Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 21(60) № 1 (2008), с. 52–58.

Д. Л. Тышкевич

О ПОЛЯРНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Введение

О чём здесь речь. В данной заметке мы приводим конструкцию знака и модуля для ограниченного самосопряжённого оператора определённого вида.

Как известно, при исследовании характеристических функций, узлов, моделей и т. п. для линейных операторов, приходится иметь дело с различного вида дефектными операторами, и полярное разложение всегда является "рабочей лошадкой" в подобных исследованиях — оно служит основой для построения дефектных операторов того или иного вида (см., например, [1], [3] — [5]).

Полярное разложение для самосопряжённых операторов специального вида в задачах модельного анализа может возникать, на наш взгляд, в следующих двух ситуациях: либо 1) исследуется конкретная задача из приложений (теоретического или прикладного характера), либо 2) строятся иллюстрации и (контр)примеры. Идея конструкций приводимых ниже, как раз и возникла в связи со вторым случаем (при этом не исключена и представляет интерес возможность применения изложенного ниже результата и для первого случая).

Соглашения и обозначения. Всюду далее в статье через $\mathfrak{H}$ обозначено гильбертово пространство, а слово "оператор" всегда будет означать "всюду определённый линейный ограниченный оператор" (в $\mathfrak{H}$ или его подпространстве). Если $\mathfrak{S}$ — подпространство $\mathfrak{H}$, то через $P_{\mathfrak{S}}$ будет обозначаться ортопроектор на $\mathfrak{S}$, а через $I_{\mathfrak{S}}$ — единичный оператор в $\mathfrak{S}$. Под натуральными мы понимаем здесь целые числа, начиная с единицы (а не с нуля); обозначение множества натуральных чисел стандартное — $\mathbb{N}$.

О полярном разложении оператора

Напомним, что *полярным разложением* оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется представление T в виде произведения $T = V_T|T|$, где $|T| = (T^*T)^{1/2}$ — модуль оператора T, а V_T — максимальная частичная изометрия с ядром

$$\ker V_T = \ker |T| \tag{1}$$

и образом (финальным подпространством)

$$\mathrm{R}(V_T) = \overline{\mathrm{R}(T)}. \tag{2}$$

Для модуля оператора хорошо известны следующие свойства

$$\ker |T| = \ker T, \qquad \overline{\mathrm{R}(T^*)} = \overline{\mathrm{R}(|T|)} \tag{3}$$

(получающиеся друг из друга переходом к ортодополнению). Таким образом, начальное подпространство V_T есть $(\ker V_T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}$. Указанными свойствами данная частичная изометрия определяется единственным образом. При этом

$$V_T^* V_T = P_{\overline{\mathrm{R}(T^*)}}; \tag{4}$$

$$V_T V_T^* = P_{\overline{\mathrm{R}(T)}}; \tag{5}$$

$$V_T^* T = |T|. \tag{6}$$

(См., например, [2]). Далее нам будет необходимо следующее утверждение.

Предложение 1. *Для любого оператора T $\quad V_T^* = V_{T^*}$.*

Доказательство. Хорошо известно сплетающее свойство для модуля:

$$T|T| = |T^*|T \tag{7}$$

(индукцией доказывается равенство $T(T^*T)^n = (TT^*)^n T$ для любого натурального n, отсюда $Tp(T^*T) = p(TT^*)T$ для любого полинома p; затем используется тот факт, что квадратный корень из неотрицательного оператора есть сильный предел некоторой последовательности полиномов от этого оператора, и наконец используется секвенциальная непрерывность произведения операторов в сильной топологии). Далее, имеем следующую цепочку:

$$V_{T^*}|T^*|^2 V_{T^*}^* = (V_{T^*}|T^*|)(V_{T^*}|T^*|)^* = T^*T^{**} = |T|^2,$$

откуда согласно (6) получим равенство $V_{T^*}^*|T|^2 = |T^*|^2 V_{T^*}^*$. Из последнего равенства и сплетающего свойства (7) получим цепочку

$$V_{T^*}^*|T|^2 = |T^*|^2 V_{T^*}^* = |T^*|(V_{T^*}|T^*|)^* = |T^*|T^{**} = |T^*|T = T|T|,$$

которая равносильно равенству $V_{T^*}^*|T| = T \,|\, \mathrm{R}(|T|)$. Последнее равенство вместе с тривиальным равенством $V_{T^*}^*|T| = T \,|\, \ker|T|\,(= 0_{\ker|T|})$ обеспечивают равенство $V_{T^*}^*|T| = T$. Завершает доказательство цепочка

$$\ker V_{T^*}^* = \mathrm{R}(V_{T^*})^{\perp} \overset{(2)}{=} \mathrm{R}(T^*)^{\perp} = \ker T \overset{(3)}{=} \ker|T|\,. \qquad \square$$

И, наконец, отметим, что если T — самосопряжённый оператор, то V_T также является самосопряжённым, при этом $V_T = \mathrm{sgn}(T)$ (следовательно, V_T коммутирует с T). В таком случае V_T иногда называют *знаком* оператора T. В некоторых конструкциях полезно иметь полярное разложение самосопряжённого оператора, в котором в роли знака всегда будет выступать самосопряжённая симметрия. Её, в частности, можно определить как

$$S_T := V_T \,|\, \overline{\mathrm{R}(T)} \oplus I_{\ker T}\,.$$

Тогда по–прежнему $T = S_T|T|\,(= |T|S_T)$, при этом $V_T = S_T P_{\mathrm{R}(T)}\,(= P_{\mathrm{R}(T)} S_T)$. Самосопряжённую симметрию S_T (т.е. $S_T^2 = I_{\mathfrak{H}}$) можно назвать *строгим знаком* оператора T.

Замечание 4. Нетрудно видеть (вооружась спектральной теоремой и функциональным исчислением), что если считать спектральную функцию самосопряжённого оператора T непрерывной слева, то в этом случае $S_T = \mathrm{sign}(T)$, если под sign понимать функцию $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

Формулировка и доказательство основного результата

Рассмотрим вначале вспомогательные результаты. Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \tag{8}$$

— некоторое разложение $\mathfrak{H}$; B — некоторый оператор, действующий из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, C — самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, причём справедливо равенство

$$BC = 0. \tag{9}$$

Лемма 1. *Для описанных выше операторов B и C справедливы соотношения:*

$$P_{\ker B}|C| = |C|\,; \tag{10}$$

$$V_B|C| = 0\,; \tag{11}$$

$$S_C P_{\ker B} = P_{\ker B}\, S_C\,; \tag{12}$$

$$\ker\big(|B| + |C|\big) = \ker B \cap \ker C\,; \tag{13}$$

$$(B^*B + C^2)^{1/2} = |B| + |C|\,. \tag{14}$$

Доказательство. *Равенства* (10), (11). Равенство (9) равносильно включению $\mathrm{R}(C) \subseteq \ker B$, откуда согласно (3)

$$\mathrm{R}(|C|) \subseteq \overline{\mathrm{R}(|C|)} = \overline{\mathrm{R}(C)} \subseteq \ker B\,; \tag{15}$$

(10) следует из (15) непосредственно, а (11) — применением (3) к определению (1).

Равенство (12). Из (15) элементарно следуют равенства $P_{\ker B}C = C$, $CP_{\overline{\mathrm{R}(B)}} = 0$, откуда

$$P_{\ker B}C = C = CP_{\ker B} + CP_{\overline{\mathrm{R}(B)}} = CP_{\ker B}\,.$$

Равенство, образованное крайними операторами последней цепочки, влечёт согласно замечанию 4 равенство (12) (применением спектральной теоремы и функционального исчисления для оператора C).

Равенство (13). Включение $\ker B \cap \ker C \subseteq \ker\big(|B| + |C|\big)$ очевидно в силу (3). Докажем обратное включение. Используем равенство $|B||C| = 0$, которое получается из (9) домножением слева на V_B^*, а справа — на S_C (с использованием (6) и перестановочности S_C с $|C|$). Пусть $|B|h + |C|h = 0$. Действуя на это равенство оператором $|B|$, получим равенство $|B|^2x = 0$, откуда в свою очередь (и в силу (3)) следуют равенство $Bh = 0$, а за ним — и равенство $Ch = 0$. Обратное включение доказано.

Равенство (14). Из (9) применением индукции легко получаются равенства $(B^*B+C^2)^n = (B^*B)^n+C^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Эти равенства влекут равенства $p(B^*B+C^2) = p(B^*B) + p(C^2)$ для любого полинома p, откуда стандартными рассуждениями (см. комментарий в скобках сразу после (7)) и получим равенство (14). □

Рассмотрим теперь самосопряжённый оператор T, представленный относительно разложения (8) матрицей

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где в дополнение к (9) выполняется ещё и равенство

$$AB = 0. \tag{17}$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Для самосопряжённого оператора T вида* (16), (17), (9) *справедливы равенства*

$$|T| = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}, \qquad S_T = \begin{bmatrix} S_A P_{\ker B^*} & V_B \\ V_B^* & S_C P_{\ker B} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство. Сразу отметим следующий факт. Из равенства (17) и предложения 1 следует выполнимость всех равенств (10) — (14) леммы 1 относительно замены

$$\mathfrak{H}_1 \leftrightarrows \mathfrak{H}_2, \quad B \to B^*, \quad C \to A\,. \tag{19}$$

1–ое равенство в (18). Из (16), (17) и (9) непосредственно следует равенство

$$T^2 = \begin{bmatrix} BB^* + A^2 & 0 \\ 0 & B^*B + C^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, используя равенство (14) и двойственное к нему относительно (19), получим цепочку:

$$|T| = (T^2)^{1/2} = \begin{bmatrix} (BB^* + A^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & (B^*B + C^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}.$$

2–ое равенство в (18). Пусть S — самосопряжённая операторная матрица с компонентами S_{ij} $(i, j \in \overline{1,2},\ S_{21} = S_{12}^*)$ относительно разложения (8). Тогда непосредственным образом проверяется следующее утверждение: S является строгим знаком оператора T тогда и только тогда, когда выполняются три группы соотношений:

(I)	$S_{11}\big(\lvert B^*\rvert + \lvert A\rvert\big) = A,$	(V)	$S_{11}^2 + S_{12}S_{12}^* = I_{\mathfrak{H}_1},$
(II)	$S_{12}\big(\lvert B\rvert + \lvert C\rvert\big) = B,$	(VI)	$S_{22}^2 + S_{12}^*S_{12} = I_{\mathfrak{H}_2},$
(III)	$S_{12}^*\big(\lvert B^*\rvert + \lvert A\rvert\big) = B^*,$	(VII)	$S_{11}S_{12} + S_{12}S_{22} = 0\,.$
(IV)	$S_{22}\big(\lvert B\rvert + \lvert C\rvert\big) = C,$		

$$\forall\, h_1 \in \ker B^* \cap \ker A \quad \forall\, h_2 \in \ker B \cap \ker C$$

(VIII) $\quad S_{11}h_1 + S_{12}h_2 = h_1$

(IX) $\quad S_{12}^*h_1 + S_{22}h_2 = h_2$

(первая группа отвечает равенству $S|T| = T$, вторая — равенству $S^2 = I_{\mathfrak{H}}$, третья — равенству $S = I \mid \ker|T|$). Заметим лишь, что область выполнимости для `(VIII)`, `(IX)` продиктована следующим соображением:

$$\ker|T| = \ker \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix} \overset{(13),\,(19)}{=} \big(\ker B^* \cap \ker A\big) \oplus \big(\ker B \cap \ker C\big)\,.$$

Далее заметим, что соотношения `(IV)`, `(II)`, `(VI)`, `(IX)` переходят в `(I)`, `(III)`, `(V)`, `(VIII)` соответственно при замене (19) плюс

$$h_1 \leftrightarrows h_2, \quad S_{22} \to S_{11}, \quad S_{12} \to S_{12}^*. \tag{20}$$

Возьмём теперь в качестве S матрицу правой части 2–го равенства в (18). Тогда в силу предложения 1 осуществим[1] переход в (20) для компонент S. Всё это означает, что для доказательства равенства $S = S_T$ достаточно доказать лишь соотношения `(II)`, `(IV)`, `(VI)`, `(VII)`, `(IX)` из `(I)` — `(IX)`. В этом случае:

`(II)`: $S_{12}\big(|B| + |C|\big) = V_B|B| + V_B|C| \overset{(11)}{=} B\,;$

`(IV)`: $S_{22}\big(|B| + |C|\big) = S_C P_{\ker B}|B| + S_C P_{\ker B}|C| \overset{(3),\,(10)}{=} S_C P_{\ker|B|}|B| + S_C|C| = |C|\,;$

`(VI)`: $S_{22}^2 + S_{12}^* S_{12} \overset{(12)}{=} S_C^2 P_{\ker B}^2 + V_B^* V_B \overset{(4)}{=} P_{\ker B} + P_{\overline{\mathrm{R}(B^*)}} = I_{\mathfrak{H}_2}\,;$

`(VII)`: $S_{11}S_{12} + S_{12}S_{22} = S_A P_{\ker B^*} V_B + V_B S_C P_{\ker B} \overset{(2),\,(12)}{=} V_B P_{\ker B} S_C \overset{(1),\,(3)}{=} 0\,.$

И, наконец, докажем оставшееся соотношение `(IX)`. Пусть $h_1 \in \ker B^* \cap \ker A$ и $h_2 \in \ker B \cap \ker C$ — произвольные вектора. С одной стороны, имеем:

$$V_B^* h_1 \overset{\text{предл. } 1}{=} V_{B^*} h_1 \in V_{B^*} \ker B^* \overset{(1),\,(3)}{=} \{0\};$$

с другой стороны:

$$P_{\ker B} h_2 = h_2 \ (h_2 \textit{ лежит в } \ker B), \quad S_C h_2 = h_2 \ (h_2 \textit{ лежит в } \ker C)\,.$$

Поэтому

$$S_{12}^* h_1 + S_{22} h_2 = V_B^* h_1 + S_C P_{\ker B} h_2 = h_2\,. \qquad \square$$

---

[1] *Страдательное причастие краткой формы.*

Заключение

Итак, получены (теорема 1) матрицы строгого знака и модуля для линейного ограниченного самосопряжённого оператора, который может быть представлен относительно некоторого разложения исходного пространства 2×2–матрицей с "невзаимодействующими" операторами главной и побочной диагонали $\big($условия (9), (17)$\big)$.

Заметим, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве, где само пространство изоморфно своим подпространствам (равной размерности) равенство вида $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$ не ограничивает в свойствах (сохраняющихся в той или иной мере относительно перехода к унитарно эквивалентным операторам и ортогонального проектирования на равноразмерные подпространства) сами операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: действительно, если в разложении $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ размерности пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ равны размерности $\mathfrak{H}$, то любой оператор из $\mathfrak{H}$ имеет своего унитарно эквивалентного "двойника" в $\mathfrak{H}_1$ и в $\mathfrak{H}_2$; пара же $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ может быть тривиально построена как $\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}$.

И, наконец, заметим, что теорема 1 позволяет легко находить полярное разложение и для (несамосопряжённых) операторов вида $K = UT$, где T — оператор вида (16), (17), (9), а U — частичная изометрия, содержащая $\mathrm{R}(T)$ в своём начальном подпространстве. Как легко проверить, в этом случае $|K| = |T|, V_K = UV_T$.

Список литературы

[1] Davis Ch. *J–unitary dilation of a general operator* // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1970. — Vol. 31. — P. 75–86

[2] Халмош П. Р. *Гильбертово пространство в задачах.* — М.: Мир, 1970. — 351 с.

[3] McEnnis B. W. *Characteristic functions and dilations of noncontractions* // J. Operator Theory. — 1980. — Vol. 3. — P. 71–87

[4] McEnnis B. W. *Models for operators with bounded characteristic function* // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1981. — Vol. 43. — P. 71–90

[5] Kuzhel A. *Characteristic functions and models of nonselfadjoint operators.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. — 254 p.