,m},\, b_0 := 0)$.

Докажем теперь, что $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$ при $\lambda > 0$, $\lambda \ne b_l$ $(l = \overline{1,m})$. Этот факт, вместе со сказанным выше, позволит применить утверждение о факторизации к пучку $-\lambda^{-2} l(\lambda)$. В самом деле, выберем, согласно условию (b) (см. (30)), числа a_l $(l = \overline{1,m})$ и проведем вычисления:

$$[\lambda^{-2} l(\lambda)]' = \sum_{l=1}^{m} \lambda^{-3} (b_l - \lambda)^{-2} \left[(2b_l - 3\lambda) \widehat{K}_l - 2(b_l - \lambda)^2 a_l I_G \right].$$

Если $\lambda > 2b_l/3$, то $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$, очевидно. Если $\lambda \in (0, 2b_l/3]$, то достаточным условием для того, чтобы $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$, как несложно установить, будет свойство $\widehat{K}_l - b_l a_l I_G \ll 0$, которое справедливо в силу условия (b). Таким образом, согласно следствию 30.8 из [13], с. 179, для каждого $l = \overline{1,m}$ рассматриваемый пучок допускает факторизацию $-\lambda^{-2} l(\lambda) = l_{l,+}(\lambda)(\lambda I_G - Z_l)$, где Z_l ограничен и подобен самосопряженному оператору, $\sigma(Z_l) \subset (\inf \Delta_l - \varepsilon, \sup \Delta_{l,a} + \varepsilon)$ для любого $0 < \varepsilon < \min\{\inf \Delta_l - b_{l-1}, b_l - \sup \Delta_{l,a}\}$, а $l_{l,+}(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[b_{l-1} + \varepsilon, b_l - \varepsilon]$. Отсюда следует, что спектр задачи (47), лежащий в окрестности множества $\cup_{l=1}^{m} (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0)$ действительный.

Пусть теперь $\lambda^{(\pm i)}$ — пара комплексно сопряженных собственных значений пучка $l(\lambda)$ и $\varphi^{(\pm i)}$ $(\|\varphi^{(\pm i)}\|_{\vec{G}(\Omega)} = 1)$ — отвечающие им собственные элементы. Тогда $\lambda^{(+i)}$ является корнем уравнения

$$1 + \lambda^2 (A^{-1} \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)} - \sum_{l=1}^{m} \frac{(\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)}}{b_l - \lambda} = 0, \tag{54}$$

которое можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \Big(\lambda^2 + (A^{-1}\varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega)}\Big) \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) - (A^{-1}\varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega)} \times \\ \times \sum_{l=1}^{m} (\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)} \prod_{j=1,\, j \ne l}^{m} (b_j - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Раскроем здесь скобки и соберем слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^{m+1} \lambda^{m+1} \sum_{l=1}^{m} b_l + \ldots = 0. \tag{55}$$

Из геометрических соображений ясно, что уравнение (54), кроме числа $\lambda^{(+i)}$, имеет также корни $\lambda^{(-i)}$ и $\lambda^{(l)} \in \Delta_{l,A} := \Delta_l \cup \Delta_{l,a}$ $(l = \overline{1,m})$. Следовательно, оно может быть записано в форме:

$$(-1)^m\Big(\lambda-\lambda^{(+i)})\Big)\Big(\lambda-\lambda^{(-i)})\Big)\prod_{l=1}^{m}\Big(\lambda-\lambda^{(l)})\Big)=0.$$

Собрав здесь слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m\lambda^{m+2}+(-1)^{m+1}\lambda^{m+1}\Big(2\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}+\sum_{l=1}^{m}\lambda^{(l)}\Big)+\ldots=0. \tag{56}$$

Из (55) и (56) следует, что $\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda^{(l)})$. Отсюда, учитывая, что $\lambda^{(l)}\in\Delta_{l,A}:=\Delta_l\cup\Delta_{l,a}$ $(l=\overline{1,m})$, следуют оценки $0<\alpha_1<\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}<\alpha_2<b_m$, где $\alpha_1:=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\sup\Delta_{l,a})$, $\alpha_2:=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\inf\Delta_l)<b_m$. □

2.7. **Асимптотики всех ветвей собственных значений в случае, когда $g=0$, $\omega_0=0$ и характеристики модели постоянны.** Рассмотрим случай, когда $g=0$, $\omega_0=0$ и функции $a_\infty^2(x)$ и $k_l(x)$ $(l=\overline{1,m})$ постоянны. Тогда функции $p_l(x)$ постоянны и $p_l(x)\equiv p_l$, где $p_l>0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (29)). В этом случае функция p_λ (см. (28)) будет зависеть только от λ. Обозначим корни уравнения $p_\lambda=0$ через γ_l $(l=\overline{1,m})$, при этом $\gamma_l\in(b_{l-1},b_l)$ $(l=\overline{1,m})$.

Из теоремы 10 следует, что в рассматриваемом случае спектр пучка $l(\lambda)$ из (47) попадает в некоторую вертикальную полосу, расположенную в правой полуплоскости и является действительным в некоторой окрестности действительной положительной полуоси. Из теоремы 3 следует, что возможными предельными точками спектральной задачи могут быть только бесконечно удаленная точка и точки γ_l $(l=\overline{1,m})$. Таким образом, спектр задачи (47) в рассматриваемом случае может состоять из $(m+2)$-х ветвей изолированных конечнократных собственных значений с предельными точками в бесконечности и в точках γ_l $(l=\overline{1,m})$. В самом деле, пусть $\{\lambda_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора A^{-1}, занумерованных по убыванию и с учетом их кратности, а $\{\varphi_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность соответствующих собственных элементов. Тогда все собственные значения пучка $l(\lambda)$ из (47) могут быть найдены как корни последовательности скалярных уравнений $p_\lambda+\lambda^2\lambda_k(A^{-1})=0$ $(k\in\mathbb{N})$. Для исследования асимптотики корней этих уравнений определим функции $f_l(\lambda):=(\lambda-\gamma_l)p_\lambda^{-1}$ $(l=\overline{1,m})$. Можно проверить, что функции $f_l(\lambda)$ голоморфны в некоторых окрестностях точек γ_l, $f_l(\gamma_l)\neq 0$, $\mathrm{sign} f_l(\gamma_l)=-1$ $(l=\overline{1,m})$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть $p_l(x)\equiv p_l$, где $p_l>0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (29)), а γ_l $(l=\overline{1,m})$ — корни уравнения $p_\lambda=0$ (при этом $\gamma_l\in(b_{l-1},b_l)$). Тогда спектр пучка $l(\lambda)$ из (47) состоит из $(m+2)$-х серий изолированных собственных значений; точнее — из двух комплексно сопряженных* *ветвей* $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* m *действительных ветвей* $\{\lambda_k^{(l)}(l)\}_{k=1}^{\infty} \subset (\gamma_l, b_l)$ $(l = \overline{1,m})$ *для которых справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l \mp$$
$$\mp i\lambda_k^{1/2}(A^{-1})\Big[\frac{1}{4}\Big(\sum_{l=1}^{m} p_l\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l b_l\Big] + O(\lambda_k(A^{-1})) \quad (k \to \infty),$$
$$\lambda_k^{(l)}(l(\lambda)) = \gamma_l - \lambda_k(A^{-1})\gamma_l^2 f_l(\gamma_l) +$$
$$+ 2\lambda_k^2(A^{-1})\gamma_l^3 f_l(\gamma_l)\Big(f_l(\gamma_l) + \gamma_l f_l'(\gamma_l)\Big) + O(\lambda_k^3(A^{-1})) \quad (k \to \infty),$$

где функции $f_l(\lambda)$ $(l = \overline{1,m})$ *определены перед теоремой.*

Для двух ветвей $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ *при каждом фиксированном* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива также следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1})\Big(1 - \sum_{l=1}^{m}\frac{p_l}{b_l}\Big)^{1/2} + o\Big(\frac{1}{b_1}\Big) \quad (b_1 \to +\infty).$$

Доказательство. Доказательство формул в теореме сводится к применению асимптотических методов к скалярным уравнениям $p_\lambda + \lambda^2\lambda_k(A^{-1}) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. □

Здесь можно отметить, что из последней формулы в теореме следует, что если наибольшее из времен релаксации b_1^{-1} стремится к нулю, то комплексно сопряженные ветви "садятся"в пределе на мнимую ось. Эта ситуация отвечает случаю баротропной жидкости. В рассматриваемой же ситуации спектр задачи смещен с мнимой оси в правую полуплоскость. Кроме того, в отличие от баротропной жидкости, здесь возникают ветви собственных значений с конечными предельными точками. Эти ветви и связаны с наличием памяти в системе.

Список литературы

[1] Kopachevsky N. D. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids.* — Basel — Boston — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003, — 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.) (Kopachevsky N. D., Krein S. G.)

[2] Bolgova (Orlova) L. D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. Симферополь — 1994. — С. 41–42. (Bolgova (Orlova) L. D., Kopachevsky N. D.)

[3] Закора Д. А. *Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 104–112.

[4] Копачевский Н. Д. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* — М.: Наука, 1989. — 416 с. (Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан)

[5] Закора Д. А. *Задача о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы. — 2009. — Вып. 26. — С. 31–42.

[6] Ralston J. V. *On stationary modes in inviscid rotating fluids* // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — V. 44. — P. 366–383.

[7] Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* — Москва: Наука, 1967, — 464 с.

[8] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[9] Радзиевский Г. В. *Квадратичный пучок операторов* — Киев, 1976. — (Препринт).

[10] Оразов М. Б. *Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики*: Дис… д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Ашхабат, 1982.

[11] Гохберг И. Ц. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука, 1965. — 448 с. (Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.)

[12] Авакян В. А. *Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией* // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, №2. — С. 66-67.

[13] Маркус А. С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

В роботі досліджено спектральну задачу про нормальні коливання ідеальної релаксуючої рідини у твердому тілі, що обертається. На початку статті наведено постановку задачі, а також отримано операторний жмуток, відповідний спектральній задачі. Для цього пучка вивчені питання локалізації дискретності і асимптотики спектру. Доведено твердження про двократну повноту (з дефектом або без дефекта) для системи власних і приєднаних елементів, отримано твердження про істотний спектрі задачі.

The problem on normal oscillations of an ideal relaxing fluid filling a rotating container is investigated. The operator pencil corresponding to spectral problem is obtained. For this operator pencil localization of spectrum, discreteness of spectrum and essential spectrum are investigated. Asymptotic formulas for all branches of spectrum are obtained. The double completeness with finite defect for the system of an eigne elements and associate elements is proved.