

О.П. Бойко

## О СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ СТИЛЬТЬЕСОВСКИХ СТРУН С ОДНОМЕРНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

MSC2000: 34K29, 34K10

### ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению прямых и обратных задач для струн с одномерным трением было положено в работах [1], [2], [3], где рассматривались весьма широкие классы струн, в том числе не имеющие плотности в классическом понимании. Важным подклассом является класс гладких струн. Уравнение колебаний струны, плотность которой имеет вторую производную, с помощью известного преобразования Лиувилля [4] можно привести к уравнению Штурма-Лиувилля. Прямые и обратные задачи для таких струн рассматривались во многих работах (см, например, [5]).

Другим важным подклассом струн являются стильтьесовские струны, т.е. невесомые нити несущие сосредоточенные массы. Модели физических явлений, связанных с стильтьесовскими струнами широко используются в теоретической механике и инженерном деле [6], [7], [8], а также в теории электрических цепей [9].

В настоящей статье рассматриваются колебания стильтьесовских струн с конечным числом сосредоточенных масс, подверженных одномерному трению. Подход настоящей статьи основывается на классических результатах из книги [10] и использует разложение в цепную дробь, введенное Стильтьесом [11].

### 1. ПОСТАНОВКИ

В [12] рассмотрена нить длины  $l$ , натянутая единичной силой и несущая  $n$  сосредоточенных масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, через  $l_0, l_1, \dots, l_n$  обозначены

длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Рассмотрен случай, когда левый конец струны жестко закреплен, а правый конец, несущий массу  $m_n$ , движется с коэффициентом вязкого трения  $\alpha$ .

В этом случае для всех  $k = 1, 2, \dots, n-1$  уравнение колебаний  $k$ -ой массы имеет следующий вид:

$$\frac{v_k(t) - v_{k+1}(t)}{l_k} + \frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + m_k v_k''(t) = 0. \quad (1)$$

Закрепление левого конца струны описывается уравнением

$$v_0(t) = 0, \quad (2)$$

а уравнение колебаний демпфированной массы  $m_n$  имеет вид:

$$\frac{v_n(t)}{l_n} + \frac{v_n(t) - v_{n-1}(t)}{l_{n-1}} + m_n v_n''(t) + \alpha v_n'(t) = 0. \quad (3)$$

Избавляясь от времени с помощью стандартной подстановки  $v_k(t) = u_k e^{i\lambda t}$  получаем соответствующую краевую задачу:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (4)$$

$$u_0 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n \lambda^2 + i\alpha \lambda) u_n = 0. \quad (6)$$

В [12] с использованием методов [10] доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть задано число  $l > 0$ . Для того чтобы множество комплексных чисел  $\{\lambda_k\}$  ( $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ ) было спектром задачи (4)-(6) с  $\{m_k\}_1^n$ ,  $\{l_k\}_0^n$ , таких что  $\sum_{k=0}^n l_k = l$ , и  $\alpha > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1)  $\text{Im } \lambda_k > 0$  для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ;
- (2)  $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$  для не чисто мнимых  $\lambda_{-k}$  и кратности симметрично расположенных чисел совпадают.

Следует отметить, что ранее этот результат был получен другим способом в [13], [14], а для случая свободного левого конца он следует из результатов работы [1].

В [15] рассмотрен случай когда трение приложено в промежуточной точке. Такая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_1) \quad (7)$$

$$\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k+1}}{\tilde{l}_k} + \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tilde{l}_{k-1}} - \tilde{m}_k \lambda^2 \tilde{u}_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_2) \quad (8)$$

$$u_0 = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad (10)$$

$$u_{n_1+1} = \tilde{u}_{n_2+1}, \quad (11)$$

$$\frac{u_{n_1+1} - u_{n_1}}{l_{n_1}} - \frac{\tilde{u}_{n_2+1} - \tilde{u}_{n_2}}{l_{n_2}} = -i\alpha \lambda u_{n_1+1} \quad (12)$$

и представляет собой описание струны общей длины  $l$ , состоящей из двух частей: левой части длины  $\hat{l}$  и правой части длины  $l - \hat{l}$ . В левой части струны расположено  $n_1$  масс  $m_1, m_2, \dots, m_{n_1}$ , пронумерованные в порядке возрастания индекса от левого конца струны к правому, а в правой части струны расположено  $n_2$  масс  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_{n_2}$ , пронумерованные в обратном порядке от правого конца струны к левому. В точке соединения частей струны расположено невесомое кольцо, движущееся в направлении перпендикулярном к равновесному положению струны, с коэффициентом вязкого трения  $\alpha$ . Длины интервалов, на которые точки приложения масс делят струну, обозначены через  $l_0, \dots, l_{n_1}$  и  $\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{n_2}$  и пронумерованы от соответствующего конца струны до точки приложения трения.

Для задачи (7)-(12) в [15] получена следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть заданы числа  $l > 0$  и  $\hat{l} \in (0; l)$ . Для того чтобы множество комплексных чисел  $\{\lambda_k\}$  ( $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ ) было спектром задачи (7)-(12) с общим числом масс  $n$  и длинами интервалов  $l_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n_1$ ) и  $\tilde{l}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n_2$ ), таких что  $\sum_0^{n_1} l_k = \hat{l}$  и  $\sum_0^{n_2} \tilde{l}_k = l - \hat{l}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1)  $\text{Im } \lambda_k \geq 0$  для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ,  $\lambda_k \neq 0$ ;
- (2)  $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$  для не чисто мнимых  $\lambda_{-k}$  и кратности симметрично расположенных чисел совпадают;
- (3) Все вещественные  $\lambda_k$  (если такие есть) однократные;
- (4) Для каждого вещественного  $\lambda_k$  справедливо  $\text{Im } \Phi'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} = 0$ ,  $\text{Im } \Phi''(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} \neq 0$ , где  $\Phi(\lambda) = \prod_{k=-n}^n (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k})$ .

Следствием этих условий является то, что число вещественных собственных значений не превосходит  $n$ .

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ

Мы рассматриваем задачу когда оба конца нити закреплены, а трение приложено к крайней справа массе. Обозначим через  $l$  общую длину струны несущей  $n$  сосредоточенных масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, обозначим через  $l_0, l_1, \dots, l_n$  длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Через  $\alpha$  обозначим коэффициент вязкого трения, с которым движется масса  $m_n$ .

Соответствующая краевая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

$$u_0 = 0, \quad (14)$$

$$u_{n+1} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n \lambda^2 + i\alpha \lambda) u_n = 0. \quad (16)$$

Согласно работе [10] решение рекуррентных соотношений (13) имеет вид

$$u_k = R_{2k-2}(\lambda^2) u_1, \quad (17)$$

где  $R_{2k-2}$  – некоторый многочлен степени  $2k-2$ .

Введем согласно [10] многочлены с нечетными индексами:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = \frac{R_{2k}(\lambda^2) - R_{2k-2}(\lambda^2)}{l_k}. \quad (18)$$

Многочлены  $R_k$  удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = -\lambda^2 m_k R_{2k-2}(\lambda^2) + R_{2k-3}(\lambda^2),$$

$$R_{2k}(\lambda^2) = l_k R_{2k-1}(\lambda^2) + R_{2k-2}(\lambda^2), \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad R_0(\lambda^2) = 1, \quad R_{-1}(\lambda^2) = \frac{1}{l_0}.$$

Учитывая эти равенства, из уравнения (16) получаем

$$R_{2n-3}(\lambda^2) + (-m_n \lambda^2 + \frac{1}{l_n}) R_{2n-2}(\lambda^2) + i\alpha \lambda R_{2n-2}(\lambda^2) = 0. \quad (19)$$

Обозначим через  $\Phi(\lambda)$  многочлен степени  $2n$ , стоящий в левой части (19), и будем называть его характеристическим многочленом задачи (13)-(16), так как спектр  $\lambda_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ) задачи (13)-(16) совпадает с множеством корней функции  $\Phi(\lambda)$ .

Легко показать, что спектр задачи (13)-(16) совпадает со спектром квадратичного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A, \quad (20)$$

где операторы  $M$ ,  $K$ ,  $A$  действуют в  $n$ -мерном гильбертовом пространстве и имеют следующий вид:

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\},$$

$$K = \text{diag}\{0, 0, \dots, \alpha\},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n-1}} & -\frac{1}{l_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{l_n} & \frac{1}{l_n} \end{pmatrix}.$$

Для операторов, входящих в пучок (20) справедливы неравенства при некотором  $\epsilon > 0$  :

$$A \geq \epsilon I, \quad M \geq \epsilon I, \quad K \geq 0.$$

Пользуясь общими результатами теории операторных пучков (см., например, [16]) получаем что все собственные значения пучка (20) лежат в замкнутой верхней полуплоскости, однако, исходя из конкретного вида пучка, покажем что все его собственные значения лежат в открытой верхней полуплоскости.

Действительно, пусть есть некоторое собственное значение  $\lambda_k$  на вещественной оси. Соответствующий ему собственный вектор обозначим через  $Y_k$ . Тогда из равенства

$$\lambda_k^2 (MY_k, Y_k) - (AY_k, Y_k) - i\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0 \tag{21}$$

следует  $\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0$ .

Ноль не является собственным значением, ввиду строгой положительности оператора  $A$ , значит  $(KY_k, Y_k) = 0$ . Если  $Y_k = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , то это означает что  $\alpha|u_n|^2 = 0$ , откуда  $u_n = 0$ . Но тогда, из формулы (16) следует что  $u_{n-1} = 0$ , а из (13), что  $u_k = 0$  при всех  $k$ , т.е.  $Y_k = 0$ , что невозможно.

**Определение 1.** Многочлен принадлежит классу Эрмита-Биллера ( $HB$ ) если все его нули лежат в открытой верхней полуплоскости [17].

Тогда из вышесказанного следует что многочлен (19) принадлежит классу многочленов Эрмита-Биллера.

Кроме того, из самой формы многочлена (19) видно, что для него выполняется условие симметрии  $\Phi(-\bar{\lambda}) = \overline{\Phi(\lambda)}$ , т.е. он принадлежит классу симметричных многочленов Эрмита-Биллера и, следовательно для него выполняются условия:

- (i)  $\text{Im } \lambda_k > 0$  для  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ;  
(ii)  $\lambda_{-k} = -\bar{\lambda}_k$  для не чисто мнимых  $\lambda_{-k}$  и кратности симметрично расположенных чисел совпадают.

**Теорема 3.** Пусть заданы числа  $l > 0$  и  $l_n \in (0, l)$ . Для того чтобы набор комплексных чисел  $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$  был спектром задачи (13)-(16) с  $\sum_{k=0}^{n-1} l_k = l - l_n$ , необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (i) и (ii). Соответствующий  $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ ,  $l$  и  $l_n$  набор положительных чисел  $\{\{l_k\}_{k=0}^{n-1}, \{m_k\}_{k=1}^n\}$  является единственным.

#### АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СТРУНЫ

Построим многочлен

$$\Phi(\lambda) = \prod_{-n, k \neq 0}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \quad (22)$$

Из симметрии нулей этого многочлена следует что четные многочлены:

$$P(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) + \Phi(-\lambda)}{2} \quad (23)$$

и

$$Q(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda)}{2i\lambda} \quad (24)$$

вещественны.

Коэффициент трения  $\alpha$  находим по формуле

$$\alpha = Q(0) \left( \frac{1}{l - l_n} + \frac{1}{l_n} \right). \quad (25)$$

Величину крайней справа демпфированной массы  $m_n$  получаем следующим образом:

$$m_n = -\alpha \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda^2)}{\lambda^2 Q(\lambda^2)}. \quad (26)$$

Ввиду того что степень  $P(\lambda^2)$  равна  $2n$ , а степень  $Q(\lambda^2)$  равна  $2n - 2$ , предел в правой части (26) существует. Кроме того, нетрудно показать, что

$$m_n = -\alpha \left( i \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \lambda_k \right)^{-1}.$$

Отсюда, ввиду условий (i) и (ii) теоремы 3, следует, что  $m_n > 0$ .

**Определение 2.** (см. [18]) Функция  $\omega(\lambda)$  называется неванлинновской функцией (или R-функцией) если:

- (1) она аналитична в полуплоскостях  $\text{Im } \lambda > 0$  и  $\text{Im } \lambda < 0$ ;

- (2)  $\omega(\bar{\lambda}) = \overline{\omega(\lambda)}$  ( $\text{Im}\lambda \neq 0$ );  
 (3)  $\text{Im}\lambda \text{Im} \omega(\lambda) \geq 0$  для  $\text{Im}\lambda \neq 0$ .

**Определение 3.** (см. [18]) Неванлинновская функция  $\omega(\lambda)$  называется S-функцией если  $\omega(\lambda) \geq 0$  для  $\lambda < 0$ .

Легко показать, что функция

$$\frac{\alpha^{-1}\lambda Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)}$$

принадлежит классу S-функций и не имеет полюса в начале координат. Тогда, согласно [10], эту функцию можно разложить в цепную дробь

$$\frac{\alpha^{-1}Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)} = a_{n-1} + \frac{1}{-b_{n-1}z + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{-b_{n-2}z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_0}}}}}} \quad (27)$$

с  $a_k > 0$  и  $b_k > 0$  для всех  $k$ .

Мы отождествляем  $a_k$  с длиной  $k$ -го интервала  $l_k$  и  $b_k$  с  $k$ -ой массой  $m_k$  стильтесовской струны.

*Получена характеристика спектра для стильтесовской струны с конечным числом сосредоточенных масс, закрепленными концами и вязким трением, приложенным к одной из крайних масс. Получен алгоритм восстановления величин точечных масс, длин интервалов между ними и коэффициента трения по спектру колебаний, общей длине струны и длине крайнего интервала.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аров Д.З. *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости* // Сибирский мат. ж. – 1975. – Т.16, №.3. – С.440-465.  
 [2] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны* // Доклады АН СССР – 1979. – Т.247, №.5. – С.1046-1049.

- [3] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием* // J. Operator Theory – 1989. – V.22 – P.369-395.
- [4] Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics* // Interscience, New York – 1953. – V.1
- [5] Pivovarchik V.N., *Direct and inverse problems for damped strings* // J. Operator Theory – 1999. – V.42 – P.189-220.
- [6] Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis F.D. *Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with  $n$  beads when  $n$  is large.* // C.R. Acad. Sci. Paris, I. – 1991. – V.313 – P. 961 - 965.
- [7] Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М. *Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера.* // Прикл. матем. и мех. – 1991. – Т. 55, вып. 6. – С. 989 - 995.
- [8] Filimonov A.M., Myshkis A.D. *On properties of large wave effect in classical problem bead string vibration.* // J. of Difference Equations and Applications – 2004 – V. 10:13–15 – P. 1171-1175.
- [9] Wohlers R.M. *Lumped and distributed passive networks* // Academic Press, New York – 1969.
- [10] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и колебания механических систем* // ГИТТЛ, М. – 1950.
- [11] Stieltjes T.-L. *Recherches sur les fractions continues.* // Ann. Fac. Sci. Toulouse – 1894 – V.8 – P.1-122 – 1895 – V.9 – P. 1-47.
- [12] Бойко О.Р., Pivovarchik V.N. *Inverse problem for Stieltjes string damped at one end* // Methods of Functional Analysis and Topology – 2008 (в печати)
- [13] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping. *Applicable Analysis*, **29** (1988), 1-18.
- [14] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping II. *Integral Equations and Operator Theory*, **13** (1990), 883-897.
- [15] Boyko O., Pivovarchik V.N. *Inverse three spectral problem for a Stieltjes string and inverse problem with one dimensional damping* // Inverse Problems – 2008 – V.24, 015019.
- [16] Pivovarchik V.N. *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensional Linear Part.* // Укр. мат. журн. – 2007 – Т.59, №5 – С. 702-716
- [17] Levin B.Ja. *Distribution of zeros of entire functions* // Trans. Math. Monographs, AMS, Providence, RI – 1980 – V.5
- [18] Кац И.С., Крейн М.Г. *R-функции - аналитические функции, отображающие полуплоскость в себя. Дополнение 1 в кн.: Атkinson Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.* // М.: Мир – 1968.



Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»

Том 21(60) № 1 (2008), с. 11–23.

В. И. Войтицкий, М. А. Имрякова, Н. Д. Копачевский, А. И. Лившиц,  
А. В. Насонкина

## ТРИ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

УДК 532.5, 517.98

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья написана по материалам магистерских работ 2008 года студенток кафедры математического анализа, выполненных под руководством проф. Копачевского Н.Д. при участии аспиранта Войтицкого В.И.

Рассматриваются спектральные задачи, возникающие при изучении малых колебаний системы идеальных капиллярных жидкостей (Лившиц А.И.), идеальных стратифицированных жидкостей (Имрякова М.А.) и гидросистемы “идеальная жидкость — баротропный газ” (Насонкина А.В.). После разделения переменных для горизонтальной составляющей возникает спектральная задача Неймана для уравнения Лапласа и одномерные спектральные задачи для вертикальной составляющей. Приводится общая схема исследования операторными методами одномерных спектральных задач, кратко формулируются основные результаты, полученные в магистерских работах. Общие свойства таковы: спектры задач состоят из изолированных конечнократных положительных собственных значений  $\lambda = \omega^2$  ( $\omega$  — частота колебания) с предельной точкой на  $+\infty$  либо в нуле (для стратифицированной жидкости). Системы собственных элементов образуют ортонормированные базисы в некоторых гильбертовых пространствах.

## 2. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ИДЕАЛЬНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим общую постановку данной задачи (см. [1], а также [2] и [3]).

Пусть замкнутый неподвижный сосуд, ограниченный поверхностью  $S = \cup_{k=1}^{m+1} S_k$ , полностью заполнен несколькими идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающими в состоянии равновесия области  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{m+1}$ . При этом в состоянии покоя  $\Omega_1$  контактирует с сосудом по поверхности  $S_1$  и с жидкостью  $\Omega_2$  по некоторой равновесной поверхности  $\Gamma_1$ ;  $\Omega_2$  контактирует с сосудом по поверхности  $S_2$  и с жидкостями  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно и т.д. Будем считать, что каждая  $\Gamma_k$  контактирует с поверхностью сосуда по некоторой линии  $\gamma_k$ , причем эти линии не имеют попарно общих точек. Обозначим через  $\rho_k$  — плотность жидкости в  $\Omega_k$ ;  $\sigma_k$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma_k$ ;  $\alpha_k$  — угол смачивания  $k$ -й жидкости вдоль  $\gamma_k$ ;  $\vec{n}$  — вектор нормали на  $\Gamma_k$ , направленный из  $\Omega_k$  в  $\Omega_{k+1}$ ;  $\vec{n}_0$  — вектор нормали на  $S$ , направленный наружу области.

Рассмотрим задачу о малых свободных колебаниях такой системы. Введем систему координат  $Oxyz$ , жестко связанную с сосудом так, чтобы ось  $Oz$  была направлена против действия силы тяжести:  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Если ввести на  $\Gamma_k$  криволинейные системы координат, то отклонения вдоль нормалей  $\vec{n}$  движущихся свободных поверхностей  $\Gamma_k(t)$  от равновесных  $\Gamma_k$  можно с точностью до малых высшего порядка описать функциями  $\zeta_k$  (см., например, [4]). При этом, считая движение каждой жидкости потенциальным с потенциалами скорости  $\Phi_k(x, y, z, t)$  ( $\vec{u}_k = -\nabla\Phi_k$ ), получаем задачу в фиксированных областях:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), & \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_k), & k = \overline{1, m+1}, \\ \frac{\partial\zeta_k}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi_k}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = -\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \quad (\text{на } \Gamma_k), & k = \overline{1, m}, \\ \rho_k \frac{\partial\Phi_k}{\partial t} - \rho_{k+1} \frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial t} = \sigma_k B_k \zeta_k \quad (\text{на } \Gamma_k), & k = \overline{1, m}, \\ \int_{\Gamma_k} \zeta_k d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial n} d\Gamma_k = 0, & k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь

$$B_k \zeta_k := P_{\Gamma_k}(-\Delta_{\Gamma_k} \zeta_k + a_k \zeta_k), \quad (2)$$

$$\mathcal{D}(B_k) := \{\zeta_k \in C^2(\Gamma_k) : \frac{\partial\zeta_k}{\partial e_k} + \chi_k \zeta_k = 0 \text{ (на } \gamma_k)\}; \quad (3)$$

$$P_{\Gamma_k} u_k := u_k - \frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\Gamma_k} u_k d\Gamma_k \quad (4)$$

— операторы проектирования на подпространства  $\mathcal{H}_k := L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}$ ; через  $\Delta_{\Gamma_k}$  обозначены операторы Лапласа-Бельтрами, заданные на гладких многообразиях  $\Gamma_k$ ;  $\partial/\partial e_k$  — производная по внешней нормали  $\vec{e}_k$  к контуру  $\gamma_k$  в плоскости, касательной к  $S_k$ ; функции

$$\begin{aligned}\chi_k &:= \frac{k_\Gamma \cdot \cos \alpha_k - k_S}{\sin \alpha_k}, \\ a_k &:= \frac{(\rho_k - \rho_{k+1})g}{\sigma_k} \cos(n, \widehat{\vec{e}_z}) - k_{1k}^2 - k_{2k}^2,\end{aligned}\quad (5)$$

определены на  $\gamma_k$  и  $\Gamma_k$  соответственно;  $k_\Gamma$  и  $k_S$  — кривизны линий, которые получаются в результате пересечения поверхностей  $\Gamma_k$  и  $S_k$  плоскостью, перпендикулярной к  $\gamma_k$ ;  $k_{1k}$  и  $k_{2k}$  — главные кривизны поверхностей  $\Gamma_k$ .

Пусть теперь сосуд имеет форму цилиндра с плоским основанием  $\Gamma$  и боковой поверхностью  $\partial\Gamma \times [h_0; h_{m+1}]$ . Считая, что  $\alpha_k = \pi/2$ , получим  $k_{1k} = k_{2k} = 0$ ,  $a_k = \frac{(\rho_k - \rho_{k+1})g}{\sigma_k}$ ,  $\chi_k \equiv 0$ . Будем искать решения задачи (1)–(5) в виде:

$$\zeta_k = \zeta_k e^{i\omega t}, \quad \Phi_k = \Phi_k e^{i\omega t}, \quad (6)$$

где  $\omega$  — неизвестная частота колебаний. Тогда, исключая функции  $\zeta_k$  и обозначая  $\lambda := \omega^2$ , получаем следующую спектральную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \lambda(\rho_k \Phi_k - \rho_{k+1} \Phi_{k+1}) = -\sigma_k \Delta_{\Gamma_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} + (\rho_k - \rho_{k+1})g \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma_k), \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} d\Gamma_k = 0, \\ \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right) = 0 \quad (\text{на } \gamma_k), \quad k = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Разделяя в задаче (7) переменные, т.е. считая

$$\Phi_k(x, y, z) = X(x, y) \cdot Z_k(z), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad z \in (h_{k-1}; h_k), \quad (8)$$

получаем задачу

$$-\Delta_2 X - \mu_p^2 X = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial X}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} X d\Gamma = 0, \quad (9)$$

спектр которой состоит из положительных конечнократных собственных значений  $\{\mu_p\}_{p=1}^\infty$ ,  $\mu_p \rightarrow +\infty$  ( $p \rightarrow \infty$ ) (ее собственные элементы  $\{X_p(x, y)\}_{p \in \mathbb{N}}$  образуют ортонормированный базис в  $\mathcal{H} := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ ). Затем, для каждого  $p \in \mathbb{N}$  имеем

спектральную задачу

$$\begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, & z \in (h_{k-1}; h_k), & k = \overline{1, m+1}, \\ Z_0'(h_0) = Z_{m+1}'(h_{m+1}) = 0, \\ Z_k'(h_k) = Z_{k+1}'(h_k), \\ \lambda(\rho_k Z_k(h_k) - \rho_{k+1} Z_{k+1}(h_k)) = \beta_{kp} Z_k'(h_k), & k = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\beta_{kp} := \sigma_k \mu_p + (\rho_k - \rho_{k+1})g$ . Введем обозначения

$$Z_k'(h_k) = Z_{k+1}'(h_k) =: w_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (11)$$

считая также, что  $w_0 = w_{m+1} = 0$ . Рассмотрим две вспомогательные задачи

$$\begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, & \begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, & z \in (h_{k-1}; h_k), & k = \overline{1, m+1}, \\ Z_k'(h_k) = w_k, & Z_k'(h_k) = 0, \\ Z_k'(h_{k-1}) = 0; & Z_k'(h_{k-1}) = w_{k-1}. \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

Складывая решения этих задач, получаем, что для решения задачи (10) справедливо представление

$$Z_k(z) = \frac{1}{\mu_p \operatorname{sh}[\mu_p(h_k - h_{k-1})]} (\operatorname{ch}[\mu_p(z - h_{k-1})]w_k - \operatorname{ch}[\mu_p(h_k - z)]w_{k-1}). \quad (13)$$

Тогда из совокупности полевных условий в (10) получаем  $m$  уравнений

$$\begin{aligned} \mu_p \beta_{kp} w_k = \lambda \left[ -\frac{\rho_k}{\operatorname{sh}[\mu_p(h_k - h_{k-1})]} w_{k-1} + \right. \\ \left. + (\rho_k \operatorname{cth}[\mu_p(h_k - h_{k-1})] + \rho_{k+1} \operatorname{cth}[\mu_p(h_{k+1} - h_k)]) w_k - \frac{\rho_{k+1}}{\operatorname{sh}[\mu_p(h_{k+1} - h_k)]} w_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

для нахождения чисел  $w_k$  и спектрального параметра  $\lambda$ .

Эти уравнения кратко можно переписать в виде

$$\mu_p B w = \lambda A w, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где  $w := (w_1, w_2, \dots, w_m)^t$ ,  $B := \operatorname{diag}\{\beta_{kp}\}_{k=1}^m$ ,  $A$  — трёхдиагональная самосопряжённая матрица. Можно доказать, что матрица  $A$  является положительно определённой. Тогда задача (15) имеет при каждом  $p$  ровно  $m$  (с учётом кратности) положительных собственных значений  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ , а из собственных элементов  $Z_k'(h_k)$  можно составить ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^m$ . Для задачи (7) отсюда получаем, что ее спектр дискретный, состоит из положительных конечнократных собственных

значений  $\{\lambda_{pj}\}_{p \in \mathbb{N}, j = \overline{1, m}}$ . Причём  $\lambda_{pj} \rightarrow +\infty$  при  $p \rightarrow \infty$ . Можно доказать, что задача имеет собственный ортонормированный базис в энергетических пространствах, отвечающих потенциальной и кинетической энергиям систем.

В магистерской работе Лившиц А.И. проведено исследование спектра и собственных функций задачи в случае двух и трёх слоёв жидкостей. Для цилиндрического сосуда, полностью заполненного двумя жидкостями, занимающими объёмы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , где  $\Omega_1 = \Gamma \times (0; h_1)$ ,  $\Omega_2 = \Gamma \times (h_1; h_2)$ , показано, что при всех  $p \in \mathbb{N}$  имеется одно собственное значение

$$\lambda_p^{(1)} = \frac{\mu_p \beta_{1p}}{\rho_1 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(\mu_p (h_2 - h_1))} \rightarrow \frac{\mu_p \beta_{1p}}{\rho_1 + \rho_2} \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Если жидкости занимают области  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , где  $\Omega_2 = \Gamma \times (h_1; h_2)$ ,  $\Omega_3 = \Gamma \times (h_2; h_3)$ , то при всех  $p \in \mathbb{N}$  имеется одно собственное значение

$$\lambda_p^{(2)} = \frac{\mu_p \beta_{2p}}{\rho_2 \operatorname{cth}(\mu_p (h_2 - h_1)) + \rho_3 \operatorname{cth}(\mu_p (h_3 - h_2))} \rightarrow \frac{\mu_p \beta_{2p}}{\rho_2 + \rho_3} \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Для цилиндрического сосуда, полностью заполненного тремя идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающими объёмы  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ , где  $\Omega_1 = \Gamma \times (0; h_1)$ ,  $\Omega_2 = \Gamma \times (h_1; h_2)$ ,  $\Omega_3 = \Gamma \times (h_2; h_3)$ , получено, что при всех  $p \in \mathbb{N}$  имеется два положительных собственных значения  $\lambda_{1p}$ ,  $\lambda_{2p}$ , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \left[ \rho_1 \rho_3 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) \operatorname{cth}[\mu_p (h_3 - h_2)] + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) \operatorname{cth}(\mu_p (h_2 - h_1)) + \right. \\ & \left. + \rho_2 \rho_3 \operatorname{cth}(\mu_p (h_2 - h_1)) \operatorname{cth}[\mu_p (h_3 - h_2)] \right] - \lambda \left[ \rho_3 \mu_k \beta_{1p} \operatorname{cth}[\mu_p (h_3 - h_2)] + \right. \\ & \left. + \rho_1 \mu_p \beta_{2p} \operatorname{cth}(\mu_p h_1) + \rho_2 \mu_p (\beta_{1p} + \beta_{2p}) \operatorname{cth}(\mu_p (h_2 - h_1)) \right] + \mu_p^2 \beta_{1p} \beta_{2p} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Составляя теперь, с использование теоремы Виета, квадратное уравнение, корнями которого являются собственные значения  $\lambda_p^{(1)}$  и  $\lambda_p^{(2)}$ , можно заметить, что (18) будет отличаться от составленного уравнения на бесконечно малую величину

$$\rho_2^2 \left[ \operatorname{cth}^2(\mu_p (h_2 - h_1)) - 1 \right] \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty), \quad (19)$$

стоящую при  $\lambda^2$ . Отсюда имеем

$$\lambda_{jp} \rightarrow \lambda_p^{(j)} \quad (p \rightarrow \infty), \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

Таким образом, в случае трёх слоёв жидкости имеется две ветви собственных значений. Первая отвечает колебаниям у границы раздела  $\Gamma_1$  (колеблются главным

образом первая и вторая жидкости), а колебания второй ветви расположены у поверхности  $\Gamma_2$  (колеблются вторая и третья жидкости). Соответствующие собственные функции строились графически с помощью пакета Maple. Был обнаружен так называемый skin-effect, т.е. при возрастании  $p$  увеличивается “пикообразность” колебаний у границы раздела жидкостей (собственные функции всё ближе прилегают к границам раздела).

### 3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ИДЕАЛЬНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Будем считать теперь, что идеальные стратифицированные жидкости, плотности которых изменяются вдоль вертикальной оси, в состоянии покоя полностью заполняют сосуд произвольной формы и занимают связные области  $\Omega_k$  ( $k = \overline{1, m+1}$ ), ограниченные твердыми стенками  $S_k$  ( $k = \overline{1, m+1}$ ) и границами раздела жидкостей  $\Gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ).

Тогда рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, позволяют задачу о малых движениях исходной гидросистемы (рассматриваемая задача изучалась в [5]–[8]) сформулировать в виде следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \rho_{0k}(z) \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2} = -\nabla p_k - g \rho_k \vec{e}_z & (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \rho_{0k} \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u}_k = 0 & (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_0 = 0 & (\text{на } S_k), \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} p_k - p_{k+1} = g(\rho_{0k} - \rho_{0,k+1}) \zeta_k & (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ \zeta_k = (u_z)_k = (u_z)_{k+1} & (\text{на } \Gamma_k), \quad \int_{\Gamma_k} \zeta_k d\Gamma_k = 0, \end{cases} \quad (22)$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} \zeta_k(0) = \zeta_k^0, \quad k = \overline{1, m}, \\ \rho_k(0, \vec{x}) = \rho_k^0(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \vec{u}_k(0, \vec{x}) = \vec{u}_k^0. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $\vec{u}_k(t, \vec{x})$  — поле смещений в жидкости,  $p_k(t, \vec{x})$  и  $\rho_k(t, \vec{x})$  — отклонения поля давлений и плотности от равновесных  $p_{0k}(z)$  и  $\rho_{0k}(z)$  соответственно,  $\zeta_k$  — вертикальное отклонение движущихся поверхностей  $\Gamma_k(t)$  от равновесных  $\Gamma_k$ ,  $\vec{n}_0$  — нормаль к твердой стенке  $S$ .

Рассматривая собственные колебания исходной гидросистемы, т.е. такие решения задачи (21)–(23), для которых  $\vec{u}_k(t, \vec{x})$ ,  $p_k(t, \vec{x})$ ,  $\rho_k(t, \vec{x})$ ,  $\zeta_k(t, x, y)$  зависят от времени

по закону  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  — неизвестная частота колебаний, получаем спектральную задачу

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_{0k}(z) \vec{u}_k = \nabla p_k + g \rho_k \vec{e}_z & (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \rho_k + \rho'_{0k}(z) (u_z)_k = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u}_k = 0 & (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_0 = 0 & (\text{на } S_k), \end{cases} \quad (24)$$

с условиями (22).

Рассмотрим далее задачу (24), (22) для сосуда цилиндрической формы с произвольным поперечным сечением  $\Gamma$  и боковой стенкой  $\partial\Gamma \times [h_0; h_{m+1}]$ . Обозначим через  $N_k^2(z) := -g\rho'_{0k}(z)/\rho_{0k}(z)$  квадрат частот плавучести  $k$ -ой жидкости. Будем считать их константами:  $N_k^2(z) \equiv N_k^2$ ; тогда каждая жидкость в состоянии покоя будет экспоненциально стратифицированной, т.е.

$$\rho_{0k}(z) = \rho_{0k}(0) \cdot \exp(-\varepsilon_k z), \quad \varepsilon_k = N_k^2 g^{-1}. \quad (25)$$

В этом случае, исключая все переменные, кроме вертикального смещения  $w_k(\vec{x}) := (u_z)_k$  (в  $\Omega_k$ ), получаем

$$\begin{cases} (N_k^2 - \omega^2) \Delta w_k - \omega^2 \left( \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} - \frac{1}{g} N_k^2 \frac{\partial w_k}{\partial z} \right) = 0, & k = \overline{1, m+1}, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \vec{n}_0} = 0, & k = \overline{1, m+1}, \\ \rho_{0k} \left( \omega^2 \frac{\partial w_k}{\partial z} + g \Delta_2 w_k \right) = \rho_{0, k+1} \left( \omega^2 \frac{\partial w_{k+1}}{\partial z} + g \Delta_2 w_{k+1} \right), & k = \overline{1, m}, \\ \zeta_k = w_k|_{\Gamma_k} = w_{k+1}|_{\Gamma_k}, & k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (26)$$

Разделяя в задаче (26) переменные, т.е. считая  $w_k = Z_k(z) \cdot X(x, y)$ , для  $X(x, y)$  снова получаем задачу (9), рассмотренную в предыдущем пункте. Имеется полная система собственных функций  $\{X_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ , а собственные значения  $\mu_p \rightarrow +\infty$ . При этом, для каждого  $p \in \mathbb{N}$  имеем задачу

$$\begin{cases} -(\rho_{0k} Z'_k)' + \mu_p^2 \rho_{0k} Z_k = \lambda \mu_p^2 g (-\rho'_{0k}) Z_k, & k = \overline{1, m+1}, \quad \lambda := \omega^{-2}, \\ Z_k(h_k) = Z_{k+1}(h_k), & k = \overline{1, m}, \\ \rho_{0k} Z'_k(h_k) - \rho_{0, k+1} Z'_{k+1}(h_k) = \lambda \mu_p^2 g (\rho_{0k} - \rho_{0, k+1}) Z_k(h_k), & k = \overline{1, m}, \\ Z'_1(h_0) = Z'_{m+1}(h_{m+1}) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Будем искать решение  $\widehat{Z} := (Z_1(z); \dots; Z_{m+1}(z); Z_1(h_1); \dots; Z_m(h_m))^t$  задачи (27) в гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \bigoplus_{k=1}^{m+1} L_2[(h_{k-1}; h_k); \mu_p^2 g(-\rho'_{0k})] \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{R}, \\ \|\widehat{Z}\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \sum_{k=1}^{m+1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} |Z_k(z)|^2 \mu_p^2 g(-\rho'_{0k}) dz + \sum_{k=1}^m |Z_k(h_k)|^2 \mu_p^2 g(\rho_{0k} - \rho_{0,k+1}). \end{aligned} \quad (28)$$

Введём в  $\mathbf{H}$  линейный оператор

$$\begin{aligned} A\widehat{Z} &:= \left( \frac{1}{\mu_p^2 g(-\rho'_{0k})} (-(\rho_{0k} Z'_k)' + \mu_p^2 \rho_{0k} Z_k)_{k=1}^{m+1}; \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\mu_p^2 g(\rho_{0k} - \rho_{0,k+1})} (\rho_{0k} Z'_k(h_k) - \rho_{0,k+1} Z'_{k+1}(h_k))_{k=1}^m \right), \\ \mathcal{D}(A) &:= \left\{ \widehat{Z} \in \bigoplus_{k=1}^{m+1} C^2[h_{k-1}; h_k] \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{R} : \right. \\ &\quad \left. Z_1(h_0) = Z_{m+1}(h_{m+1}) = 0, Z'_k(h_k) = Z'_{k+1}(h_k) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, задача (27) эквивалентна задаче  $A\widehat{Z} = \lambda\widehat{Z}$ . С помощью интегрирования по частям можно доказать, что оператор  $A$  является симметрическим положительно определённым оператором в  $\mathbf{H}$ . Согласно теореме вложения С.Л. Соболева, энергетическое пространство  $\mathbf{H}_A$  оператора  $A$  компактно вложено в  $\mathbf{H}$ . Отсюда следует, что задача (27) имеет дискретный положительный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений  $\lambda_{pj} \rightarrow +\infty$  ( $j \rightarrow +\infty$ ) (также  $\lambda_{pj} \rightarrow +\infty$  ( $p \rightarrow +\infty$ )). Для каждого  $p \in \mathbb{N}$  система собственных элементов  $\widehat{Z}_{jp}$  образует ортонормированный базис в  $\mathbf{H}$ . Отсюда следует, что система собственных элементов  $\widehat{W}_{kp} := \widehat{Z}_{kp} \cdot X_p(x)$  задачи (26) образует ортонормированный базис в пространстве  $\bigoplus_{k=1}^{m+1} L_2(\Omega_k) \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k$  с соответствующим весом.

В магистерской работе Имряковой М.А. проведено рассмотрение спектральной задачи (27) в случае двух идеальных стратифицированных жидкостей, целиком заполняющих цилиндрическую область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1 = \Gamma \times [0, h_1]$ ,  $\Omega_2 = \Gamma \times [h_1; h_2]$ . Рассмотрен вид собственных функций задачи. Получены два трансцендентных характеристических уравнения для нахождения собственных значений  $\lambda = \omega^{-2}$ :

$$1) \lambda \mu_p^2 g(\rho_{01} - \rho_{02}) - \frac{1}{2} (\rho_{01} \varepsilon_1 - \rho_{02} \varepsilon_2) = \rho_{01} q_1 \operatorname{ctg}(q_1 h_1) + \rho_{02} q_2 \operatorname{ctg}(q_2 h_2) \quad (30)$$

$$\text{при } \lambda > \frac{1}{N_k^2} + \frac{N_k^2}{4g^2 \mu_p^2}, \quad -q_k^2 := \frac{1}{4} \varepsilon_k^2 - \mu_p^2 (N_k^2 \lambda - 1) < 0;$$

$$2) \lambda \mu_p^2 g(\rho_{01} - \rho_{02}) - \frac{1}{2} (\rho_{01} \varepsilon_1 - \rho_{02} \varepsilon_2) = \rho_{01} r_1 \operatorname{cth}(r_1 h_1) + \rho_{02} r_2 \operatorname{cth}(r_2 h_2) \quad (31)$$



при  $\lambda < \frac{1}{N_k^2} + \frac{N_k^2}{4g^2\mu_p^2}$ ,  $r_k^2 := \frac{1}{4}\varepsilon_k^2 - \mu_p^2(N_k^2\lambda - 1) > 0$ .

Графическое исследование уравнений (30) и (31) привело к следующим выводам. Случаю (30) для любого  $p \in \mathbb{N}$  соответствует счетное множество собственных значений  $\lambda_{pj} \rightarrow +\infty$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Случаю (29) для любого  $p \in \mathbb{N}$  соответствует одно собственное значение  $\lambda_p$ . Таким образом, рассматриваемая задача имеет в качестве решений поверхностные волны, родственные поверхностным колебаниям однородной нестратифицированной жидкости, а также внутренние волны, обусловленные стратификацией жидкостей.

#### 4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИДРОСИСТЕМЫ “ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ — БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ”

Будем считать, что идеальная несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho_1$  и баротропный газ, плотность которого  $\rho_2 < \rho_1$ , полностью заполняют неподвижный сосуд произвольной формы. Пусть жидкость занимает в состоянии покоя область  $\Omega_1$ , а газ — область  $\Omega_2$ , ограниченные твёрдыми стенками  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ) и границей раздела  $\Gamma$ . Считая колебания данной гидросистемы малыми, как и в предыдущих задачах, отклонения поверхности  $\Gamma(t)$  от равновесной поверхности  $\Gamma$  вдоль нормали  $\vec{n}$  можно описать с точностью до малых более высокого порядка функцией  $\zeta$ .

На основании рассмотрений из [1], [2], для неизвестных потенциалов скоростей  $\Phi_k(\vec{x}, t)$  ( $\vec{u}_k(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi_k(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x} \in \Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ ) и функций смещения  $\zeta(\xi_1, \xi_2, t)$ , зависящих от  $t$  по закону  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  — неизвестная частота колебаний, получаем следующую спектральную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_1), \\ -\Delta\Phi_2 = \lambda c^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \\ \sigma B\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_2 P_{\Gamma}\Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma), \\ \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \lambda \int_{\Omega} \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

Здесь:  $\vec{n}_0$  — вектор нормали на  $S$ , направленный наружу сосуда;  $c$  — скорость звука в газе;  $\lambda$  — квадрат частоты колебаний ( $\lambda = \omega^2$ ). Оператор  $P_{\Gamma}$  проектирования на подпространство  $\mathcal{H} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$  и оператор  $B := P_{\Gamma}(-\Delta_{\Gamma} + aI)$  — есть операторы вида (2) и (4) соответственно.

Пусть теперь сосуд ограничен цилиндрической поверхностью с произвольным плоским горизонтальным основанием  $\Gamma$  и боковой стенкой  $\partial\Gamma \times [-h_1; h_2]$ . Будем считать, что угол смачивания  $\delta$  равен  $\pi/2$ , тогда равновесной поверхностью служит горизонтальная плоскость  $z = 0$ , и получаем области  $\Omega_1 = \Gamma \times (-h_1; 0)$ ,  $\Omega_2 = \Gamma \times (0; h_2)$ . Цилиндрическая форма сосуда позволяет провести разделение переменных. Будем искать неизвестные потенциалы в виде  $\Phi_k(x, y, z) = X(x, y)Z_k(z)$  ( $k = 1, 2$ ). Тогда для  $X(x, y)$  снова получаем спектральную задачу Неймана для уравнения Лапласа (9) (ее спектр состоит из положительных конечнократных собственных значений  $\{\mu_p\}_{p=1}^\infty$ ,  $\mu_p \rightarrow +\infty$  ( $p \rightarrow \infty$ )), а система собственных элементов  $\{X_p(x, y)\}_{p \in \mathbb{N}}$  образуют ортонормированный базис в  $\mathcal{H}$ ). Кроме этого, для каждого  $p \in \mathbb{N}$  имеем спектральную задачу

$$\begin{cases} -Z_1'' + \mu_p^2 Z_1 = 0, & Z_1'(-h_1) = 0, \\ -Z_2'' + \mu_p^2 Z_2 = \lambda c^{-2} Z_2, & Z_2'(h_2) = 0, \\ Z_1'(0) = Z_2'(0), \\ Z_1'(0) = \lambda \beta_p^{-1} (\rho_1 Z_1(0) - \rho_2 Z_2(0)). \end{cases} \quad (33)$$

где  $\beta_p := \sigma \mu_p^2 + (\rho_1 - \rho_2)g$ .

С помощью интегрирования по частям находим, что собственные значения находятся из следующего вариационного отношения:

$$\lambda \mapsto \frac{\rho_2 \int_0^{h_2} (|Z_2'(z)|^2 + \mu_p^2 |Z_2(z)|^2) dz + \rho_1 \int_{-h_1}^0 (|Z_1'(z)|^2 + \mu_p^2 |Z_1(z)|^2) dz}{\rho_2 c^{-2} \int_0^{h_2} |Z_2(z)|^2 dz + \beta_p^{-1} (\rho_1 Z_1(0) - \rho_2 Z_2(0))^2}. \quad (34)$$

Отсюда следует, что собственные значения могут быть лишь положительными.

Рассмотрим в пространстве  $\mathcal{H}^1(-h_1; 0)$  с нормой

$$\|Z_1\|_1^2 := \int_{-h_1}^0 (|Z_1'|^2 + \mu_p^2 |Z_1|^2) dz \quad (35)$$

оператор следа:

$$\gamma_1 Z_1 := Z_1(0), \quad \gamma_1 : \mathcal{H}^1(-h_1; 0) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (36)$$

С помощью интегрирования по частям несложно показать, что для любого  $p \in \mathbb{N}$  существует единственное решение  $Z_1(z)$  задачи

$$-Z_1'' + \mu_p^2 Z_1 = 0, \quad Z_1'(-h_1) = 0, \quad Z_1'(0) = w, \quad (37)$$

которое находится по формуле  $Z_1(z) = T_1 w = w T_1(1)$ , где линейный ограниченный оператор  $T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}^1(-h_1; 0)$  является сопряжённым к оператору следа  $\gamma_1$ .

Именно, имеем

$$Z_1(z) = \frac{w \operatorname{ch}[\mu_p(z + h_1)]}{\mu_p \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}, \quad z \in [-h_1; 0]. \quad (38)$$

Будем искать функцию  $Z_2(z)$  в виде суммы решений вспомогательных задач

$$\begin{cases} -Z''_{21} + \mu_p^2 Z_{21} = 0, & \begin{cases} -Z''_{22} + \mu_p^2 Z_{22} = f, \\ Z'_{22}(h_2) = 0, \\ Z'_{22}(0) = 0. \end{cases} \\ Z'_{21}(h_2) = 0, & \\ -Z'_{21}(0) = -w; & \end{cases} \quad (39)$$

Очевидно, что первая задача эквивалентна задаче (37). Следовательно, она имеет единственное решение  $Z_{21}(z) = T_2(-w) = (-w)T_2(1)$ , где линейный ограниченный оператор  $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}^1(0; h_2)$  является сопряжённым к оператору следа  $\gamma_2 Z_2 := Z_2(0)$ .

Вторую задачу можно записать в виде  $A_p Z_{22}(z) = f$ , где операторы  $A_p$  являются самосопряжёнными расширениями положительно определённых операторов

$$\tilde{A}_p Z_{22} := -Z''_{22} + \mu_p^2 Z_{22}, \quad \mathcal{D}(\tilde{A}_p) = \{Z \in C^2[0; h_2] : Z'(0) = Z'(h_2) = 0\}. \quad (40)$$

Отсюда согласно (33) получаем, что  $A_p Z_{22}(z) = \lambda c^{-2}((-w)T_2(1) + Z_{22}(z))$ . Из последнего условия в (33) имеем  $w = \lambda \beta_p^{-1}(\rho_1 \gamma_1 T_1(1)w + \rho_2 \gamma_2 T_2(1)w - \gamma_2 Z_{22})$ .

Таким образом, задача (33) сводится к операторно-матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{22}(z) \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c^{-2}I & -c^{-2}T_2(1) \\ -\beta_p^{-1}\rho_2\gamma_2 & \beta_p^{-1}(\rho_1\gamma_1 T_1(1) + \rho_2\gamma_2 T_2(1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{22}(z) \\ w \end{pmatrix} \quad (41)$$

для пар  $\hat{u} := (Z_{22}(z); w)^t$  из пространства  $\mathbf{H} := L_2(0; h_2) \oplus \mathbb{R}$ .

Умножая первую строку в (41) на  $\beta_p^{-1}\rho_2$ , а вторую — на  $c^{-2}$ , получаем задачу

$$\mathcal{A}\hat{u} = \lambda \mathcal{B}\hat{u} \quad (42)$$

с самосопряжёнными положительно определёнными операторами

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \beta_p^{-1}\rho_2 A_p & 0 \\ 0 & c^{-2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2 I & -c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2 T_2(1) \\ -c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2\gamma_2 & c^{-2}\beta_p^{-1}(\rho_1\gamma_1 T_1(1) + \rho_2\gamma_2 T_2(1)) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

При этом оператор  $\mathcal{A}$  — неограничен, а оператор  $\mathcal{B}$  ограничен и ограниченно обратим (он представим в виде суммы одномерного и единичного оператора).

Известно (см., например, [4]), что задача вида (42) имеет собственный базис, ортогональный в  $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$  и в  $\mathbf{H}_{\mathcal{B}} = \mathbf{H}$ , при этом

$$(\hat{u}_j, \hat{u}_l)_{\mathcal{B}} = \delta_{jl}; \quad (\hat{u}_j, \hat{u}_l)_{\mathcal{A}} = \lambda_j \delta_{jl}. \quad (44)$$

Спектр задачи состоит из изолированных конечнократных положительных собственных значений  $\lambda_{pj} \rightarrow +\infty$  ( $p, j \rightarrow \infty$ ), которые можно найти как последовательные минимумы вариационного отношения  $\|\widehat{u}\|_A^2 / \|\widehat{u}\|_B^2$ .

В магистерской работе Насонкиной А.В. было проведено представленное выше исследование спектральной задачи (33). Получен общий вид собственных функций задачи. Собственные значения исследовались графически и с помощью автоматизированного пакета Maple. В случае  $\lambda c^{-2} - \mu_p^2 > 0$  и  $\lambda c^{-2} - \mu_p^2 < 0$  собственные значения  $\lambda$  являются корнями соответствующих характеристических трансцендентных уравнений

$$\frac{\mu_p \lambda \rho_2 \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda c^{-2} - \mu_p^2} h_2)}{\sqrt{\lambda c^{-2} - \mu_p^2}} = \lambda \rho_1 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) - \beta_p \mu_p, \quad (45)$$

$$\frac{\mu_p \lambda \rho_2 \operatorname{cth}(\sqrt{\mu_p^2 - \lambda c^{-2}} h_2)}{\sqrt{\mu_p^2 - \lambda c^{-2}}} = \lambda \rho_1 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) - \beta_p \mu_p. \quad (46)$$

Было доказано, что для любого  $p \in \mathbb{N}$  уравнение (45) имеет счётное множество положительных корней  $\lambda_{jp} \rightarrow +\infty$  ( $j, p \rightarrow \infty$ ). При этом уравнение (46), по видимому, не имеет решений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости*. – Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.
- [2] Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. *Гидромеханика невесомости*. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
- [3] Копачевский Н.Д. *Задачи теории колебаний жидкости в условиях невесомости. Учебное пособие*. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1981. – 99 с.
- [4] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи*. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
- [5] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания идеальной стратифицированной жидкости, полостью заполняющей сосуд // МВТУ им. Н.Э. Баумана. М. – 1982. – 25 с. – Деп. в ВИНТИ 2.03.82 г., № 892–82.*
- [6] Копачевский Н.Д., Темченко Т.П., Царьков М.Ю. *Колебания системы слоев стратифицированной жидкости в цилиндрическом контейнере // Симфероп. ун-т. – Симферополь. – 1985. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 03.06.85 г., № 1203.*

- [7] Темченко Т.П. *Колебания идеальной стратифицированной многослойной жидкости в произвольном контейнере* // Симфероп. ун-т. Симферополь. – 1987. – 55 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.06.87 г., № 1614.
- [8] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести* // Дифференциальные уравнения. – 1988. – №10. – С.1784-1796.

В. О. ПОДРЫГА, А. А. СЛЕПЫШЕВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗАХВАЧЕННЫХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ ТЕЧЕНИИ

*Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследуются нелинейные эффекты при распространении захваченных топографических волн при наличии вертикально-неоднородного среднего течения. Исследуется влияние течения на дисперсионные свойства волн. Определяется среднее течение, индуцированное волной, во втором порядке малости по амплитуде волны.*

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамических процессов в придонном слое моря имеет актуальное значение в связи с освоением ресурсов моря: разведкой и добычей полезных ископаемых, строительством буровых платформ, донных транспортных магистралей и трубопроводов. Важный вклад в динамику придонного слоя вносят волновые процессы. Влияние поверхностных волн проявляется до глубин, составляющих половину длины волны, на больших глубинах преобладает влияние внутренних и топографических волн. Баротропные топографические волны, типа захваченных берегом шельфовых и волн Кельвина, достаточно хорошо изучены [1] - [3]. Исследование бароклинных топографических волн сталкивается с трудностями разделения горизонтальной и вертикальной структуры движений из-за наклона дна [4] - [7]. При малом наклоне дна возможно разделение на моды колебаний при условии учёта наклона дна в граничном условии [7], [8]. Энергия бароклинных топографических волн в коротковолновом приближении в стратифицированном море сконцентрирована у дна, т.е. волны захватываются дном [7], [8].

Нелинейные эффекты при распространении как внутренних, так и захваченных топографических волн проявляются в генерации средних течений [9] - [12]. В настоящей работе определяются средние течения, индуцируемые волной за счёт нелинейности при наличии среднего вертикально - неоднородного течения, направленного вдоль изобат. При этом исследуется влияние среднего течения на дисперсионные характеристики захваченных топографических волн.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные захваченные наклонным дном топографические волны над плоским склоном при наличии среднего течения направленного вдоль изобат. Система нелинейных уравнений гидродинамики решается асимптотическим методом многомасштабных разложений. В первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение. Во втором порядке малости по крутизне волны среднее течение, индуцируемое волной за счёт нелинейности.

Исходная система уравнений движения для волновых возмущений в приближении Буссинеска с учетом вращения Земли имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + vv_y + ww_z + U_0u_x + wU_{0z} - fv &= -\frac{P_x}{\rho_0} \\
 v_t + uv_x + vv_y + wv_z + U_0v_x + fu &= -\frac{P_y}{\rho_0} \\
 w_t + uw_x + vw_y + ww_z + U_0w_x &= -\frac{P_z}{\rho_0} - \frac{g\rho}{\rho_0} \\
 \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + U_0\rho_x + w\frac{d\rho_0}{dz} &= 0 \\
 u_x + v_y + w_z &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u, v, w$  — компоненты волновых возмущений скорости,  $\rho, P$  — волновые возмущения плотности и давления;  $\rho_0(z)$  — средняя невозмущенная плотность. Ось  $x$  направлена вдоль изобат, ось  $y$  направлена в сторону уменьшения глубины, ось  $z$  направлена вертикально вверх. Систему уравнений (1) необходимо дополнить граничными условиями "твёрдой крышки" на наклонном дне  $(\vec{u} \cdot \vec{n})|_{z=0} = 0$  и "свободной поверхности" на поверхности моря:

$$-P + g\rho_0\xi = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = w \tag{2}$$

Решение системы (1) в линейном приближении (вертикальная ось направлена вверх) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} w &= w_1(z)e^{ikx-i\sigma t} + k.c., & u &= u_1(z)e^{ikx-i\sigma t} + k.c., & v &= v_1(z)e^{ikx-i\sigma t} + k.c. \\ \rho &= \rho_1(z)e^{ikx-i\sigma t} + k.c., & P &= P_1(z)e^{ikx-i\sigma t} + k.c. \end{aligned} \quad (3)$$

где к.с.- комплексно сопряженные слагаемые,  $k$  — волновое число,  $\sigma$  — частота волны. Подставляя (3) в систему (1) получим связь амплитудных функций  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $v_1$ ,  $\rho_1$ ,  $P_1$  и уравнение для  $w_1(z)$  в линейном приближении:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{iw_{1z}}{k}, & \Omega &= \sigma - kU_0 \\ v_1 &= \frac{fw_{1z}}{k\Omega}, & \rho_1 &= \frac{iw_1 \frac{d\rho}{dz}}{-\Omega}, & \frac{P_1}{\rho_0} &= \frac{iw_{1z} \Omega^2 - f^2}{k^2 \Omega} \\ w_{1zz} - \frac{f^2 k U_{0z} w_{1z}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} + w_1 \frac{\Omega}{\Omega^2 - f^2} \left[ k^2 \frac{N^2 - \Omega^2}{\Omega} + k U_{0zz} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) следует дополнить граничными условиями, следующими из (2):

$$\begin{aligned} w_{1z} &= \frac{(gk^2 - kU_{0z}\Omega)w_1}{\Omega^2 - f^2} & \text{— при } z = H \\ \frac{f}{\Omega k} \tan \gamma w_{1z} &= w_1 & \text{— при } z = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Краевая задача (4), (5) решалась численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности для частоты Брента - Вайсяля и профиля среднего течения, показанных на рис. 1, 2.

Уклон дна на полигоне измерений в Норвежском море составлял  $3^0$ . Глубина 1700 метров. Направление изобат составляло  $60^0$  с зональным направлением. Для исследования влияния среднего течения краевая задача (4), (5) решалась так же при отсутствии течения, т. е. при  $U_0 = 0$ . График нормированных амплитуд трех компонент скорости для 28 часовых захваченных топографических волн показан на рис. 3, 4, 5.

Для определения средних течений, индуцированных волной за счет нелинейности, осредним исходные уравнения гидродинамики (1) для волновых возмущений по периоду волны, в предельном случае слабонелинейной плоской волны, когда масштаб огибающей волнового пакета существенно больше инерционного периода, получим:

$$\bar{u} = -\frac{1}{f} \frac{d\overline{u_2 u_3}}{dz} = -\frac{2}{\omega k} \frac{d}{dz} \left( w_0 \frac{dw_0}{dz} \right) |A^2| \varepsilon^2,$$



$$\bar{w}_{\text{инд}} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{v} w}{\partial z} = -\frac{1}{k\Omega} \left[ 2w_{1H} \frac{d^2 w_{1H}}{dz^2} + 2 \left( \frac{dw_{1H}}{dz} \right)^2 \right],$$

где  $w_H$  - нормированное решение краевой задачи (4), (5). Вертикальное распределение скорости индуцированного среднего течения показано на рис. 6.

Волновой горизонтальный поток массы определяется по формуле:

$$\overline{u\rho(z)} = \frac{\rho_0 N^2}{gk\Omega} (w_{1HZ} w_{1H}^* + w_{1HZ}^* w_{1H})$$

Вертикальное распределение этого потока показано на рис. 7.

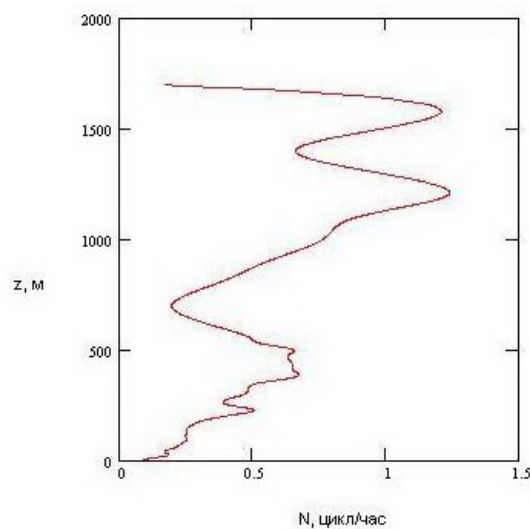


Рис. 1. Вертикальный профиль средней частоты Брента-Вайсяля.

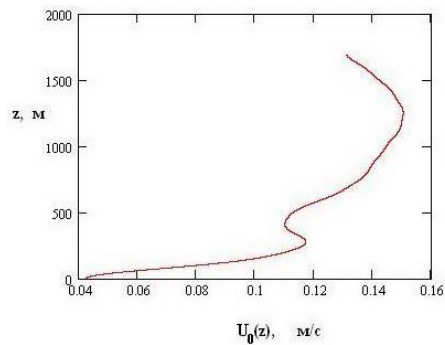


Рис. 2. Профиль скорости среднего течения, направленного вдоль изобат.

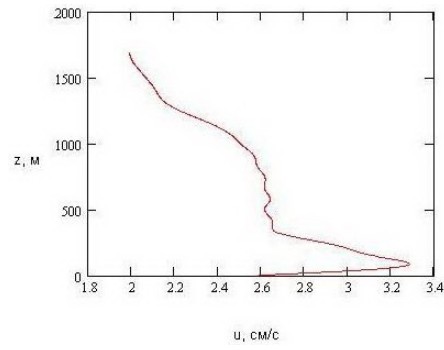


РИС. 3. Вертикальное распределение амплитуды компоненты  $u$  горизонтальной скорости.

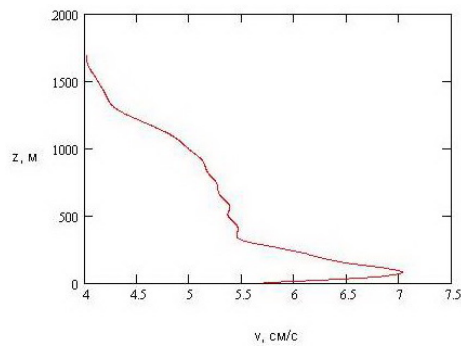


РИС. 4. Вертикальное распределение амплитуды компоненты  $v$  горизонтальной скорости.

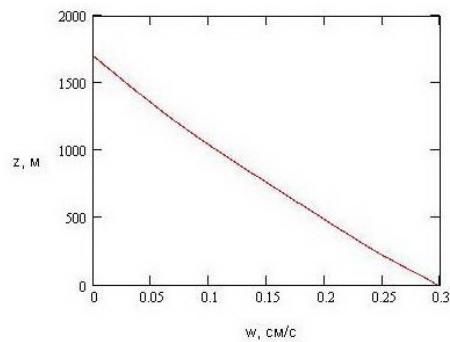


РИС. 5. Вертикальное распределение амплитуды компоненты  $w$  горизонтальной скорости.

Сравнение волновых потоков  $\overline{u\rho(z)}$  и  $\rho_0\bar{u}_{\text{инд}}$  показывает, что второй поток на 4 порядка превышает первый, т. е. индуцированное за счет нелинейности среднее

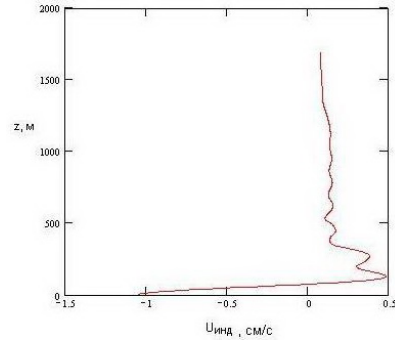


Рис. 6. Вертикальное распределение скорости индуцированного среднего течения.



Рис. 7. Вертикальное распределение волнового горизонтального потока массы.

течение вносит определяющий вклад в волновой массоперенос. С целью изучения влияния среднего течения на дисперсионные кривые захваченных топографических волн делался расчет при отсутствии течения, когда течение направлено в положительном направлении оси  $X$  (рис. 2) и для противоположно направленного течения (рис. 8). Дисперсионные кривые для всех трех случаев показаны на рис. 9. Сплошная кривая соответствует случаю отсутствия течения, синяя кривая соответствует положительному течению, направленному вдоль изобат в положительном направлении оси  $X$ , зеленая кривая - отрицательному течению.

Длина волны при фиксированном периоде на отрицательном течении меньше, чем при отсутствии течения и при наличии положительного течения. Делался расчёт скорости индуцированного за счёт нелинейности среднего течения при отсутствии течения (при  $U_0 = 0$ , рис. 10).

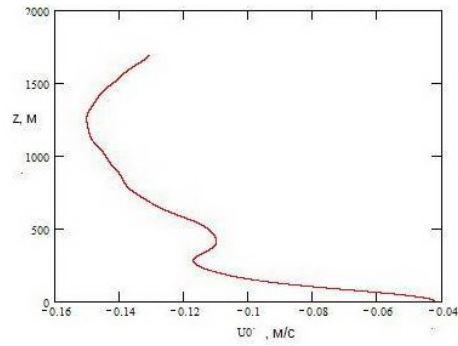


Рис. 8. Вертикальный профиль среднего отрицательного течения.

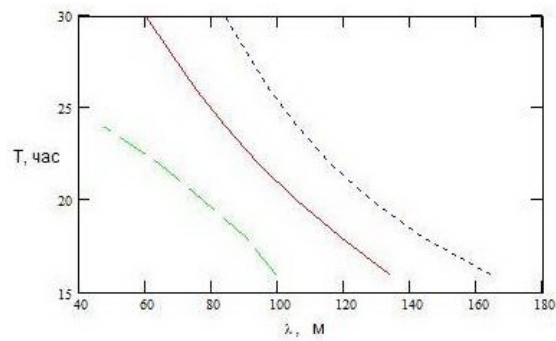


Рис. 9. Дисперсионные кривые захваченных топографических волн с течением, без течения, с отрицательным течением.

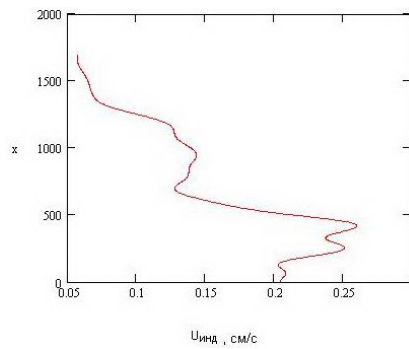


Рис. 10. Вертикальное распределение скорости индуцированного среднего течения при  $U_0 = 0$ .

Сравнение рис. 6 и рис. 10 показывает, что учёт среднего течения приводит к заметному изменению картины индуцированного за счёт нелинейности течения.

## Выводы

В работе исследовались захваченные топографические волны над наклонным дном при реальной стратификации и среднем течении, направленном вдоль изобат. Изучались дисперсионные свойства этих волн. Получена зависимость периода волны от длины волны. Показано, что фазовая скорость направлена таким образом, что более мелкая вода остается справа. Когда течение направлено в положительном направлении оси  $X$ , длина волны при фиксированном периоде больше при наличии течения, чем при его отсутствии. Длина волны при фиксированном периоде на отрицательном течении меньше, чем при отсутствии течения и при наличии положительного течения. Определены средние течения индуцированные волной за счет нелинейности. Показано, что определяющий вклад в волновой массоперенос вносит это индуцированное течение, т. к. волновой поток  $\rho_0 \bar{u}_{1\text{инд}}$  существенно превышает поток  $\overline{u\rho(z)}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Блатов А.С., Иванов В.А. *Гидрология и гидродинамика шельфовой зоны Чёрного моря.* - К.: Наукова Думка, 1992. - 237 С.
- [2] Иванов В.А., Янковский А.Е. *Длинноволновые движения в Чёрном море.* - К.: Наукова Думка, 1992. - 111 С.
- [3] Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане.* - М.: Мир, 1981. - 1 Ч. - 478 С.
- [4] Huthnance J.M. *On Trapped Waves over a Continental Shelf.* //J. Fluid Mech. - 1975. - V. 69. - P. 689-704.
- [5] Brink K.H. *A comparision of long coastal trapped waves theory with observation off Peru.* //J. Phys. Oceanogr. - 1982. - V. 12. -№ 8. - P. 897-913.
- [6] Ou H.-W. *On the propogation of free topographic Rossby waves near continental margins. Part 1 Analitical model for a wedge.* //J. Phys. Oceanogr. - 1980. - V. 10. -№ 7. - P. 1051-1060.
- [7] Rhines P. *Edge-, bottom-, and Rossby waves in a rotating stratified fluid.* //Geophys. Fluid Dyn. - 1970. - V. 1. - P. 273-302.
- [8] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика.* - М.: Мир, 1984. - Т. 2. - 811 С.
- [9] Grimshaw R. *The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion.* //Stud. In Appl. Math. - 1977. - V. 56. - P. 241-266.
- [10] Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане.* - Л.: Гидрометеиздат, 1981. - В. 49. - 217 С.

- [11] Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З. *К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости.* //Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1976. - Т. 12. -№ 3. - 293-301 С.
- [12] Слепышев А.А. *Транспортные свойства придонных топографических волн на шельфе и континентальном склоне.* //Известия РАН. Физика атмосферы и океана. - 2002. - Т. 38. -№ 6. - 841-847 С.

О. И. Рудницкий, И. А. Романенко

## АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ ПОГОРЕЛОВА ГРУПП СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКОВ ГЕССЕ

### ВВЕДЕНИЕ

В данной статье продолжается начатое в [3] изучение строения алгебр  $P^G$  многочленов Погорелова конечных унитарных групп  $G$ , порожденных отражениями, в случае, когда  $P^G$  не совпадает с алгеброй  $I^G$  инвариантов группы  $G$ . А именно, исследованы алгебры многочленов Погорелова групп симметрий многогранников Гессе.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в трехмерном унитарном пространстве  $U^3$  прямоугольную декартову систему координат с началом  $O$  и ортонормированным базисом  $\vec{e}_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ );  $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$ . В пространстве  $U^3$  существуют только четыре конечные унитарные примитивные неприводимые группы  $G$ , порожденные отражениями: группы  $W(J_3(m))$ ,  $m=4, 5$  и группы  $W(L_3)$ ,  $W(M_3)$  симметрий многогранников Гессе [4, 6].

Обозначим через  $\vec{s}$  — единичный вектор нормали одной из плоскостей, отражения  $\sigma$  относительно которых порождают группу  $G$ . Многочлены вида

$$P_{2r}^G(\vec{x}) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^{2r}, \quad r \geq 1$$

названы многочленами Погорелова для групп  $G$  [1].

В работе [1] установлено, что для групп  $G$  пространства  $U^3$  алгебра  $P^G$  многочленов Погорелова группы  $G$  совпадает с алгеброй  $I^G$  инвариантов этой группы для всех  $G \neq W(L_3)$ . При этом построены в явном виде образующие всех указанных алгебр.

**Цель** настоящей заметки — построить образующие алгебры  $P^{W(L_3)}$  многочленов Погорелова группы  $W(L_3)$ .

Доказана следующая

**Теорема.** Степени образующих алгебры  $P^{W(L_3)}$  равны 6, 12, 18.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В трехмерном унитарном пространстве существуют только два (с точностью до взаимности) правильных комплексных многогранника, отличных от обобщенного куба и взаимного ему многогранника. Это многогранники Гессе  $3(3)3(3)3$  и  $3(3)3(4)2$  [4, 5].

Правильный комплексный многогранник  $3(3)3(3)3$  имеет 27 вершин, 72 ребра и 27 граней. Каждая грань содержит 8 вершин, образующих многоугольник  $3(3)3$ . Множество вершин многогранника может быть представлено в виде объединения трех множеств, каждое из которых содержит 9 вершин, определяющих конфигурацию Гессе: расположены по три на двенадцати различных прямых таким образом, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит третью из данных девяти. Отметим, что конфигурация Гессе показывает нарушение известной теоремы Сильвестра на комплексной проективной плоскости [5].

Если перейти от трех комплексных координат пространства  $U^3$  к шести вещественным координатам пространства  $E^6$ , то вершинам многогранника  $3(3)3(3)3$  будут соответствовать 27 вершин многогранника Госсета  $2_{21}$  [5].

Многогранник  $3(3)3(4)2$  имеет 72 вершины, 216 ребер и 54 грани, каждая из которых многоугольник  $3(3)3$  (взаимный ему многогранник  $2(4)3(3)3$  имеет соответственно 54, 216 и 72 вершин, ребер и граней) [5].

В евклидовом пространстве  $E^6$  многограннику  $3(3)3(4)2$  соответствует многогранник Эльте  $1_{22}$ , а взаимному ему многограннику  $2(4)3(3)3$  — два наложенных друг на друга многогранника  $2_{21}$  [5].

Группа  $W(L_3)$  симметрий многогранника Гессе  $3(3)3(3)3$  порождается отражениями третьего порядка относительно плоскостей  $x_2 = 0$

и

$$x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (1)$$

Она содержит 24 отражения третьего порядка относительно плоскостей

$$x_i = 0, \quad x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0 \quad (i, j, k = \overline{1, 3}) \quad (2)$$

и подгруппу скалярных умножений на  $1, \omega, \omega^2$ ;  $\omega$  — первообразный корень третьей степени из единицы. Степени базисных инвариантов группы  $m_i = 6, 9, 12$  [6].



Множество  $\sigma\vec{s}$  состоит из векторов

$$\theta^t \vec{e}_i, \quad \frac{\theta^t \varepsilon}{\sqrt{3}} \left( \vec{e}_1 + \theta^{2j} \vec{e}_2 + \theta^{2k} \vec{e}_3 \right) \quad (3)$$

( $\theta$  — первообразный корень шестой степени из единицы,  $\varepsilon = \sqrt{-1}$ ,  $t = \overline{1, 6}$ ,  $i, j, k = \overline{1, 3}$ ), то есть множество  $\sigma\vec{s}$  является 6-множеством [2, 6]. Следовательно, используя многочлены Погорелова, можно построить базисные инварианты группы  $W(L_3)$  только степеней 6 и 12; форма  $P_9^{W(L_3)} \equiv 0$  [2].

Таким образом, ненулевые элементы алгебры  $P^{W(L_3)}$  суть формы степеней кратных шести и алгебра  $P^{W(L_3)} \neq I^{W(L_3)}$ .

В [1] построены все образующие алгебры  $I^{W(L_3)}$ . Это многочлены Погорелова

$$P_6^{W(L_3)} = \sum x_i^6 - 10 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3,$$

$$P_{12}^{W(L_3)} = 41 \sum x_i^{12} + 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 9240 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^3 x_k^3$$

и образующая девятой степени

$$I_9^{W(L_3)} = \delta P_6^{W(L_3)} = (x_1^3 - x_2^3) (x_1^3 - x_3^3) (x_2^3 - x_3^3),$$

где  $\delta$  — дифференциальный оператор вида

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Группа  $W(L_3)$  является подгруппой группы  $W(M_3)$  порядка 1296 симметрий многогранника Гессе 3(3)3(4)2, порожденной отражением второго порядка относительно плоскости с уравнением

$$x_2 - x_3 = 0$$

и отражениями третьего порядка относительно плоскостей с уравнениями (1). Группа  $W(M_3)$  содержит 9 отражений второго и 24 отражения третьего порядков относительно плоскостей

$$x_i - \omega^k x_j = 0 \quad (i, j, k = \overline{1, 3}, i < j)$$

и (2) соответственно. Степени базисных инвариантов  $m_i = 6, 12, 18$  [6].

Алгебра  $P^{W(M_3)} = I^{W(M_3)} \subset I^{W(L_3)}$ .

Множество  $\sigma\vec{s}$  группы  $W(M_3)$  распадается на два  $W(M_3)$  - инвариантных подмножества  $S_1$  и  $S_2$ , которые состоят из векторов

$$\pm \frac{\omega^l}{\sqrt{2}} \left( \vec{e}_i - \omega^k \vec{e}_j \right), \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}, \quad i < j$$

и векторов (3) соответственно.

Формы  $P_{2r}^{W(M_3)} = P'_{2r}{}^{W(M_3)} + P''_{2r}{}^{W(M_3)}$  [1],  
здесь  $P'_{2r}{}^{W(M_3)} = \sum_{\vec{s} \in S_1} (\vec{x}, \vec{s})^{2r}$ ,  $P''_{2r}{}^{W(M_3)} = \sum_{\vec{s} \in S_2} (\vec{x}, \vec{s})^{2r} = P_{2r}^{W(L_3)}$

и

$$\begin{aligned} P_6^{W(M_3)} &= P_6''^{W(M_3)} = \sum x_i^6 - 10 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3, \\ P_{12}'^{W(M_3)} &= \sum x_i^{12} - 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6, \\ P_{18}'^{W(M_3)} &= \sum x_i^{18} - 408 \sum x_i^{15} x_j^3 + 9282 \sum x_i^{12} x_j^6 - 24310 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^9, \\ P_{12}''^{W(M_3)} &= 41 \sum x_i^{12} + 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 9240 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^3 x_k^3, \\ P_{18}''^{W(M_3)} &= -1093 \sum x_i^{18} + 408 \sum x_i^{15} x_j^3 + 9282 \sum x_i^{12} x_j^6 + 24310 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^9 + \\ &\quad + 185640 \sum_{j < k} x_i^{12} x_j^3 x_k^3 + 2042040 \sum x_i^9 x_j^6 x_k^3 + 8576568 x_i^6 x_j^6 x_k^3. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} P_6''^{W(M_3)} &= P_6'^{W(M_3)}, \\ 3P_{12}''^{W(M_3)} &= -31P_{12}'^{W(M_3)} + 154 \left( P_6'^{W(M_3)} \right)^2, \\ 1229P_{18}''^{W(M_3)} &= -37629P_{18}'^{W(M_3)} + 600236P_{12}'^{W(M_3)} P_6'^{W(M_3)} - 1905904 \left( P_6'^{W(M_3)} \right)^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя соотношения (4), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} 8P_6^{W(M_3)} &= 17P_6^{W(L_3)}, \\ 31P_{12}^{W(M_3)} &= 37422 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^2 + 1255P_{12}^{W(L_3)}, \\ 129611P_{18}^{W(M_3)} &= 24314570280 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^3 - 1312716132P_6^{W(L_3)} P_{12}^{W(L_3)} + \\ &\quad + 94135003P_{18}^{W(L_3)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как формы  $P_{2r}^{W(M_3)}$  ( $r = 3, 6, 9$ ) — образующие алгебры  $I^{W(M_3)} = P^{W(M_3)}$  [1], то из соотношений (5) следует, что формы  $P_{2r}^{W(L_3)}$  ( $r = 3, 6, 9$ ) алгебраически независимы и порождают алгебру  $P^{W(L_3)} = P^{W(M_3)}$ .

Отметим также, что из соотношений (4) и (5) следует, что  $P^{W(M_3)} = P'^{W(M_3)} = P''^{W(M_3)} = P^{W(L_3)}$ .

С другой стороны, поскольку алгебра  $P^{W(L_3)} \subset I^{W(L_3)}$ , то любой элемент  $F_{6t} \in P^{W(L_3)}$  представим как многочлен подходящей степени от форм  $P_6^{W(L_3)}$ ,  $I_9^{W(L_3)}$ ,  $P_{12}^{W(L_3)}$ . При этом форма  $I_9^{W(L_3)}$ , очевидно, должна входить в указанное представление только в четной степени, то есть

$$F_{6t} = \varphi \left( P_6^{W(L_3)}, \left( I_9^{W(L_3)} \right)^2, P_{12}^{W(L_3)} \right).$$

Исходя из равенства

$$155P_{18}^{W(L_3)} = -51862 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^3 + 5397P_6^{W(L_3)}P_{12}^{W(L_3)} + 17497485 \left( I_9^{W(L_3)} \right)^2,$$

форма  $\left( I_9^{W(L_3)} \right)^2$  линейно выражается через форму  $P_{18}^{W(L_3)}$ . Следовательно,  $P_{18}^{W(L_3)}$  — образующая алгебры  $P^{W(L_3)}$ .

Таким образом, алгебра  $P^{W(L_3)}$  порождается многочленами степеней 6, 12 и 18, а формы  $P_6^{W(L_3)}$ ,  $P_{12}^{W(L_3)}$ ,  $P_{18}^{W(L_3)}$  — ее образующие.

Например, форма  $P_{48}^{W(L_3)}$  представима в виде

$$\begin{aligned} 645753995179940000P_{48}^{W(L_3)} = & 605779436331995884647129 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^8 - \\ & - 382446785378338716709836 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^6 P_{12}^{W(L_3)} - \\ & - 78765561823977279167400 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^5 P_{18}^{W(L_3)} + \\ & + 73241891495172814841334 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^4 \left( P_{12}^{W(L_3)} \right)^2 - \\ & - 35996743603826550226800 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^3 P_{12}^{W(L_3)} P_{18}^{W(L_3)} - \\ & - 21306047988971695049676 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^2 \left( P_{12}^{W(L_3)} \right)^3 + \\ & + 2349640868539031802000 \left( P_6^{W(L_3)} \right)^2 \left( P_{18}^{W(L_3)} \right)^2 + \\ & + 2297426136630282239400 P_6^{W(L_3)} \left( P_{12}^{W(L_3)} \right)^2 P_{18}^{W(L_3)} + \\ & + 535292134384678481049 \left( P_{12}^{W(L_3)} \right)^4 + \\ & + 91442351521343488000 P_{12}^{W(L_3)} \left( P_{18}^{W(L_3)} \right)^2. \end{aligned}$$

Отметим также, что, исходя из соотношений (4), (5), в качестве образующих алгебры  $P^{W(L_3)}$  могут быть взяты формы

$$P_6^{W(L_3)} = \sum x_i^6 - 10 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3,$$

$$P'_{12}{}^{W(M_3)} = \sum x_i^{12} - 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6,$$

$$P'_{18}{}^{W(M_3)} = \sum x_i^{18} - 408 \sum x_i^{15} x_j^3 + 9282 \sum x_i^{12} x_j^6 - 24310 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^9,$$

**Теорема доказана.**

#### Вывод

В работе продолжено исследование строения алгебр многочленов Погорелова конечных унитарных групп  $G$ , порожденных отражениями. Получено полное решение указанной задачи для групп  $G$  трехмерного унитарного пространства.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рудницкий О.И. *Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве*. – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Минск: БГУ, 1990. - 11 с.
- [2] Рудницкий О.И. *Об одном классе многочленов Погорелова*. – Математическая физика, анализ, геометрия. - 1996. - Т.3, N1/2. - с. 142 – 145.
- [3] Рудницкий О.И., Романенко И.А. *О специальных инвариантах тетраэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. - 2006. - Т.19(58), N1. - с. 29 – 37.
- [4] Cohen A.M. *Finite complex reflection groups* // Ann. scient. Ec. Norm. Sup. - 1976. - 4. - P. 379 – 436.
- [5] Shephard G.C. *Regular complex polytopes* // Proc. London Math. Soc. - 1952. - 3. - P. 82 – 97.
- [6] Shephard G.C., Todd J.A. *Finite unitary reflection groups* // Can. J. Math. - 1954. - 6, N2. - P. 274 – 304.

Ф. С. Стонякин

## СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ КОМПАКТНОГО СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЗУЕМЫЕ ЛВП

*В данной работе достаточные условия компактной субдифференцируемости вещественных функций в терминах производных чисел обобщены на отображения в отделимые локально выпуклые пространства (ЛВП), предложен секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в пространства Фреше. Установлена невозможность распространения классической теоремы Данжсуа о контингентности на отображения в бесконечномерные локально выпуклые пространства.*

### ВВЕДЕНИЕ

Многие важные для анализа функции не имеют производной в обычном смысле всюду, но обладают существенными дифференциальными свойствами, как, например, выпуклые функции. Для таких функций в качестве аналога производной часто используется субдифференциал, являющийся базовым понятием выпуклого анализа и широко применяемый в современной математике ([1] — [7]).

Наличие множества существенных свойств субдифференциалов выпуклых функций привело к различным аналогам и обобщениям этого понятия на невыпуклый случай. Наиболее удачным считается субдифференциал Кларка [8]. Ряд других известных понятий рассмотрен в [4] и [9] — [16]. Обзор работ по субдифференциалам имеется, например, в [17] — [19]. В [20] (см. также [21] — [25]) было введено новое в нелинейном анализе понятие компактного субдифференциала для отображений в локально выпуклые пространства (ЛВП), исследованы его свойства и получен ряд обобщённых формул конечных приращений, а также теорем о среднем. В настоящей работе удобные условия компактной субдифференцируемости и представление компактного субдифференциала вещественных функций в терминах производных

чисел, полученные ранее в [22], обобщаются на отображения в метризуемые ЛВП на базе секвенциального подхода к компактному субдифференциалу. На основе полученных результатов устанавливается невозможность распространения теоремы Данжуа о контингенции [26] на отображения в бесконечномерные ЛВП.

### 1. КОМПАКТНЫЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЛВП

Пусть  $U(0)$  — замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в ЛВП  $E$ .

**Определение 1.** Пусть  $\{B_\delta\}_{\delta>0}$  — убывающая по вложениям при  $\delta \rightarrow +0$  система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП  $E$ ,  $B \subset E$ . Будем говорить, что множество  $B$  есть  $K$ -предел системы  $\{B_\delta\}_{\delta>0}$  при  $\delta \rightarrow +0$ :

$$B = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} B_\delta ,$$

если:

- (i)  $\bigcap_{\delta>0} B_\delta = B$  ;
- (ii)  $\forall U = U(0) \subset E \exists \delta = \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$  ;
- (iii)  $B$  — компактное множество в  $E$  .

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что  $K$ -предел обладает свойством линейности. Из пункта (ii) определения 1 вытекает замкнутость и выпуклость множества  $B$ .

Далее  $I \subset \mathbb{R}$  — некоторый отрезок,  $E$  — ЛВП,  $F : I \rightarrow E$ .

**Определение 2.** Пусть  $x \in I$ ,  $\delta > 0$ . Частный  $K$ -субдифференциал отображения  $F$  в точке  $x_0$ , отвечающий данному  $\delta > 0$ , есть замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\} .$$

Аналогично вводятся правый и левый частные  $K$ -субдифференциалы.

$$\partial_K^+ F(x_0, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \mid 0 < h < \delta \right\} ;$$

$$\partial_K^- F(x_0, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \mid -\delta < h < 0 \right\} .$$

**Определение 3.** Назовём отображение  $F : I \rightarrow E$  компактно субдифференцируемым или  $K$ -субдифференцируемым в точке  $x_0 \in I$ , если существует  $K$ -предел частных  $K$ -субдифференциалов

$$\partial_K F(x_0) = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} \partial_K F(x_0, \delta) .$$

Полученное множество  $\partial_K F(x_0)$  назовём *компактным субдифференциалом*, или  *$K$ -субдифференциалом* отображения  $F$  в точке  $x_0$ . Аналогично вводятся *правый и левый  $K$ -субдифференциалы*:

$$\partial_K^+ F(x_0) = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} \partial_K^+ F(x_0, \delta); \quad \partial_K^- F(x_0) = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} \partial_K^- F(x_0, \delta).$$

Если отображение  $F$  дифференцируемо в точке  $x_0$  в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причём  $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$ . В то же время, как отмечено в [22], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

## 2. СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ $K$ -СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА.

Напомним хорошо известное секвенциальное определение производной для вещественных функций.

**Определение 4.** Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если для произвольной сходящейся к  $x_0$  последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ , последовательность  $\left\{ \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \right\}_{k=1}^\infty$  сходится к некоторому числу  $f'(x_0)$ , не зависящему от выбора  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ . Это число  $f'(x_0)$  называется производной функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Аналогичное определение (см. [22]) можно дать и для компактных субдифференциалов вещественных функций.

**Определение 5.** Функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  назовём  *$K$ -субдифференцируемой* в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , если существуют конечные нижняя и верхняя производные в этой точке:

$$\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{и} \quad \beta = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Множество  $\partial_K f(x_0) = [\alpha; \beta]$  назовём  *$K$ -субдифференциалом* функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Обобщим этот подход на отображения  $F$  отрезка вещественной оси в ЛВП. Обозначим через  $\varphi_F(x_0, h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$  и  $D_{F(x_0)}$  множество всех частичных пределов отношения  $\varphi_F(x_0, h)$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $h \neq 0$ .

Мы покажем, что для метризуемых ЛВП  $\partial_K F(x_0) = \overline{\text{con}} D_{F(x_0)}$  и установим достаточные условия компактной субдифференцируемости отображений в отдельные ЛВП в терминах частичных пределов последовательностей  $\varphi_F(x_0, h_k)$  при  $h_k \rightarrow 0$ . Начнём с очевидного утверждения.

**Лемма 1.** *Имеет место включение:*

$$\overline{\text{con}} D_{F(x_0)} \subset \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta).$$

**Лемма 2.** Если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, то

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 : (0 < |\delta| < \delta_U) \Rightarrow (\varphi_F(x_0, \delta) \in D_{F(x_0)} + U(0)) .$$

**Доказательство.** Допустим, что это не так. Тогда существует последовательность  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$  и

$$\varphi_F(x_0, h_k) \notin D_{F(x_0)} + U(0) \quad (1)$$

для некоторой окрестности  $U(0) \subset E$ . В силу условия леммы, можно выбрать подпоследовательность  $\{h_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{h_k\}_{k=1}^\infty$  так, чтобы существовал предел

$$x^0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi_F(x_0, h_{k_\ell}) .$$

Ясно, что  $x^0 \in D_{F(x_0)}$ . Поэтому  $\exists \ell_0 \forall \ell \geq \ell_0 :$

$$\varphi_F(x_0, h_{k_\ell}) \notin D_{F(x_0)} + U(0) ,$$

что противоречит (1).

**Лемма 3.** Если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, то

$$\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} \supset \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta) . \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta)$ . Тогда  $x \in \partial_K F(x_0, \delta) \forall \delta > 0$ . Покажем, что  $\forall U(0) \subset E :$

$$x \in \text{conv} D_{F(x_0)} + U(0) . \quad (3)$$

Для этого выберем  $U'(0) \subset E : U' + U' \subset U$  и  $\delta_{U'} > 0$  такие, что

$$(0 < |\delta| < \delta_{U'}) \Rightarrow \varphi_F(x_0, \delta) \in \text{conv} D_{F(x_0)} + U'(0) .$$

Заметим, что  $x \in \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta)$ . Поэтому  $x = x_k$ , где  $x_k \in \partial_K F(x_0, \delta_k)$ ,  $\delta_k \rightarrow 0$ .

Для произвольного  $k \in \mathbb{N}$  выберем  $x_{\delta_k} \in \text{conv} \{\varphi_F(x_0, h) \mid 0 < |h| < \delta_k\}$  так, чтобы  $x_{\delta_k} \in x_k + U'(0)$ . Это возможно в силу того, что  $\overline{B} \subset B + U'(0) \forall U(0) \subset E$ . При этом

$$x_{\delta_k} = \sum_{m=1}^n \alpha_m \varphi_F(x_0, \delta_m), \text{ где } |\delta_m| \leq \delta < \delta_{U'} \quad \forall m = \overline{1, n} ; \sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$$

( $\alpha_m \geq 0 \quad \forall m = \overline{1, n}$ ). Имеем:

$$x \in \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0, \delta_m) + U'(0) \subset \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot (\text{conv} D_{F(x_0)} + U'(0)) + U'(0) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \text{conv} D_{F(x_0)} + \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot U'(0) + U'(0) = \text{conv} D_{F(x_0)} + U'(0) + U'(0) \subset \\
 &\quad \subset \text{conv} D_{F(x_0)} + U(0) .
 \end{aligned}$$

Итак, (3) доказано, откуда и вытекает утверждение леммы.

Напомним, что множество  $K_s \subset E$  секвенциально компактно, если любая последовательность элементов этого множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке  $K_s$ . Множество в метрическом пространстве секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно компактно.

**Теорема 1.** Пусть  $E$  — метризуемое ЛВП. Если  $F : [a; b] \rightarrow E$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, принадлежащая  $\partial_K F(x_0)$ .

**Доказательство.** В соответствии с определением  $K$ -субдифференциала,

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial_K F(x_0, \delta) \subset \partial_K F(x_0) + U(0)) .$$

Обозначим через  $\{U_k(0)\}_{k=1}^\infty$  счётную базу абсолютно выпуклых окрестностей нуля в метризуемом ЛВП  $E$  и для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$   $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0\right)$  подберём  $k_0 \in \mathbb{N}$  так, что  $\forall k \geq k_0$  :

$$\varphi_F(x_0, h_k) \in \partial_K F(x_0) + \frac{U_k(0)}{2} .$$

При этом существует последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \partial_K F(x_0)$  такая, что

$$\varphi_F(x_0, h_k) \in x_k + \frac{U_k(0)}{2} . \quad (4)$$

В силу компактности, а значит, и секвенциальной компактности,  $\partial_K F(x_0)$  существует подпоследовательность  $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{x_k\}_{k=1}^\infty$  такая, что  $\exists x^0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell}$ , то есть  $\exists \ell_0 : \forall \ell \geq \ell_0$

$$x_{k_\ell} \in x^0 + \frac{U_\ell(0)}{2} . \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает, что

$$\varphi_F(x_0, h_{k_\ell}) \in x_{k_\ell} + \frac{U_\ell(0)}{2} \subset x^0 + \frac{U_\ell(0)}{2} + \frac{U_k(0)}{2} \subset x^0 + U_k(0) \quad \forall \ell \geq \ell_0 ,$$

откуда имеем

$$x^0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi_F(x_0, h_{k_\ell}) ,$$

что означает доказательство существования искомой предельной точки. Поскольку  $\partial_K F(x_0)$  замкнуто, то  $x^0 \in \partial_K F(x_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $E$  — метризуемое ЛВП. Если отображение  $F : [a; b] \rightarrow E$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то

$$\partial_K F(x_0) = \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} .$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1, множество  $D_{F(x_0)}$  непусто и, поэтому, в силу леммы 1 и определения компактного субдифференциала имеем:

$$\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} \subset \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta) = \partial_K F(x_0) . \quad (6)$$

Обратное включение (2) следует из леммы 3, а из (2) — (6) вытекает утверждение теоремы.

**Лемма 4.** Пусть  $E$  — метризуемое ЛВП. Если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, то множество  $D_{F(x_0)}$  секвенциально компактно.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , где  $x_n \in D_{F(x_0)}$ . Обозначим через  $\{U_k(0)\}_{k=1}^\infty$  фундаментальную систему абсолютно выпуклых окрестностей нуля пространства  $E$ . Выберем последовательность  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  так, чтобы:

$$(i) |h_k| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (ii) \varphi_F(x_0, h_k) \in x_k + U_k(0) .$$

В силу условий леммы, существует такая подпоследовательность  $\{h_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$  выбранной последовательности  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ , что  $\exists x^0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi_F(x_0, h_{k_\ell})$ , причём  $x^0 \in D_{F(x_0)}$ . Из (ii) вытекает, что  $x^0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell}$ . Следовательно, множество  $D_{F(x_0)}$  секвенциально компактно.

Напомним, что в конечномерных пространствах выпуклая оболочка компактно-го множества — компакт [4]. Поэтому, если  $\dim E < \infty$ , то, в условиях леммы 4  $\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} = \text{conv} D_{F(x_0)}$  и справедливо

**Следствие 1.** Если пространство  $E$  конечномерно и отображение  $F$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0$ , то

$$\partial_K F(x_0) = \text{conv} D_{F(x_0)} . \quad (7)$$

Напомним также, что  $a \in K$  — крайняя точка множества  $K \subset E$ , если из того, что  $a = \alpha k_1 + (1 - \alpha)k_2$  для некоторых  $k_1, k_2 \in K$  и  $0 < \alpha < 1$  вытекает  $k_1 = k_2 = a$ . Из теоремы 1, леммы 4, а также известного предложения о крайних точках ([27], с. 477, лемма 5) вытекает

**Следствие 2.** Пусть  $E$  — метризуемое ЛВП. Если отображение  $F : [a; b] \rightarrow E$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0$ , то множество  $Q_{F(x_0)}$  крайних точек  $\partial_K F(x_0)$  является подмножеством  $D_{F(x_0)}$ .

**Замечание 1.** Равенство  $Q_{F(x_0)} = D_{F(x_0)}$  может как выполняться, так и не выполняться.

**Пример 1.** Пусть  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ . Здесь  $D_{f(0)} = Q_{f(0)} = \{-1; 1\}$ .

**Пример 2.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Здесь  $D_{f(0)} = [-1; 1]$ ;  $Q_{f(0)} = \{-1; 1\}$ , т.е.  $Q_{f(0)} \subsetneq D_{f(0)}$ .

**Замечание 2.** Отметим, что, в силу определения 5, для функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  равенство  $Q_{f(x_0)} = D_{f(x_0)}$  выполняется тогда и только тогда, когда существуют конечные односторонние производные  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ .

**Теорема 3.** Если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^\infty$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, и множество  $\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  является компактным, то отображение  $F$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0$  и верно (7).

**Доказательство.** В силу лемм 1 и 3 имеем:

$$\bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta) = \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial_K F(x_0, \delta) \subset \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} + U(0)).$$

Для этого подберём  $U'(0)$  так, чтобы  $U'(0) + U'(0) \subset U(0)$ . Согласно лемме 2,  $\exists \delta_{U'} > 0 : (0 < |\delta| < \delta_{U'}) \Rightarrow \varphi_F(x_0, \delta) \in D_{F(x_0)} + U'(0)$ . Положим  $\delta_{U'} := \delta_U$  и  $\delta < \delta_U$ .

1) Пусть  $y \in \text{conv}\{\varphi_F(x_0, \Delta x) \mid 0 < |\Delta x| \leq \delta\}$ . Тогда  $y = \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0, \delta_m)$ ,

где  $|\delta_m| \leq \delta < \delta_U$ ,  $\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$ ,  $(\alpha_m \geq 0 \quad (\forall m = \overline{1, n}))$ . Согласно лемме 2 и в силу выпуклости  $U'(0)$  имеем:

$$y = \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0, \delta_m) \in \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} + \sum_{m=1}^n \alpha_m \cdot U'(0) \subset \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} + U'(0)$$

при  $0 < |\delta| < \delta_U$ .

2) Пусть теперь  $y \in \partial(\partial_K F(x_0, \delta))$ . Тогда  $\exists y' \in \text{conv}\{\varphi_F(x_0, \Delta x) \mid 0 < |\Delta x| < \delta\}$  :  $y \in y' + U'(0)$ . В силу п.1 можно выбрать  $\bar{y}' \in \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  так, что  $y' \in \bar{y}' + U'(0)$ , откуда

$$y \in y' + U'(0) \subset \bar{y}' + U'(0) + U'(0) \subset \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} + U(0) .$$

Итак,  $\forall \delta > 0$  :  $(0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow \partial_K F(x_0, \delta) \subset \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)} + U(0)$  .

Из пунктов 1 и 2 следует, что  $\exists K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_K F(x_0, \delta) = \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  . Из компактности множества  $\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  вытекает, что отображение  $F$   $K$ -субдифференцируемо в точке  $x_0$ . Равенство (7) вытекает из (8).

Напомним, что метризуемое ЛВП  $E$  называется *пространством Фреше*, если оно полно.

Заметим, что в случае полного ЛВП  $E$  в силу известной теоремы М. Г. Крейна [28] замкнутая выпуклая оболочка любого компактного множества сама компактна. Учитывая это обстоятельство, из теоремы 3 и леммы 4 получаем следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть  $E$  — пространство Фреше. Если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^{\infty}$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка, то отображение  $F$  компактно субдифференцируемо в точке  $x_0$ .

**Замечание 3.** Теоремы 2 и 4 определяют необходимое и достаточное условие  $K$ -субдифференцируемости отображений в пространства Фреше.

Для пространств  $E$ , не являющихся пространствами Фреше, теорема 4, вообще говоря, неверна.

**Пример 3.** Пусть  $E$  — пространство всех ограниченных функций  $x : [0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих конечное число точек разрыва, с нормой  $\|x\| = \sup_{t \in [0; 1)} |x(t)|$ .  $E$  — неполное нормированное пространство.

Пусть  $I_R(\cdot)$  — характеристическая функция множества  $R$ . Определим отображение  $F : (-1; 1) \rightarrow E$  следующим образом:  $F(t) := tI_{[0; \sin \sigma(t)]}(t)$ , где  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \pi n((n+1)|t| - 1), & \text{если } |t| \in \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right); \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Ясно, что при  $t \neq 0$   $\varphi_F(0, t) = I_{[0; \sin \sigma(t)]}(t)$ . Функция  $\sigma$  отображает каждое из множеств  $\left\{t : |t| \in \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right)\right\}$  на сегмент  $[0; 1]$ .

Поэтому  $D_{F(0)} = \{I_{[0; s]}(t)\}_{s \in [0; 1]}$  — компакт в  $E$ . Однако множество  $\overline{\text{conv}} D_{F(0)}$  уже компактным в  $E$  не является. Действительно, рассмотрим последовательность  $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$  функций из  $\overline{\text{conv}} D_{F(0)} \subseteq E$ :

$$f_N(t) := \sum_{n=1}^N 2^{-n} I_{[0; 1-2^{-n})}(t) + 2^{-N} I_{[0; 1]}(t);$$

или, после преобразования,

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^N 2^{1-n} I_{[1-2^{1-n}; 1-2^{-n})}(t) + 2^{-N} I_{[1-2^{-N}; 1]}(t).$$

Легко видеть, что последовательность функций  $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$  сходится по  $\text{sup}$ -норме к функции  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} I_{[1-2^{1-n}; 1-2^{-n})}(t)$ . Однако функция  $f(t)$  имеет уже не конечное, а счётное множество точек разрыва и не принадлежит пространству  $E$ .

Итак, для компактного субдифференциала отображений в пространства Фреше на базе секвенциального подхода можно ввести следующее определение.

**Определение 6.** Отображение  $F$  назовём *компактно субдифференцируемым* или  *$K$ -субдифференцируемым* в точке  $x_0$ , если для произвольной последовательности  $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^{\infty}$  при  $h_k \rightarrow 0$  существует предельная точка. Множество  $\partial_K F(x_0) = \overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  назовём *компактным субдифференциалом* или  *$K$ -субдифференциалом* отображения  $F$  в точке  $x_0$ .

Если же пространство  $E$  конечномерно, то множество в определении 6  $\overline{\text{conv}} D_{F(x_0)}$  можно заменить на  $\text{conv} D_{F(x_0)}$  (см. следствие 1).

### 3. О НЕВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕНОСА ТЕОРЕМА ДАНЖУА О КОНТИНГЕНЦИИ НА ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛВП.

Будем рассматривать отображения отрезка вещественной оси в отделимые ЛВП. Если  $E$  конечномерно, то из теоремы Данжуа о контингенции [26] следует, что всякое компактно субдифференцируемое отображение почти всюду дифференцируемо. Воспользовавшись рассмотренным в предыдущем пункте достаточным условием  $K$ -субдифференцируемости (теорема 3), построим пример, показывающий невозможность, вообще говоря, построения аналога теоремы Данжуа о контингенции для бесконечномерных пространств. Мы отправляемся от [29], где приведён пример нигде не дифференцируемого липшицевого отображения отрезка вещественной оси в банахово пространство.

Пусть  $S = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . Рассмотрим пространство  $E$  всех вещественных функций  $\xi = \xi(\theta)$ , заданных на  $S$ , с семейством полунорм  $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})}$ , определяющим топологию поточечной сходимости. Определим на  $S$  отображение  $x(s) = \xi_s(\cdot)$ , принимающее значения из пространства  $E$ :

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} \frac{s}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s \leq \theta < \frac{2}{3}; \\ \frac{s-1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leq s < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Зафиксируем некоторые  $s \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$  и  $\theta \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . Выбрав  $\Delta s > 0$  так, чтобы в случае  $s \neq \theta$  точки  $s - \Delta s, s, s + \Delta s$  лежали на числовой прямой по одну сторону от  $\theta$ , рассмотрим функции  $\frac{x(s+\Delta s) - x(s)}{\Delta s}(\theta)$  и  $\frac{x(s-\Delta s) - x(s)}{-\Delta s}(\theta)$ :

$$\frac{x(s + \Delta s) - x(s)}{\Delta s}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s < s + \Delta s \leq \theta < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leq s < s + \Delta s < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\frac{x(s - \Delta s) - x(s)}{-\Delta s}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s - \Delta s < s \leq \theta < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leq s - \Delta s < s < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Это означает, что  $\forall t \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ :

$$\left\| \frac{x(s + \Delta s) - x(s)}{\Delta s} - y_1(s) \right\|_t \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta s \rightarrow +0,$$

$$\text{где } y_1(s) = \xi_s^1(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s < \theta < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leq s < \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\left\| \frac{x(s - \Delta s) - x(s)}{-\Delta s} - y_2(s) \right\|_t \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta s \rightarrow +0,$$

$$\text{где } y_2(s) = \xi_s^2(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s \leq \theta < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta < s < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

В силу теоремы 3,  $\forall s \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \exists \partial_K x(s) = [\xi_s^1(\cdot); \xi_s^2(\cdot)]$ . При этом  $y_1(s) \neq y_2(s) \forall s \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . Следовательно, отображение  $x(s)$  всюду компактно субдифференцируемо на интервале  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$  и при этом нигде на нём не дифференцируемо. Более того,  $x(s)$  везде дифференцируемо и справа, и слева, но нигде не дифференцируемо, что невозможно при  $\dim E < \infty$  в силу теоремы Данжуа.

Заметим, что всюду компактно субдифференцируемые отображения могут нигде не иметь даже односторонних производных.

**Пример 4.** Пусть  $x : S \rightarrow E$ , где  $x(s) = \xi_s(\cdot)$ ,

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} (s - \theta) \cdot \sin \frac{1}{s-\theta}, & \text{если } \theta \neq s; \\ 0, & \text{если } \theta = s. \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными вышеуказанным, устанавливается, что

$$\partial_K x(s) = \partial_K^\pm x(s) \{y_\alpha(s)\}_{\alpha \in [-1; 1]} \quad \forall s \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \text{где}$$

$$y_\alpha(s) = \xi_s^\alpha(\theta) = \begin{cases} \sin \frac{1}{s-\theta} - \frac{1}{s-\theta} \cdot \cos \frac{1}{s-\theta}, & \text{если } \theta \neq s; \\ \alpha, & \text{если } \theta = s. \end{cases}$$

Неодноточечность правых и левых  $K$ -субдифференциалов  $\partial_K^+ x(s)$  и  $\partial_K^- x(s)$  указывает на то, что отображение  $x$  нигде на  $S$  не является дифференцируемым ни справа, ни слева.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Субдифференциалы: теория и приложения. — Новосибирск: Наука, 1992.— 270 с.
- [2] *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360 с.

- [3] *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1969. — 212 с.
- [4] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1971. — 320 с.
- [5] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 472 с.
- [6] *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их применение. — К.: Наукова думка, 1979. — 200 с.
- [7] *Михалевич М.В., Сергееко И.В.* Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. — К.: Наукова думка, 2005. — 670 с.
- [8] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
- [9] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 432 с.
- [10] *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 384 с.
- [11] *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
- [12] *Демьянов В.Ф.* Обобщение понятия производной в негладком анализе. // Соросовский образовательный журнал. — 1996. — №5 — С. 121–127.
- [13] *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
- [14] *Girejko E., Piccoli B.* On some concepts of generalized differentials//Set-valued analysis. — 2007. — V. 15 — P. 163 – 183.
- [15] *Michel P., Penot J.P.* Calculs sous-differential pour les fonctions lipschitzienness et non-lipschitzienness//C.R. Acad. Sc. Paris. Ser I. — 1984 — V. 298. — P. 269 – 272.
- [16] *Sussmann H.J.* Warga derivative containers an other generalized differentials// Proceedings of the 41stIEEE 2002 Conference on Decision and Control, Las Vegas, Newada, December 10-13, 2002, Vol. 1 (IEEE Publications, New York 2002) — P. 1101 – 1106.
- [17] *Демьянов В.Ф., Рощина В.А.* Обобщённые субдифференциалы и экзостеры// Владикавказский математический журнал. — 2006. — Т.8 — № 4. — С. 19 – 31.
- [18] *Детуанов V.F.* The rise of nonsmooth analysis: its main tools// Кибернетика и системный анализ. — 2002 — Вып. 4 — С. 63 – 85.
- [19] *Borwein J.M., Zhu Q.J.* A survey of subdifferential calculus with applications// Nonlinear Analysis Ser. A: Theory and methods. — 1999. — V. 38, № 6. — P. 687 – 773.
- [20] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* К-субдифференциалы и К-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства// Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220 – 221.
- [21] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты// Современная математика. Фундаментальные направления — Объём 18с. — В печати.



- [22] *Стонякин Ф.С.* Компактный субдифференциал вещественных функций // Динамические системы — Симферополь: ТНУ, 2007. — Вып. 23 — С. 99 — 112.
- [23] *Стонякин Ф.С.* Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна. // Компьютерная математика, — 2008. — 2. — С. 50 — 56.
- [24] *Orlov I.V., Stonyakin F.S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral. // Methods of Functional Analysis and Topology, — 2009. — Vol. 15. — № 1. — P. 74 — 90.
- [25] *Стонякин Ф.С.* Теорема о среднем для компактных субдифференциалов вещественных функций // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник материалов международной научной конференции. — Харьков: ХНУ, 2007 — С. 100 — 103.
- [26] *Брудно А.Л.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1971. — 119 с.
- [27] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Часть 1: Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.
- [28] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М: Мир, 1969. — 1072 с.
- [29] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

У данній роботі достатні умови компактної субдиференційовності дійсних функцій у термінах похідних чисел узагальнено на відображення у віддільні локально опуклі простори (ЛОП), запропоновано секвенціальний підхід до поняття компактного субдиференціалу для відображень у простори Фреше. Встановлено неможливість поширення класичної теореми Данжуа про контингенцію на відображення у нескінченновимірні локально опуклі простори.

In this paper the sufficient conditions of compact subdifferentiability for real-valued functions in terms of derivative numbers are generalized for mappings into separable locally convex spaces (LCS), the sequential approach to the notion of the compact subdifferential for mappings into Frechet spaces is proposed. It is stated that the classical Denjoy theorem on contingency cannot be extended to infinite-dimensional locally convex spaces.

Д. Л. Тышкевич

## О ПОЛЯРНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

### ВВЕДЕНИЕ

**О чём здесь речь.** В данной заметке мы приводим конструкцию знака и модуля для ограниченного самосопряжённого оператора определённого вида.

Как известно, при исследовании характеристических функций, узлов, моделей и т. п. для линейных операторов, приходится иметь дело с различного вида дефектными операторами, и полярное разложение всегда является "рабочей лошадкой" в подобных исследованиях — оно служит основой для построения дефектных операторов того или иного вида (см., например, [1], [3] — [5]).

Полярное разложение для самосопряжённых операторов специального вида в задачах модельного анализа может возникать, на наш взгляд, в следующих двух ситуациях: либо 1) исследуется конкретная задача из приложений (теоретического или прикладного характера), либо 2) строятся иллюстрации и (контр)примеры. Идея конструкций приводимых ниже, как раз и возникла в связи со вторым случаем (при этом не исключена и представляет интерес возможность применения изложенного ниже результата и для первого случая).

**Соглашения и обозначения.** Всюду далее в статье через  $\mathfrak{H}$  обозначено гильбертово пространство, а слово "оператор" всегда будет означать "всюду определённый линейный ограниченный оператор" (в  $\mathfrak{H}$  или его подпространстве). Если  $\mathfrak{S}$  — подпространство  $\mathfrak{H}$ , то через  $P_{\mathfrak{S}}$  будет обозначаться ортопроектор на  $\mathfrak{S}$ , а через  $I_{\mathfrak{S}}$  — единичный оператор в  $\mathfrak{S}$ . Под натуральными мы понимаем здесь целые числа, начиная с единицы (а не с нуля); обозначение множества натуральных чисел стандартное —  $\mathbb{N}$ .

О ПОЛЯРНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРА

Напомним, что *полярным разложением* оператора  $T$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  называется представление  $T$  в виде произведения  $T = V_T|T|$ , где  $|T| = (T^*T)^{1/2}$  — модуль оператора  $T$ , а  $V_T$  — максимальная частичная изометрия с ядром

$$\ker V_T = \ker |T| \quad (1)$$

и образом (финальным подпространством)

$$\mathbf{R}(V_T) = \overline{\mathbf{R}(T)}. \quad (2)$$

Для модуля оператора хорошо известны следующие свойства

$$\ker |T| = \ker T, \quad \overline{\mathbf{R}(T^*)} = \overline{\mathbf{R}(|T|)} \quad (3)$$

(получающиеся друг из друга переходом к ортогодopolнению). Таким образом, начальное подпространство  $V_T$  есть  $(\ker V_T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T^*)}$ . Указанными свойствами данная частичная изометрия определяется единственным образом. При этом

$$V_T^*V_T = P_{\overline{\mathbf{R}(T^*)}}; \quad (4)$$

$$V_TV_T^* = P_{\overline{\mathbf{R}(T)}}; \quad (5)$$

$$V_T^*T = |T|. \quad (6)$$

(См., например, [2]). Далее нам будет необходимо следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Для любого оператора  $T$   $V_T^* = V_{T^*}$ .*

**Доказательство.** Хорошо известно сплетающее свойство для модуля:

$$T|T| = |T^*|T \quad (7)$$

(индукцией доказывается равенство  $T(T^*T)^n = (TT^*)^nT$  для любого натурального  $n$ , отсюда  $Tr(T^*T) = p(TT^*)T$  для любого полинома  $p$ ; затем используется тот факт, что квадратный корень из неотрицательного оператора есть сильный предел некоторой последовательности полиномов от этого оператора, и наконец используется секвенциальная непрерывность произведения операторов в сильной топологии). Далее, имеем следующую цепочку:

$$V_{T^*}|T^*|^2V_{T^*}^* = (V_{T^*}|T^*|)(V_{T^*}|T^*|)^* = T^*T^{**} = |T|^2,$$

откуда согласно (6) получим равенство  $V_{T^*}^*|T|^2 = |T^*|^2V_{T^*}^*$ . Из последнего равенства и сплетающего свойства (7) получим цепочку

$$V_{T^*}^*|T|^2 = |T^*|^2V_{T^*}^* = |T^*|(V_{T^*}|T^*|)^* = |T^*|T^{**} = |T^*|T = T|T|,$$

которая равносильно равенству  $V_{T^*}^*|T| = T|R(|T|)$ . Последнее равенство вместе с тривиальным равенством  $V_{T^*}^*|T| = T|\ker|T|| (= 0_{\ker|T|})$  обеспечивают равенство  $V_{T^*}^*|T| = T$ . Завершает доказательство цепочка

$$\ker V_{T^*}^* = R(V_{T^*})^\perp \stackrel{(2)}{=} R(T^*)^\perp = \ker T \stackrel{(3)}{=} \ker |T|. \quad \square$$

И, наконец, отметим, что если  $T$  — самосопряжённый оператор, то  $V_T$  также является самосопряжённым, при этом  $V_T = \operatorname{sgn}(T)$  (следовательно,  $V_T$  коммутирует с  $T$ ). В таком случае  $V_T$  иногда называют *знаком* оператора  $T$ . В некоторых конструкциях полезно иметь полярное разложение самосопряжённого оператора, в котором в роли знака всегда будет выступать самосопряжённая симметрия. Её, в частности, можно определить как

$$S_T := V_T | \overline{R(T)} \oplus I_{\ker T}.$$

Тогда по-прежнему  $T = S_T|T| (= |T|S_T)$ , при этом  $V_T = S_T P_{R(T)} (= P_{R(T)} S_T)$ . Самосопряжённую симметрию  $S_T$  (т.е.  $S_T^2 = I_{\mathfrak{H}}$ ) можно назвать *строгим знаком* оператора  $T$ .

**Замечание 4.** Нетрудно видеть (вооружась спектральной теоремой и функциональным исчислением), что если считать спектральную функцию самосопряжённого оператора  $T$  непрерывной слева, то в этом случае  $S_T = \operatorname{sign}(T)$ , если под  $\operatorname{sign}$  понимать функцию  $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ .

#### ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим вначале вспомогательные результаты. Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \tag{8}$$

— некоторое разложение  $\mathfrak{H}$ ;  $B$  — некоторый оператор, действующий из  $\mathfrak{H}_2$  в  $\mathfrak{H}_1$ ,  $C$  — самосопряжённый оператор в  $\mathfrak{H}$ , причём справедливо равенство

$$BC = 0. \tag{9}$$

**Лемма 1.** Для описанных выше операторов  $B$  и  $C$  справедливы соотношения:

$$P_{\ker B}|C| = |C|; \quad (10)$$

$$V_B|C| = 0; \quad (11)$$

$$S_C P_{\ker B} = P_{\ker B} S_C; \quad (12)$$

$$\ker (|B| + |C|) = \ker B \cap \ker C; \quad (13)$$

$$(B^*B + C^2)^{1/2} = |B| + |C|. \quad (14)$$

**Доказательство.** Равенства (10), (11). Равенство (9) равносильно включению  $R(C) \subseteq \ker B$ , откуда согласно (3)

$$R(|C|) \subseteq \overline{R(|C|)} = \overline{R(C)} \subseteq \ker B; \quad (15)$$

(10) следует из (15) непосредственно, а (11) — применением (3) к определению (1).

Равенство (12). Из (15) элементарно следуют равенства  $P_{\ker B}C = C$ ,  $CP_{\overline{R(B)}} = 0$ , откуда

$$P_{\ker B}C = C = CP_{\ker B} + CP_{\overline{R(B)}} = CP_{\ker B}.$$

Равенство, образованное крайними операторами последней цепочки, влечёт согласно замечанию 4 равенство (12) (применением спектральной теоремы и функционального исчисления для оператора  $C$ ).

Равенство (13). Включение  $\ker B \cap \ker C \subseteq \ker (|B| + |C|)$  очевидно в силу (3). Докажем обратное включение. Используем равенство  $|B||C| = 0$ , которое получается из (9) домножением слева на  $V_B^*$ , а справа — на  $S_C$  (с использованием (6) и перестановочности  $S_C$  с  $|C|$ ). Пусть  $|B|h + |C|h = 0$ . Действуя на это равенство оператором  $|B|$ , получим равенство  $|B|^2x = 0$ , откуда в свою очередь (и в силу (3)) следуют равенство  $Bh = 0$ , а за ним — и равенство  $Ch = 0$ . Обратное включение доказано.

Равенство (14). Из (9) применением индукции легко получаются равенства  $(B^*B + C^2)^n = (B^*B)^n + C^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Эти равенства влекут равенства  $p(B^*B + C^2) = p(B^*B) + p(C^2)$  для любого полинома  $p$ , откуда стандартными рассуждениями (см. комментарий в скобках сразу после (7)) и получим равенство (14).  $\square$

Рассмотрим теперь самосопряжённый оператор  $T$ , представленный относительно разложения (8) матрицей

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где в дополнение к (9) выполняется ещё и равенство

$$AB = 0. \quad (17)$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для самосопряжённого оператора  $T$  вида (16), (17), (9) справедливы равенства*

$$|T| = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}, \quad S_T = \begin{bmatrix} S_A P_{\ker B^*} & V_B \\ V_B^* & S_C P_{\ker B} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Сразу отметим следующий факт. Из равенства (17) и предложения 1 следует выполнимость всех равенств (10) – (14) леммы 1 относительно замены

$$\mathfrak{H}_1 \Leftrightarrow \mathfrak{H}_2, \quad B \rightarrow B^*, \quad C \rightarrow A. \quad (19)$$

1-ое равенство в (18). Из (16), (17) и (9) непосредственно следует равенство

$$T^2 = \begin{bmatrix} BB^* + A^2 & 0 \\ 0 & B^*B + C^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, используя равенство (14) и двойственное к нему относительно (19), получим цепочку:

$$|T| = (T^2)^{1/2} = \begin{bmatrix} (BB^* + A^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & (B^*B + C^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}.$$

2-ое равенство в (18). Пусть  $S$  — самосопряжённая операторная матрица с компонентами  $S_{ij}$  ( $i, j \in \overline{1, 2}$ ,  $S_{21} = S_{12}^*$ ) относительно разложения (8). Тогда непосредственным образом проверяется следующее утверждение:  $S$  является строгим знаком оператора  $T$  тогда и только тогда, когда выполняются три группы соотношений:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & S_{11}(|B^*| + |A|) = A, & \text{(V)} & S_{11}^2 + S_{12}S_{12}^* = I_{\mathfrak{H}_1}, \\ \text{(II)} & S_{12}(|B| + |C|) = B, & \text{(VI)} & S_{22}^2 + S_{12}^*S_{12} = I_{\mathfrak{H}_2}, \\ \text{(III)} & S_{12}^*(|B^*| + |A|) = B^*, & \text{(VII)} & S_{11}S_{12} + S_{12}S_{22} = 0. \\ \text{(IV)} & S_{22}(|B| + |C|) = C, & & \end{array}$$

$$\forall h_1 \in \ker B^* \cap \ker A \quad \forall h_2 \in \ker B \cap \ker C$$

$$\text{(VIII)} \quad S_{11}h_1 + S_{12}h_2 = h_1$$

$$\text{(IX)} \quad S_{12}^*h_1 + S_{22}h_2 = h_2$$

(первая группа отвечает равенству  $S|T| = T$ , вторая — равенству  $S^2 = I_{\mathfrak{H}}$ , третья — равенству  $S = I | \ker |T|$ ). Заметим лишь, что область выполнимости для (VIII), (IX) продиктована следующим соображением:

$$\ker |T| = \ker \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix} \stackrel{(13), (19)}{=} (\ker B^* \cap \ker A) \oplus (\ker B \cap \ker C).$$

Далее заметим, что соотношения (IV), (II), (VI), (IX) переходят в (I), (III), (V), (VIII) соответственно при замене (19) плюс

$$h_1 \leftrightarrow h_2, \quad S_{22} \rightarrow S_{11}, \quad S_{12} \rightarrow S_{12}^*. \quad (20)$$

Возьмём теперь в качестве  $S$  матрицу правой части 2-го равенства в (18). Тогда в силу предложения 1 осуществим<sup>1</sup> переход в (20) для компонент  $S$ . Всё это означает, что для доказательства равенства  $S = S_T$  достаточно доказать лишь соотношения (II), (IV), (VI), (VII), (IX) из (I) — (IX). В этом случае:

$$(II): \quad S_{12}(|B| + |C|) = V_B|B| + V_B|C| \stackrel{(11)}{=} B;$$

$$(IV): \quad S_{22}(|B| + |C|) = S_C P_{\ker B} |B| + S_C P_{\ker B} |C| \stackrel{(3), (10)}{=} S_C P_{\ker |B|} |B| + S_C |C| = |C|;$$

$$(VI): \quad S_{22}^2 + S_{12}^* S_{12} \stackrel{(12)}{=} S_C^2 P_{\ker B}^2 + V_B^* V_B \stackrel{(4)}{=} P_{\ker B} + P_{\overline{R(B^*)}} = I_{\mathfrak{H}_2};$$

$$(VII): \quad S_{11} S_{12} + S_{12} S_{22} = S_A P_{\ker B^*} V_B + V_B S_C P_{\ker B} \stackrel{(2), (12)}{=} V_B P_{\ker B} S_C \stackrel{(1), (3)}{=} 0.$$

И, наконец, докажем оставшееся соотношение (IX). Пусть  $h_1 \in \ker B^* \cap \ker A$  и  $h_2 \in \ker B \cap \ker C$  — произвольные вектора. С одной стороны, имеем:

$$V_B^* h_1 \stackrel{\text{предл. 1}}{=} V_{B^*} h_1 \in V_{B^*} \ker B^* \stackrel{(1), (3)}{=} \{0\};$$

с другой стороны:

$$P_{\ker B} h_2 = h_2 \quad (h_2 \text{ лежит в } \ker B), \quad S_C h_2 = h_2 \quad (h_2 \text{ лежит в } \ker C).$$

Поэтому

$$S_{12}^* h_1 + S_{22} h_2 = V_B^* h_1 + S_C P_{\ker B} h_2 = h_2. \quad \square$$

<sup>1</sup>Страдательное причастие краткой формы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, получены (теорема 1) матрицы строгого знака и модуля для линейного ограниченного самосопряжённого оператора, который может быть представлен относительно некоторого разложения исходного пространства  $2 \times 2$ -матрицей с "независимыми" операторами главной и побочной диагонали (условия (9), (17)).

Заметим, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве, где само пространство изоморфно своим подпространствам (равной размерности) равенство вида  $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$  не ограничивает в свойствах (сохраняющихся в той или иной мере относительно перехода к унитарно эквивалентным операторам и ортогонального проектирования на равноразмерные подпространства) сами операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ : действительно, если в разложении  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$  размерности пространств  $\mathfrak{H}_1$  и  $\mathfrak{H}_2$  равны размерности  $\mathfrak{H}$ , то любой оператор из  $\mathfrak{H}$  имеет своего унитарно эквивалентного "двойника" в  $\mathfrak{H}_1$  и в  $\mathfrak{H}_2$ ; пара же  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  может быть тривиально построена как 
$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}.$$

И, наконец, заметим, что теорема 1 позволяет легко находить полярное разложение и для (несамосопряжённых) операторов вида  $K = UT$ , где  $T$  — оператор вида (16), (17), (9), а  $U$  — частичная изометрия, содержащая  $R(T)$  в своём начальном подпространстве. Как легко проверить, в этом случае  $|K| = |T|$ ,  $V_K = UV_T$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davis Ch. *J-unitary dilation of a general operator* // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1970. — Vol. 31. — P. 75–86
- [2] Халмош П. Р. *Гильбертово пространство в задачах*. — М.: Мир, 1970. — 351 с.
- [3] McEnnis B. W. *Characteristic functions and dilations of noncontractions* // J. Operator Theory. — 1980. — Vol. 3. — P. 71–87
- [4] McEnnis B. W. *Models for operators with bounded characteristic function* // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1981. — Vol. 43. — P. 71–90
- [5] Kuzhel A. *Characteristic functions and models of nonselfadjoint operators*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. — 254 p.



## СОДЕРЖАНИЕ

О.П. Бойко	
<b>О спектрах колебаний стильтесовских струн с одномерным демпфированием</b> .....	3
В. И. Войтицкий, М. А. Имрякова, Н. Д. Копачевский, А. И. Лившиц, А. В. Насонкина	
<b>Три спектральные гидродинамические задачи о собственных колебаниях системы идеальных жидкостей...</b> .....	11
В. О. Подрыга, А. А. Слепышев	
<b>Нелинейные эффекты при распространении захваченных топографических волн...</b> .....	24
О. И. Рудницкий, И. А. Романенко	
<b>Алгебры многочленов Погорелова групп симметрий многогранников Гессе</b> .....	33
Ф. С. Стонякин	
<b>Секвенциальный подход к понятию <math>K</math>-субдифференциала в метризуемых ЛВП</b> .....	39
Д. Л. Тышкевич	
<b>О полярном разложении одного класса операторов</b> .....	52

## СОДЕРЖАНИЕ