Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 1–13.

О. А. Андронова

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрено обобщение начально-краевой задачи математической физики с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Сформулирована абстрактная проблема на основе использования абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Доказана теорема о сильной разрешимости исследуемой задачи. Обсуждаются спектральные проблемы с внутренней диссипацией энергии при различной интенсивности внутренней диссипации энергии. Приведены простейшие свойства решений данной задачи. Для случая малой и средней внутренней диссипации получены утверждения о локализации спектра и полноте и базисности системы корневых элементов.

Введение

В работе рассмотрено операторное обобщение начально-краевой задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Здесь использовались пространства и операторы, фигурирующие в абстрактной формуле Грина (см. [3]), а также оператор, задающий внутреннюю диссипацию энергии в исследуемой динамической системе. Итогом рассмотрения указанной задачи является теорема о ее сильной разрешимости на произвольном отрезке времени. Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с исследованием спектральных проблем с внутренней диссипацией энергии при ее различной интенсивности.

Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств

Впервые абстрактная формула Грина появилась в монографии [1], (см. с. 46-47), и идея ее получения принадлежит С. Г. Крейну. Затем появились работы [2]-[4], где соответствующее утверждение было получено в наиболее общей формулировке. Другой вариант абстрактной формулы Грина получен в [5], (см с.187-189). Приведем формулировку соответствующего результата из [3].

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств*

$$\{E, (\cdot,\cdot)_E\},\ \{F, (\cdot,\cdot)_F\},\ \{G, (\cdot,\cdot)_G\}$$

выполнены условия:

1. Пространство F плотно вложено в E, $F \subset_{\to} E$, т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1}$$

2. На пространстве F определен оператор γ (абстрактный оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G, $G_+ \subset_{\to} G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{2}$$

Тогда существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to G_- := (G_+)^*$, определяемые по E, F и G (с введенными скалярными произведениями), а также по оператору γ единственным образом, такие, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \qquad \forall \eta, u \in F. \tag{3}$$

Здесь символами $\langle \eta, \psi\rangle_E$ и $\langle \xi, \varphi\rangle_G$ обозначены линейные функционалы, построенные на элементах $\eta \in F$, $\psi \in F^*$, $\xi \in G_+$ и $\varphi \in G_-$ соответственно. Они являются соответствующими расширениями (по непрерывности) функционалов $(\eta, \psi)_E$ и $(\xi, \varphi)_G$ при переходе от $\psi \in E$ к $\psi \in F^* \supset E$, а также от $\varphi \in G$ к $\varphi \in (G_+)^* = G_-$, соответственно.

Начально-краевая задача с поверхностной и внутренней диссипацией энергии

Пусть пространства E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и потому существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to (G_+)^*$ такие, что справедлива формула Грина (3).

Постановка начально-краевой задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии такова: необходимо найти функцию $u = u(t)$ со значениями в F такую, для которой выполнено уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta K\frac{du}{dt} + Lu = f(t) \quad (\text{в } E), \quad K = K^* \geqslant 0,\ \overline{\mathcal{D}(K)} = E, \tag{4}$$

"граничное" условие

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0 \quad (\text{в } G), \quad \alpha > 0, \tag{5}$$

а также начальные условия

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \tag{6}$$

Здесь функция $u(t)$ является искомой, функция $f(t)$ и элементы u^0, u^1 – заданными. Слагаемое $\beta K du/dt$ в уравнении (4) при $\beta > 0$ порождает внутреннюю диссипацию полной энергии динамической системы, а слагаемое $\alpha d/dt(\gamma u)$ в граничном условии (5) при $\alpha > 0$ – поверхностную диссипацию энергии.

Замечание. Следует отметить, что ранее исследовалась абстрактная начально-краевая задача с поверхностной диссипацией энергии (см. [8]). Итоговый результат рассмотрения задачи – доказательство теоремы о существовании и единственности ее решения.

Абстрактная задача (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии исследована методами функционального анализа. Для исследования задачи использован метод введения вспомогательных краевых задач. Он основан на возможности отыскания решения $u(t) \in F$ задачи (4) – (6) в виде суммы

$$u(t) = v(t) + w(t), \tag{7}$$

где $v(t)$ — решение первой вспомогательной задачи, а $w(t)$ — второй вспомогательной задачи. Доказательство этого факта можно найти в [3], см. теорему 2 и замечание 1 этой работы.

Сформулируем первую вспомогательную задачу. По элементу $\hat{f}$ необходимо найти решение v задачи

$$Lv = \hat{f} := f(t) - \frac{d^2u}{dt^2} - \beta K\frac{du}{dt} \quad (\text{в } E), \quad \partial v = 0 \quad (\text{в } G). \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что элемент $v \in F$ является слабым решением задачи (8), если имеет место тождество

$$(\eta, v)_F = \langle \eta, \hat{f} \rangle_E, \quad \forall \eta \in F. \tag{9}$$

Лемма 1. *Если выполнено условие $\hat{f} \in F^*$, то задача* (8) *имеет единственное слабое решение $v \in F$, выражаемое формулой*

$$v = A^{-1}\hat{f}, \quad \mathcal{D}(A) = F, \quad \mathcal{R}(A) = F^*.$$

Сужение A оператора A на E, такое что $\mathcal{D}(A) \subset E$, $\mathcal{R}(A) \subset E$, обладает свойством $A = A^* \gg 0$ в E. Если $F \subset\!\to\subset\!\to E$, то A^{-1} — компактный положительный оператор.

Доказательство. Оно приведено в работе [2], см. также [3]. $\square$

Рассмотрим теперь вторую вспомогательную задачу. По элементу ψ найти решение $w \in F$ задачи:

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \qquad \partial w = \psi := -\alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) \quad (\text{в } G). \tag{10}$$

Определение 2. Говорят, что элемент $w \in F$ является слабым решением задачи (10), если для него выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{11}$$

Лемма 2. *При любом элементе $\psi \in (G_+)^*$ существует единственное слабое решение $w = V\psi \in F$. При этом оператор V ограниченно действует из $(G_+)^*$ в подпространство $M \subset F$ элементов, которые назовем L-гармоническими (для них $Lw = 0$).*

Доказательство. Оно основано на неравенстве

$$|\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \left(b \, \|\psi\|_{(G_+)^*} \right) \cdot \|\eta\|_F$$

и на лемме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве F. $\square$

Лемма 3. *Любой элемент $u \in F$ может быть представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных задач* (8) *и* (10)*, т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}\hat{f} + V\psi, \quad \hat{f} = Lu \in F^*, \quad \psi = \partial u \in (G_+)^*. \tag{12}$$

С учетом лемм 1, 2, 3 осуществим переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha V \frac{d}{dt}(\gamma u) + u \right) + \beta A^{-1} K \frac{du}{dt} = A^{-1} f(t) \quad (\text{в } F), \tag{13}$$

$$u(0) = u^0, \, u'(0) = u^1. \tag{14}$$

Будем считать, что в уравнении (13) все слагаемые, в том числе и выражение в скобках, являются функциями переменной t со значениями в $\mathcal{D}(A) \subset F \subset E$. Тогда это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^{1/2} \left(\alpha Q^* \frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2} u \right) + \beta K \frac{du}{dt} = f(t) \quad (\text{в } E), \tag{15}$$

где $Q := \gamma A^{-1/2} : E \to G_+$ и $Q^* := A^{1/2} V : (G_+)^* \to E$ взаимно сопряжены и ограничены.

Введем новую искомую функцию соотношениями $-i\eta = d\zeta/dt$, $\zeta(0) = 0$. После взятия ее производной по t приходим вместо (15),(14) к следующей задаче Коши:

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dt^2} + A^{1/2} \left(\alpha Q^* \frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2} u \right) + \beta K \frac{du}{dt} = f(t), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + iA^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

$$u(0) = u^0, \, u'(0) = u^1, \, \zeta(0) = 0, \, \zeta'(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{17}$$

В векторно-матричной форме систему операторных уравнений (16) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha B + \beta C_0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$C_0 := A^{-1/2} K A^{-1/2} =: S^+ S, \quad S := K^{1/2} A^{-1/2}, \quad S^+ := A^{-1/2} K^{1/2}, \tag{19}$$

и оператор $B := Q^*Q$ является неотрицательным самосопряженным оператором. Если $G_+ \subset_{\to}\subset_{\to} G$, то $B : E \to E$ – компактный неотрицательный оператор.

Дальнейшее исследование задачи основано на предположении

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \subset E, \tag{20}$$

т.е. оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ "не слабее" оператора K внутренней диссипации энергии в изучаемой динамической системе. Если выполнено свойство (20), то из известного неравенства Гайнца (см. [7], с. 254), будем иметь:

$$\mathcal{D}(K^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = F.$$

Лемма 4. *Оператор C_0 с областью определения $\mathcal{D}(K^{1/2})$ может быть расширен по непрерывности до ограниченного самосопряженного и неотрицательного оператора $C = S^*S \in \mathcal{D}(E)$.*

С учетом этих рассуждений приходим к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}_{\alpha,\beta} y + \hat{f}(t), \tag{21}$$

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha B + \beta C & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$y(t) := (du/dt; d\zeta/dt))^t, \quad \hat{f}(t) := (f(t); 0)^t, \quad y(0) = (u_1; -iA^{1/2}u^0), \tag{22}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\alpha,\beta}) := \left\{ u = (u_1; u_2)^t : \, u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \, , \, (\alpha B + \beta C)A^{1/2}u_1 + iu_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.$$

Можно показать, что операторный коэффициент $-\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ является максимальным диссипативным оператором, тогда (см. [6]) этот оператор — генератор сжимающей полугруппы операторов. Это позволяет, с использованием теории полугрупп, доказать теорему о существовании сильного решения исходной задачи (4) – (6).

Здесь сформулируем лишь итоговый результат рассмотрения абстрактной начально-краевой задачи (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Однако сначала дадим определение сильного решения задачи Коши (4) – (6).

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи Коши (4) – (6) на отрезке $[0, T]$, если

$$u(t) \in C^2([0,T]; E) \cap C^1([0,T]; F) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A)), \tag{23}$$

и для нее выполнено уравнение (4), где каждое слагаемое является элементом из $C([0, T]; E)$, граничное условие (5), где каждое слагаемое является элементом из $C([0,T]; G_+)$, а также начальные условия (6).

Теорема 2. *Если выполнены условия*

1. $f(t) \in C^1([0,T];E)$;

2. $u^1 \in \mathcal{D}(A), \quad u^0 = v^0 + w^0,\ v^0 \in \mathcal{D}(A),\ w^0 = -\alpha V \gamma u^1,$

а также свойство дополнительной гладкости

$$u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(K)),$$

то задача Коши (4) – (6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$ *в смысле определения 3.*

Спектральные проблемы с внутренней диссипацией энергии

Исследование спектральных задач как с поверхностной, так и с внутренней диссипацией энергии представляет собой пока нерешенную проблему. Поэтому исследование этих задач осуществляется поэтапно. Так, в работе [8] были изучены спектральные задачи, порожденные начально-краевыми задачами только с поверхностной диссипацией энергии. Рассмотрены простейшие свойства спектра, а затем на примерах — одномерном, двумерном и в цилиндрических областях — обнаружено, что спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен. Выясняется, как этот спектр мигрирует в комплексной плоскости при изменении параметра диссипации от нуля до бесконечности. Приводятся примеры численных расчетов спектра на основе метода итераций. Далее, в общей постановке исследована спектральная задача с поверхностной диссипацией энергии. На основе одного общего результата, полученного Т. Я. Азизовым, доказано, что в случае общего положения спектр задачи является дискретным с предельной точкой на бесконечности.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с исследованием спектральных задач с внутренней диссипацией энергии. Так, рассмотрим изменение абстрактной начально-краевой задачи (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии на тот случай, когда в динамической системе отсутствует поверхностная диссипация ($\alpha = 0$), но присутствует внутренняя диссипация энергии. Ее соответствующая формулировка такова. Пусть пространства E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и справедлива абстрактная формула Грина (3). Требуется найти элемент $u \in F$ такой, что выполнены уравнение, граничное и начальные условия:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta K \frac{du}{dt} + Lu = f(t)\ (\text{в}\, E), \quad \partial u = 0\ (\text{в}\ G\,), \quad u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1. \tag{24}$$

Далее будем изучать нормальные движения системы, т.е. такие решения однородной задачи (24) без начальных условий, для которых

$$u(t) = exp(-\lambda t)u,\ x \in F,\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Тогда для амплитудных элементов $u \in F$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + L u = 0 \ (\text{в } E), \quad \partial u = 0 \ (\text{в } G). \tag{26}$$

Введем оператор A гильбертовой пары $(F; E)$,

$$Au := Lu, \ \mathcal{D}(A) := \{u \in F : \partial u = 0 \ (\text{в } G), \ \mathcal{R}(L) = E\} \subset F. \tag{27}$$

Напомним, что $A = A^* \gg 0$.

Тогда приходим к проблеме

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \tag{28}$$

рассматриваемой в пространстве F. Здесь $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K. Далее будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с $\mathcal{D}(A)$, т.е. выполнено одно из условий

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \quad \text{либо} \quad \mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(K). \tag{29}$$

Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + A u = 0 \ (\text{в } E), \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K) \subset F. \tag{30}$$

Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (30). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Именно, введем в (30) новый искомый элемент ζ по закону $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (30) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K), \ \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{31}$$

или

$$\mathcal{A}_\beta z = \lambda z, \quad z := (u; \zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta), \quad \mathcal{A}_\beta := \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

которые рассматриваются в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

Отметим для задач (31),(32) простейшие свойства решений.

1^0. Собственные значения задач (31),(32) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси.

2^0. При $\beta = 0$ спектр задачи (31),(32) дискретен, расположен на мнимой оси, его собственные значения $\{\lambda_j^\pm\}_{j=1}^\infty$ конечнократны и вычисляются по формуле

$$\lambda_j^\pm = \pm i \lambda_j^{1/2}(A), \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{33}$$

где $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — собственные значения оператора $A \gg 0$. При этом предполагается, что пространство F компактно вложено в E и потому оператор $A^{-1} > 0$ компактен. Собственные элементы $(u_j^\pm; \zeta_j^\pm)^t$ задачи, отвечающие собственным значениям (33), образуют ортонормированный базис в пространстве E^2.

Дальнейшее изучение задач (31),(32) связано с уточнением взаимосвязей областей определения операторов задачи A и K и рассмотрением трех случаев различной интенсивности внутренней диссипации энергии. Здесь рассмотрим лишь случай малой и средней внутренней диссипации энергии. Случай большой интенсивности внутренней диссипации требует дополнительных исследований и будет отражен в последующих публикациях автора.

1. В случае малой интенсивности внутренней диссипации имеет место следующее вложение областей определения операторов задачи A и K:

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(K). \tag{34}$$

Тогда в задаче (32) операторная матрица $\mathcal{A}_\beta$ корректно определена, если $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta) := \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{A}_\beta$ допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} I & -i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $KA^{-1/2}$ — ограниченный оператор, действующий в E. Соответственно обратный оператор $\mathcal{A}_\beta^{-1}$ также допускает факторизацию

$$\mathcal{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iA^{-1/2} \\ -iA^{-1/2} & \beta A^{-1/2} K A^{-1/2} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Из (35) следует, что оператор $\mathcal{A}_\beta$ на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta)$ является замкнутым и область его значения, т.е. область определения $\mathcal{A}_\beta^{-1}$ есть всё пространство E^2. Введем обозначения

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{J} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \ \mathcal{T} := \begin{pmatrix} I & i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Тогда в силу (35),(37) задачу (32) можно переписать в виде

$$(\mathcal{J} - \mathcal{T})\mathcal{A}_0 z = \nu z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \nu := i\lambda. \tag{38}$$

Эта задача, в свою очередь, равносильна проблеме

$$(\mathcal{J} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0^{-1} w = \mu w, \quad w := \mathcal{A}_0 z \in E^2, \quad \mu := i\lambda^{-1}. \tag{39}$$

Далее, будем предполагать, что $F \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to E$ и $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$. Заметим, что первое условие обычно выполнено в задачах математической физики, а второе условие — это условие общего положение, говорящее о том, что в динамической системе мала интенсивность внутренней диссипации (по сравнению с упругими консервативными силами, связанными с потенциальной энергией системы и колебательными режимами в ней).

Если $F \subset\to\subset\to E$, то порождающий оператор A гильбертовой пары $(F;E)$ имеет положительный компактный обратный оператор A^{-1}, а потому и оператор

$$\mathcal{A}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker} \mathcal{A}_0^{-1} = \{0\}, \tag{40}$$

является самосопряженным компактным оператором в E^2. Далее, если $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, то $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_\infty(E^2)$, и (39) есть задача на собственные значения слабо возмущенного компактного самосопряженного оператора.

Определение 4. Будем говорить, что система корневых элементов $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30) двукратно полна в норме графика оператора $A^{1/2}$, если система корневых элементов

$$w_j := \left(A^{1/2}\zeta_j; A^{1/2}u_j\right)^t = \left(i\lambda_j^{-1}Au_j; A^{1/2}u_j\right)^t, \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{41}$$

задачи (39) полна в пространстве E^2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

$$KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad A \in \mathcal{S}_p(E). \tag{42}$$

Тогда имеют место следующие свойства:

(1) *Система корневых элементов $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30) двукратно полна в норме графика оператора $A^{1/2}$.*

(2) *Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30), отвечающие корневым элементам $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, нормальны, имеют предельную точку $\lambda = \infty$, расположены в правой комплексной полуплоскости и кроме, быть может, конечного их числа, находятся в полусекторах*

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\varepsilon) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \pi/2 - \varepsilon < \arg\lambda < \pi/2\}, \\ \Lambda^-(\varepsilon) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad -\pi/2 < \arg\lambda < -\pi/2 + \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Доказательство. Оно основано на теореме М.В. Келдыша о полноте системы корневых элементов и локализации спектра слабовозмущенного самосопряженного компактного оператора (см. [9] и [10]), на свойствах компактного оператора, а также на свойстве 1^0 решений спектральных задач.

В задачах математической физики собственные значения $\lambda_j(A)$ оператора A гильбертовой пары $(F;E)$, как правило, имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_j(A) = c_A j^a[1 + o(1)],\ j \to \infty,\ c_A > 0,\ a > 0. \tag{44}$$

Если учесть это обстоятельство, то можно усилить результат теоремы 3.

Теорема 4. *Если собственные значения оператора A имеют асимптотическое поведение (44) и $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *собственные значения задачи* (30) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j = \lambda_j^{\pm} = \pm i\lambda_j^{1/2}(A)[1+o(1)],\ j\to\infty; \tag{45}$$

(2) *корневые элементы* $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ *задачи* (39) *образуют базис Абеля-Лидского (в пространстве* E^2*) с суммированием порядка, большего* $a/2$.

2. В случае средней интенсивности внутренней диссипации будут иметь место включения

$$\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(K)\subset\mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{46}$$

В этом случае оператор $\mathcal{A}_\beta$ задачи (32) корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta):=\mathcal{D}(K)\oplus\mathcal{D}(A^{1/2})$.

Можно проверить непосредственно, что оператор $\mathcal{A}_\beta$ допускает следующую факторизацию в форме Шура-Фробениуса

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\beta^{-1}Q & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & \beta^{-1}VV^{+} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & i\beta^{-1}Q^{+} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$Q:=A^{1/2}K^{-1}\in\mathcal{L}(E),\quad Q^{+}:=K^{-1}A^{1/2},\quad \mathcal{D}(Q^{+})=\mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{48}$$

$$V^{-1}:=K^{1/2}A^{-1/2}\in\mathcal{L}(E),\quad (V^{+})^{-1}:=A^{-1/2}K^{1/2},\quad \mathcal{D}((V^{+})^{-1})=\mathcal{D}(K^{1/2}). \tag{49}$$

Лемма 6. *Оператор* Q^{+} *обладает свойствами:*

$$\overline{Q^{+}}=Q^{*},\quad Q^{*}|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}=Q^{+}. \tag{50}$$

Лемма 7. *Для оператора* $(V^{+})^{-1}$ *справедливы равенства:*

$$\overline{(V^{+})^{-1}}=(V^{*})^{-1},\quad (V^{*})^{-1}|_{\mathcal{D}(K^{1/2})}=(V^{+})^{-1}. \tag{51}$$

Следствием лемм 6 и 7 является такое утверждение.

Теорема 5. *Оператор* $\mathcal{A}_\beta$ *допускает замыкание до оператора*

$$\widetilde{\mathcal{A}_\beta} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\beta^{-1}Q & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & \beta^{-1}VV^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & i\beta^{-1}Q^{*} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{52}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}) := \left\{(u;\zeta)^t\in E^2:\ u+i\beta^{-1}Q^{*}\zeta\in\mathcal{D}(K),\ \zeta\in\mathcal{D}(VV^{*})\right\}. \tag{53}$$

Если выполнено условие $V^{-1}=K^{1/2}A^{-1/2}\in\mathcal{S}_\infty(E)$, *то* $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta})=E^2$ *и тогда* $\widetilde{\mathcal{A}_\beta}$ *является максимальным аккретивным оператором, действующим в* E^2.

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора $\widetilde{\mathcal{A}_\beta}$:

$$\widetilde{\mathcal{A}_\beta}z=\lambda z,\quad z=(u;\zeta)^t\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}). \tag{54}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iQ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & iQ^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & VV^* \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Тогда имеем задачу

$$(\mathcal{J} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{S}_2)z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}), \tag{56}$$

где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_1$ — треугольные операторные матрицы (55), и потому существуют ограниченные обратные операторы $(\mathcal{J} + \mathcal{S}_1)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{J} + \mathcal{S}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{S}_2)$.

Далее будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$Q = A^{1/2}K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad K^{-1} \in \mathcal{S}_{p_K}, \quad (VV^*)^{-1} \in \mathcal{S}_{p_V}. \tag{57}$$

Тогда (56) преобразуется в следующую задачу на собственные значения для слабовозмущенного самосопряженного компактного оператора:

$$(\mathcal{J} - \mathcal{S}_2)\mathcal{A}_0^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{S}_1)z = \mu z, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \mathcal{A}_0^{-1} = \operatorname{diag}(K^{-1}; (VV^*)^{-1}). \tag{58}$$

В силу предположения (57) будем иметь

$$\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad \mathcal{A}_0^{-1} \in \mathcal{S}_{p_0}, \quad p_0 = \max(p_K; p_V). \tag{59}$$

Тогда к задаче (58) снова применима первая теорема М.В. Келдыша из [9], (см. с. 314 – 315, теорема 8.1 и замечание 8.1 к ней). Учитывая еще, что $\mathcal{A}_0^{-1} > 0$, приходим к следующему выводу.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (57)*. Тогда:*

(1) *Система корневых элементов задачи* (54) *полна в гильбертовом пространстве $E^2 = E \oplus E$.*

(2) *Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения λ_j задачи* (54)*, кроме, быть может, конечного их числа лежат в секторе*

$$\Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \, |\arg \lambda| < \varepsilon\}, \tag{60}$$

и имеют в качестве предельной точку $\lambda = \infty$.

Уточним теперь условия (57). Именно, будем считать, что имеют место следующие асимптотические формулы для собственных значений операторов K^{-1} и $(VV^*)^{-1}$:

$$\lambda_j(K) = (c_K)^{-a} j^a [1 + 0(1)], \quad \lambda_j(VV^*) = (c_V)^{-b} j^b [1 + 0(1)], \tag{61}$$

$$c_K > 0, \; c_V > 0, \; a > 0, \; b > 0.$$

Наличие асимптотических формул помогает установить дополнительные свойства к тем, которые были доказаны в теореме 6.

Теорема 7. *Если выполнено условие* (57), *а также условия* (61), *то система корневых элементов задачи* (54) *образует базис Абеля-Лидского порядка* $\alpha > \alpha_0$,

$$\alpha_0 = b \ (a > b), \quad \alpha_0 = a \ (a \leqslant b), \tag{62}$$

а собственные значения λ_j *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j = \lambda_j(\mathcal{A}_0)[1 + 0(1)] \quad (j \to \infty), \tag{63}$$

$$\lambda_j(\mathcal{A}_0) = \begin{cases} (c_V)^{-b} j^b [1 + 0(1)] \quad (a > b); \\ (c_K)^{-a} j^a [1 + 0(1)] \quad (a < b); \\ (c_K + c_V)^{-a} j^a [1 + 0(1)] \quad (a = b). \end{cases} \tag{64}$$

Доказательство. Первое и второе утверждение данной теоремы получаем соответственно из утверждения 1^0 и 2^0 на стр. 292 монографии [11].

Таким образом, если диссипация в динамической системе достаточно мала, то спектр локализован в окрестности мнимой оси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы имеют свойства двукратной полноты и двукратной базисности по Абелю-Лидскому. Далее, для случая средней интенсивности внутренней диссипации энергии установлено, что при сформулированных выше предположениях спектр задачи локализован в окрестности положительной полуоси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы задачи образуют полную систему либо базис Абеля-Лидского в пространстве E^2.

Автор благодарит проф. Н.Д. Копачевского за руководство написанием статьи.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[2] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн // Украинский математический вестник. — 2004. — Т. 1, № 1— С. 69–97.

[3] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса / Н.Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — Симферополь, 2004. — №2 — С. 52–80.

[4] Kopachevsky N.D. Abstract Creen's Formula. Abstract Spectral and Evolution Problems / N.D. Kopachevsky // The Fourth Intern. Conf. on Diff. and Functional-Diff. Eqs (Moscow, Russia, August 14-21, 2005): Abstracts. — P. 48-49.

[5] Обен Ж.-П. Приближенные решения эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обен. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[6] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[7] Крейн С.Г. Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека / С.Г. Крейн. — М.:Наука, 1972. — 544 с.

[8] Андронова О.А. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии / О.А. Андронова, Н.Д. Копачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — Москва: Рос. инст. дружбы народов, 2008. — Том 29. — С. 11–28.

[9] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. — 448 с.

[10] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А.С. Маркус. — Кишинев:Штиинца, 1986. — 260 с.

[11] Agranovich M.S. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory / M.S. Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov, N.N. Voitovich. — Berlin, Toronto: Wiley — VCH, 1999. — 380 p.

Розглянуто узагальнення початково-крайової задачі математичної фізики з поверхневою і внутрішньою дисипацією енергії. Сформульована абстрактна проблема на основі використання абстрактної формули Гріна для трійки гільбертових просторів і оператора сліду. Доведена теорема про сильну розв'язність досліджуваної задачі. Розглянуті спектральні проблеми з внутрішньою дисипацією енергії при різній інтенсивності внутрішній дисипації. Наведені простіщі властивості рішень даної задачі. Для випадку малої та середньої внутрішньої дисипації отримані твердження про локалізацію спектру та про повноту та базисність кореневих функцій.

There was considered generalization of the initial-boundary value problem with surface and internal dissipation of an energy. There was formulated the abstract problem on the basis of the abstract Green formula for the triple of Hilbert spaces and the trace operator. We proved the theorem on strong solvability of the considered problem. There were discussed spectral problems with internal dissipation of an energy at its different intensity. The elementary properties of the solutions of the problem were presented.