Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 21(60) № 1 (2008), с. 33–38.

О. И. Рудницкий, И. А. Романенко

АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ ПОГОРЕЛОВА ГРУПП СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКОВ ГЕССЕ

Введение

В данной статье продолжается начатое в [3] изучение строения алгебр P^G многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями, в случае, когда P^G не совпадает с алгеброй I^G инвариантов группы G. А именно, исследованы алгебры многочленов Погорелова групп симметрий многогранников Гессе.

Постановка задачи

Введем в трехмерном унитарном пространстве U^3 прямоугольную декартову систему координат с началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$; $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$. В пространстве U^3 существуют только четыре конечные унитарные примитивные неприводимые группы G, порожденные отражениями: группы $W(J_3(m))$, m=4, 5 и группы $W(L_3)$, $W(M_3)$ симметрий многогранников Гессе [4, 6].

Обозначим через $\vec{s}$ — единичный вектор нормали одной из плоскостей, отражения σ относительно которых порождают группу G. Многочлены вида

$$P_{2r}^G(\vec{x}) = \sum_{\sigma\in G} (\vec{x}, \sigma\vec{s})^{2r}, \quad r \geq 1$$

названы многочленами Погорелова для групп G [1].

В работе [1] установлено, что для групп G пространства U^3 алгебра P^G многочленов Погорелова группы G совпадает с алгеброй I^G инвариантов этой группы для всех $G \neq W(L_3)$. При этом построены в явном виде образующие всех указанных алгебр.

Цель настоящей заметки — построить образующие алгебры $P^{W(L_3)}$ многочленов Погорелова группы $W(L_3)$.

Доказана следующая

Теорема. Степени образующих алгебры $P^{W(L_3)}$ равны 6, 12, 18.

Доказательство теоремы

В трехмерном унитарном пространстве существуют только два (с точностью до взаимности) правильных комплексных многогранника, отличных от обобщенного куба и взаимного ему многогранника. Это многогранники Гессе 3(3)3(3)3 и 3(3)3(4)2 [4, 5].

Правильный комплексный многогранник 3(3)3(3)3 имеет 27 вершин, 72 ребра и 27 граней. Каждая грань содержит 8 вершин, образующих многоугольник 3(3)3. Множество вершин многогранника может быть представлено в виде объединения трех множеств, каждое из которых содержит 9 вершин, определяющих конфигурацию Гессе: расположены по три на двенадцати различных прямых таким образом, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит третью из данных девяти. Отметим, что конфигурация Гессе показывает нарушение известной теоремы Сильвестра на комплексной проективной плоскости [5].

Если перейти от трех комплексных координат пространства U^3 к шести вещественным координатам пространства E^6, то вершинам многогранника 3(3)3(3)3 будут соответствовать 27 вершин многогранника Госсета 2_{21} [5].

Многогранник 3(3)3(4)2 имеет 72 вершины, 216 ребер и 54 грани, каждая из которых многоугольник 3(3)3 (взаимный ему многогранник 2(4)3(3)3 имеет соответственно 54, 216 и 72 вершин, ребер и граней) [5].

В евклидовом пространстве E^6 многограннику 3(3)3(4)2 соответствует многогранник Эльте 1_{22}, а взаимному ему многограннику 2(4)3(3)3 — два наложенных друг на друга многогранника 2_{21} [5].

Группа $W(L_3)$ симметрий многогранника Гессе 3(3)3(3)3 порождается отражениями третьего порядка относительно плоскостей $x_2 = 0$
и

$$x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{1}$$

Она содержит 24 отражения третьего порядка относительно плоскостей

$$x_i = 0, \quad x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0 \quad \left(i,\, j,\, k = \overline{1,3}\right) \tag{2}$$

и подгруппу скалярных умножений на 1, ω, ω^2; ω — первообразный корень третьей степени из единицы. Степени базисных инвариантов группы $m_i = 6,\ 9,\ 12$ [6].

Множество $\sigma\vec{s}$ состоит из векторов

$$\theta^t \vec{e}_i, \quad \frac{\theta^t \varepsilon}{\sqrt{3}} \left(\vec{e}_1 + \theta^{2j} \vec{e}_2 + \theta^{2k} \vec{e}_3 \right) \tag{3}$$

(θ — первообразный корень шестой степени из единицы, $\varepsilon = \sqrt{-1}$, $t = \overline{1,6}$, $i, j, k =$

$= \overline{1,3}$), то есть множество $\sigma\vec{s}$ является 6-множеством [2, 6]. Следовательно, используя многочлены Погорелова, можно построить базисные инварианты группы $W(L_3)$ только степеней 6 и 12; форма $P_9^{W(L_3)} \equiv 0$ [2].

Таким образом, ненулевые элементы алгебры $P^{W(L_3)}$ суть формы степеней кратных шести и алгебра $P^{W(L_3)} \neq I^{W(L_3)}$.

В [1] построены все образующие алгебры $I^{W(L_3)}$. Это многочлены Погорелова

$$P_6^{W(L_3)} = \sum x_i^6 - 10 \sum_{i<j} x_i^3 x_j^3,$$

$$P_{12}^{W(L_3)} = 41 \sum x_i^{12} + 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 9240 \sum_{j<k} x_i^6 x_j^3 x_k^3$$

и образующая девятой степени

$$I_9^{W(L_3)} = \delta P_6^{W(L_3)} = \left(x_1^3 - x_2^3\right)\left(x_1^3 - x_3^3\right)\left(x_2^3 - x_3^3\right),$$

где δ — дифференциальный оператор вида

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Группа $W(L_3)$ является подгруппой группы $W(M_3)$ порядка 1296 симметрий многогранника Гессе 3(3)3(4)2, порожденной отражением второго порядка относительно плоскости с уравнением

$$x_2 - x_3 = 0$$

и отражениями третьего порядка относительно плоскостей с уравнениями (1). Группа $W(M_3)$ содержит 9 отражений второго и 24 отражения третьего порядков относительно плоскостей

$$x_i - \omega^k x_j = 0 \quad \left(i,\ j,\ k = \overline{1,3},\ \ i < j\right)$$

и (2) соответственно. Степени базисных инвариантов $m_i = 6,\ 12,\ 18$ [6].

Алгебра $P^{W(M_3)} = I^{W(M_3)} \subset I^{W(L_3)}$.

Множество $\sigma\vec{s}$ группы $W(M_3)$ распадается на два $W(M_3)$ - инвариантных подмножества S_1 и S_2, которые состоят из векторов

$$\pm\frac{\omega^l}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_i-\omega^k\vec{e}_j\right),\quad i,\ j,\ k,\ l=\overline{1,3},\quad i<j$$

и векторов (3) соответственно.

Формы $P_{2r}^{W(M_3)}={P'_{2r}}^{W(M_3)}+{P''_{2r}}^{W(M_3)}$ [1],
здесь ${P'_{2r}}^{W(M_3)}=\sum\limits_{\vec{s}\in S_1}(\vec{x},\vec{s})^{2r},\quad {P''_{2r}}^{W(M_3)}=\sum\limits_{\vec{s}\in S_2}(\vec{x},\vec{s})^{2r}=P_{2r}^{W(L_3)}$
и

$$\begin{aligned}
{P'_6}^{W(M_3)}&={P''_6}^{W(M_3)}=\sum x_i^6-10\sum_{i<j}x_i^3x_j^3,\\
{P'_{12}}^{W(M_3)}&=\sum x_i^{12}-110\sum x_i^9x_j^3+462\sum_{i<j}x_i^6x_j^6,\\
{P'_{18}}^{W(M_3)}&=\sum x_i^{18}-408\sum x_i^{15}x_j^3+9282\sum x_i^{12}x_j^6-24310\sum_{i<j}x_i^9x_j^9,\\
{P''_{12}}^{W(M_3)}&=41\sum x_i^{12}+110\sum x_i^9x_j^3+462\sum_{i<j}x_i^6x_j^6+9240\sum_{j<k}x_i^6x_j^3x_k^3,\\
{P''_{18}}^{W(M_3)}&=-1093\sum x_i^{18}+408\sum x_i^{15}x_j^3+9282\sum x_i^{12}x_j^6+24310\sum_{i<j}x_i^9x_j^9+\\
&\quad+185640\sum_{j<k}x_i^{12}x_j^3x_k^3+2042040\sum x_i^9x_j^6x_k^3+8576568x_i^6x_j^6x_6^3.
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
{P''_6}^{W(M_3)}&={P'_6}^{W(M_3)},\\
3{P''_{12}}^{W(M_3)}&=-31{P'_{12}}^{W(M_3)}+154\left({P'_6}^{W(M_3)}\right)^2,\\
1229{P''_{18}}^{W(M_3)}&=-37629{P'_{18}}^{W(M_3)}+600236{P'_{12}}^{W(M_3)}{P'_6}^{W(M_3)}-1905904\left({P'_6}^{W(M_3)}\right)^3.
\end{aligned}\tag{4}$$

Используя соотношения (4), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned}
8P_6^{W(M_3)}&=17P_6^{W(L_3)},\\
31P_{12}^{W(M_3)}&=37422\left(P_6^{W(L_3)}\right)^2+1255P_{12}^{W(L_3)},\\
129611P_{18}^{W(M_3)}&=24314570280\left(P_6^{W(L_3)}\right)^3-1312716132P_6^{W(L_3)}P_{12}^{W(L_3)}+\\
&\quad+94135003P_{18}^{W(L_3)}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Так как формы $P_{2r}^{W(M_3)}$ $(r = 3,\ 6,\ 9)$ — образующие алгебры $I^{W(M_3)} = P^{W(M_3)}$ [1], то из соотношений (5) следует, что формы $P_{2r}^{W(L_3)}$ $(r = 3,\ 6,\ 9)$ алгебраически независимы и порождают алгебру $P^{W(L_3)} = P^{W(M_3)}$.

Отметим также, что из соотношений (4) и (5) следует, что $P^{W(M_3)} = P'^{W(M_3)} = {}$ $= P''^{W(M_3)} = P^{W(L_3)}$.

С другой стороны, поскольку алгебра $P^{W(L_3)} \subset I^{W(L_3)}$, то любой элемент $F_{6t} \in P^{W(L_3)}$ представим как многочлен подходящей степени от форм $P_6^{W(L_3)}$, $I_9^{W(L_3)}$, $P_{12}^{W(L_3)}$. При этом форма $I_9^{W(L_3)}$, очевидно, должна входить в указанное представление только в четной степени, то есть

$$F_{6t} = \varphi\left(P_6^{W(L_3)}, \left(I_9^{W(L_3)}\right)^2, P_{12}^{W(L_3)}\right).$$

Исходя из равенства

$$155P_{18}^{W(L_3)} = -51862\left(P_6^{W(L_3)}\right)^3 + 5397P_6^{W(L_3)}P_{12}^{W(L_3)} + 17497485\left(I_9^{W(L_3)}\right)^2,$$

форма $\left(I_9^{W(L_3)}\right)^2$ линейно выражается через форму $P_{18}^{W(L_3)}$. Следовательно, $P_{18}^{W(L_3)}$ — образующая алгебры $P^{W(L_3)}$.

Таким образом, алгебра $P^{W(L_3)}$ порождается многочленами степеней 6, 12 и 18, а формы $P_6^{W(L_3)}$, $P_{12}^{W(L_3)}$, $P_{18}^{W(L_3)}$ — ее образующие.

Например, форма $P_{48}^{W(L_3)}$ представима в виде

$$\begin{aligned}
645753995179940000P_{48}^{W(L_3)} = {} & 605779436331995884647129\left(P_6^{W(L_3)}\right)^8 - \\
& - 382446785378338716709836\left(P_6^{W(L_3)}\right)^6 P_{12}^{W(L_3)} - \\
& - 787655618239772791674 00\left(P_6^{W(L_3)}\right)^5 P_{18}^{W(L_3)} + \\
& + 732418914951728148413 34\left(P_6^{W(L_3)}\right)^4 \left(P_{12}^{W(L_3)}\right)^2 - \\
& - 35996743603826550226800\left(P_6^{W(L_3)}\right)^3 P_{12}^{W(L_3)} P_{18}^{W(L_3)} - \\
& - 21306047988971695049676\left(P_6^{W(L_3)}\right)^2 \left(P_{12}^{W(L_3)}\right)^3 + \\
& + 2349640868539031802000\left(P_6^{W(L_3)}\right)^2 \left(P_{18}^{W(L_3)}\right)^2 + \\
& + 2297426136630282239400P_6^{W(L_3)}\left(P_{12}^{W(L_3)}\right)^2 P_{18}^{W(L_3)} + \\
& + 535292134384678481049\left(P_{12}^{W(L_3)}\right)^4 + \\
& + 914423515213434880000P_{12}^{W(L_3)}\left(P_{18}^{W(L_3)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Отметим также, что, исходя из соотношений (4), (5), в качестве образующих алгебры $P^{W(L_3)}$ могут быть взяты формы

$$P_6^{W(L_3)} = \sum x_i^6 - 10\sum_{i<j} x_i^3 x_j^3,$$

$$P_{12}'^{\,W(M_3)} = \sum x_i^{12} - 110\sum x_i^9 x_j^3 + 462\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6,$$

$$P_{18}'^{\,W(M_3)} = \sum x_i^{18} - 408\sum x_i^{15} x_j^3 + 9282\sum x_i^{12} x_j^6 - 24310\sum_{i<j} x_i^9 x_j^9,$$

Теорема доказана.

Вывод

В работе продолжено исследование строения алгебр многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями. Получено полное решение указанной задачи для групп G трехмерного унитарного пространства.

Список литературы

[1] Рудницкий О.И. *Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве.* – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Минск: БГУ, 1990. - 11 с.

[2] Рудницкий О.И. *Об одном классе многочленов Погорелова.* – Математическая физика, анализ, геометрия. - 1996. - Т.3,N1/2. - с. 142 – 145.

[3] Рудницкий О.И., Романенко И.А. *О специальных инвариантах тетраэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. - 2006. - Т.19(58),N1. - с. 29 – 37.

[4] Cohen A.M. *Finite complex reflection groups* // Ann. scient. Ec. Norm. Sup. - 1976. - 4. - P. 379 – 436.

[5] Shephard G.C. *Regular complex polytopes* // Proc. London Math. Soc. - 1952. - 3. - P. 82 – 97.

[6] Shephard G.C., Todd J.A. *Finite unitary reflection groups* // Can. J. Math. - 1954. - 6, N2. - P. 274 – 304.