Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 21(60) № 1 (2008), с. 11–23.

В. И. Войтицкий, М. А. Имрякова, Н. Д. Копачевский, А. И. Ливщиц, А. В. Насонкина

ТРИ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

УДК 532.5, 517.98

1. Введение

Данная статья написана по материалам магистерских работ 2008 года студенток кафедры математического анализа, выполненых под руководством проф. Копачевского Н.Д. при участии аспиранта Войтицкого В.И.

Рассматриваются спектральные задачи, возникающие при изучении малых колебаний системы идеальных капиллярных жидкостей (Лившиц А.И.), идеальных стратифицированных жидкостей (Имрякова М.А.) и гидросистемы "идеальная жидкость — баротропный газ" (Насонкина А.В.). После разделения переменных для горизональной составляющей возникает спектральная задача Неймана для уравнения Лапласа и одномерные спектральные задачи для вертикальной составляющей. Приводится общая схема исследования операторными методами одномерных спектральных задач, кратко формулируются основные результаты, полученные в магистерских работах. Общие свойства таковы: спектры задач состоят из изолированных конечнократных положительных собственных значений $\lambda = \omega^2$ (ω — частота колебания) с предельной точкой на $+\infty$ либо в нуле (для стратифицированной жидкости). Системы собственных элементов образуют ортонормированные базисы в некоторых гильбертовых пространствах.

2. Малые колебания системы идеальных капиллярных жидкостей

Рассмотрим общую постановку данной задачи (см. [1], а также [2] и [3]).

Пусть замкнутый неподвижный сосуд, ограниченный поверхностью $S = \cup_{k=1}^{m+1} S_k$, полностью заполнен несколькими идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающими в состоянии равновесия области Ω_1, Ω_2 ,..., Ω_{m+1}. При этом в состоянии покоя Ω_1 контактирует с сосудом по поверхности S_1 и с жидкостью Ω_2 по некоторой равновесной поверхности Γ_1; Ω_2 контактирует с сосудом по поверхности S_2 и с жидкостями Ω_1 и Ω_3 по Γ_1 и Γ_2 соответственно и т.д. Будем считать, что каждая Γ_k контактирует с поверхностью сосуда по некоторой линии γ_k, причем эти линии не имеют попарно общих точек. Обозначим через ρ_k — плотность жидкости в Ω_k; σ_k — коэффициент поверхностного натяжения на Γ_k; α_k — угол смачивания k-й жидкости вдоль γ_k; $\vec{n}$ — вектор нормали на Γ_k, направленный из Ω_k в Ω_{k+1}; $\vec{n}_0$ — вектор нормали на S, направленный наружу области.

Рассмотрим задачу о малых свободных колебаниях такой системы. Введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с сосудом так, чтобы ось Oz была направлена против действия силы тяжести: $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Если ввести на Γ_k криволинейные системы координат, то отклонения вдоль нормалей $\vec{n}$ движущихся свободных поверхностей $\Gamma_k(t)$ от равновесных Γ_k можно с точностью до малых высшего порядка описать функциями ζ_k (см., например, [4]). При этом, считая движение каждой жидкости потенциальным с потенциалами скорости $\Phi_k(x,y,z,t)$ ($\vec{u}_k = -\nabla\Phi_k$), получаем задачу в фиксированных областях:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \dfrac{\partial\zeta_k}{\partial t} = -\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = -\dfrac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ \rho_k \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial t} - \rho_{k+1}\dfrac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial t} = \sigma_k B_k \zeta_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_k} \zeta_k \, d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\Phi_k}{\partial n}\, d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial n}\, d\Gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$$B_k\zeta_k := P_{\Gamma_k}(-\Delta_{\Gamma_k}\zeta_k + a_k\zeta_k), \tag{2}$$

$$\mathcal{D}(B_k) := \{\zeta_k \in C^2(\Gamma_k) : \ \frac{\partial\zeta_k}{\partial e_k} + \chi_k\zeta_k = 0 \ (\text{на } \gamma_k)\}; \tag{3}$$

$$P_{\Gamma_k} u_k := u_k - \frac{1}{|\Gamma_k|}\int_{\Gamma_k} u_k \, d\Gamma_k \tag{4}$$

— операторы проектирования на подпространства $\mathcal{H}_k := \mathrm{L}_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}$; через Δ_{Γ_k} обозначены операторы Лапласа-Бельтрами, заданные на гладких многообразиях Γ_k; $\partial/\partial e_k$ — производная по внешней нормали $\vec{e_k}$ к контуру γ_k в плоскости, касательной к S_k; функции

$$\chi_k := \frac{k_\Gamma \cdot \cos\alpha_k - k_S}{\sin\alpha_k}, \qquad a_k := \frac{(\rho_k - \rho_{k+1})g}{\sigma_k}\cos(\widehat{n, \vec{e}_z}) - k_{1k}^2 - k_{2k}^2, \tag{5}$$

определенны на γ_k и Γ_k соответственно; k_Γ и k_S — кривизны линий, которые получаются в результате пересечения поверхностей Γ_k и S_k плоскостью, перпендикулярной к γ_k; k_{1k} и k_{2k} — главные кривизны поверхностей Γ_k.

Пусть теперь сосуд имеет форму цилиндра с плоским основанием Γ и боковой поверхностью $\partial\Gamma \times [h_0; h_{m+1}]$. Считая, что $\alpha_k = \pi/2$, получим $k_{1k} = k_{2k} = 0$, $a_k = \dfrac{(\rho_k - \rho_{k+1})g}{\sigma_k}$, $\chi_k \equiv 0$. Будем искать решения задачи (1)–(5) в виде:

$$\zeta_k = \zeta_k e^{i\omega t}, \quad \Phi_k = \Phi_k e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где ω — неизвестная частота колебаний. Тогда, исключая функции ζ_k и обозначая $\lambda := \omega^2$, получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \lambda\left(\rho_k\Phi_k - \rho_{k+1}\Phi_{k+1}\right) = -\sigma_k\Delta_{\Gamma_k}\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n} + (\rho_k - \rho_{k+1})g\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma_k), \\ \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n} = \dfrac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \displaystyle\int_{\Gamma_k} \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n}\, d\Gamma_k = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial e_k}\left(\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n}\right) = 0 \quad (\text{на } \gamma_k), \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{7}$$

Разделяя в задаче (7) переменные, т.е. считая

$$\Phi_k(x, y, z) = X(x, y) \cdot Z_k(z), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad z \in (h_{k-1}; h_k), \tag{8}$$

получаем задачу

$$-\Delta_2 X - \mu_p^2 X = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial X}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_\Gamma X\, d\Gamma = 0, \tag{9}$$

спектр которой состоит из положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_p\}_{p=1}^\infty$, $\mu_p \to +\infty$ $(p \to \infty)$ (ее собственные элементы $\{X_p(x, y)\}_{p\in\mathbb{N}}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H} := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$). Затем, для каждого $p \in \mathbb{N}$ имеем спектральную задачу

$$\begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, \quad z \in (h_{k-1}; h_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ Z_0'(h_0) = Z_{m+1}'(h_{m+1}) = 0, \\ Z_k'(h_k) = Z_{k+1}'(h_k), \\ \lambda\left(\rho_k Z_k(h_k) - \rho_{k+1} Z_{k+1}(h_k)\right) = \beta_{kp} Z_k'(h_k), \quad k = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\beta_{kp} := \sigma_k \mu_p + (\rho_k - \rho_{k+1})g$. Введем обозначения

$$Z_k'(h_k) = Z_{k+1}'(h_k) =: w_k, \quad k = \overline{1, m}, \tag{11}$$

считая также, что $w_0 = w_{m+1} = 0$. Рассмотрим две вспомогательные задачи

$$\begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, \\ Z_k'(h_k) = w_k, \\ Z_k'(h_{k-1}) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -Z_k'' + \mu_p^2 Z_k = 0, \quad z \in (h_{k-1}; h_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ Z_k'(h_k) = 0, \\ Z_k'(h_{k-1}) = w_{k-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Складывая решения этих задач, получаем, что для решения задачи (10) справедливо представление

$$Z_k(z) = \frac{1}{\mu_p \operatorname{sh}[\mu_p(h_k - h_{k-1})]}\big(\operatorname{ch}[\mu_p(z - h_{k-1})] w_k - \operatorname{ch}[\mu_p(h_k - z)] w_{k-1}\big). \tag{13}$$

Тогда из совокупности поледних условий в (10) получаем m уравнений

$$\begin{gathered} \mu_p \beta_{kp} w_k = \lambda\Big[-\frac{\rho_k}{\operatorname{sh}[\mu_p(h_k - h_{k-1})]} w_{k-1} + \\ + \big(\rho_k \operatorname{cth}[\mu_p(h_k - h_{k-1})] + \rho_{k+1} \operatorname{cth}[\mu_p(h_{k+1} - h_k)]\big) w_k - \frac{\rho_{k+1}}{\operatorname{sh}[\mu_p(h_{k+1} - h_k)]} w_{k+1}\Big] \end{gathered} \tag{14}$$

для нахождения чисел w_k и спектрального параметра λ.

Эти уравнения кратко можно переписать в виде

$$\mu_p B w = \lambda A w, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где $w := (w_1, w_2, \ldots, w_m)^t$, $B := \operatorname{diag}\{\beta_{kp}\}_{k=1}^m$, A — трёхдиагональная самосопряжённая матрица. Можно доказать, что матрица A является положительно определённой. Тогда задача (15) имеет при каждом p ровно m (с учётом кратности) положительных собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, а из собственных элементов $Z_k'(h_k)$ можно составить ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Для задачи (7) отсюда получаем, что ее спектр дискретный, состоит из положительных конечнократных собственных значений $\{\lambda_{pj}\}_{p\in\mathbb{N},j=\overline{1,m}}$. Причём $\lambda_{pj}\to+\infty$ при $p\to\infty$. Можно доказать, что задача имеет собственный ортонормированный базис в энергетических пространствах, отвечающих потенциальной и кинетической энергиям систем.

В магистерской работе Лившиц А.И. проведено исследование спектра и собственных функций задачи в случае двух и трёх слоёв жидкостей. Для цилиндрического сосуда, полностью заполненного двумя жидкостями, занимающими объемы Ω_1 и Ω_2, где $\Omega_1=\Gamma\times(0;h_1),\ \Omega_2=\Gamma\times(h_1;h_2)$, показано, что при всех $p\in\mathbb{N}$ имеется одно собственное значение

$$\lambda_p^{(1)}=\frac{\mu_p\beta_{1p}}{\rho_1\operatorname{cth}(\mu_p h_1)+\rho_2\operatorname{cth}(\mu_p(h_2-h_1))}\to\frac{\mu_p\beta_{1p}}{\rho_1+\rho_2}\quad\text{при } p\to\infty. \tag{16}$$

Если жидкости занимают области Ω_2 и Ω_3, где $\Omega_2=\Gamma\times(h_1;h_2),\ \Omega_3=\Gamma\times(h_2,h_3)$, то при всех $p\in\mathbb{N}$ имеется одно собственное значение

$$\lambda_p^{(2)}=\frac{\mu_p\beta_{2p}}{\rho_2\operatorname{cth}(\mu_p(h_2-h_1))+\rho_3\operatorname{cth}(\mu_p(h_3-h_2))}\to\frac{\mu_p\beta_{2p}}{\rho_2+\rho_3}\quad\text{при } p\to\infty. \tag{17}$$

Для цилиндрического сосуда, полностью заполненного тремя идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающими объемы $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$, где $\Omega_1=\Gamma\times(0;h_1),\ \Omega_2=\Gamma\times(h_1;h_2),\ \Omega_3=\Gamma\times(h_2;h_3)$, получено, что при всех $p\in\mathbb{N}$ имеется два положительных собственных значения $\lambda_{1p},\ \lambda_{2p}$, которые являются корнями характерестического уравнения

$$\begin{gathered}\lambda^2\Big[\rho_1\rho_3\operatorname{cth}(\mu_p h_1)\operatorname{cth}[\mu_p(h_3-h_2)]+\rho_2^2+\rho_1\rho_2\operatorname{cth}(\mu_p h_1)\operatorname{cth}(\mu_p(h_2-h_1))+\\ +\rho_2\rho_3\operatorname{cth}(\mu_p(h_2-h_1))\operatorname{cth}[\mu_p(h_3-h_2)]\Big]-\lambda\Big[\rho_3\mu_k\beta_{1p}\operatorname{cth}[\mu_p(h_3-h_2)]+\\ +\rho_1\mu_p\beta_{2p}\operatorname{cth}(\mu_p h_1)+\rho_2\mu_p(\beta_{1p}+\beta_{2p})\operatorname{cth}(\mu_p(h_2-h_1))\Big]+\mu_p^2\beta_{1p}\beta_{2p}=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Составляя теперь, с использование теоремы Виета, квадратное уравнение, корнями которого являются собственные значения $\lambda_p^{(1)}$ и $\lambda_p^{(2)}$, можно заметить, что (18) будет отличаться от составленного уравнения на бесконечно малую величину

$$\rho_2^2\Big[\operatorname{cth}^2(\mu_p(h_2-h_1))-1\Big]\to 0\quad(p\to\infty), \tag{19}$$

стоящую при λ^2. Отсюда имеем

$$\lambda_{jp}\to\lambda_p^{(j)}\quad(p\to\infty),\quad j=1,2. \tag{20}$$

Таким образом, в случае трёх слоёв жидкости имеется две ветви собственных значений. Первая отвечает колебаниям у границы раздела Γ_1 (колеблятся главным образом первая и вторая жидкости), а колебания второй ветви расположены у поверхности Γ_2 (колеблятся вторая и третья жидкости). Соответствующие собственные функции строились графически с помощью пакета Maple. Был обнаружен так называемый skin–effect, т.е. при возрастании p увеличивается "пикообразность" колебаний у границы раздела жидкостей (собственные функции всё ближе прилегают к границам раздела).

3. Малые колебания системы идеальных стратифицированных жидкостей

Будем считать теперь, что идеальные стратифицированные жидкости, плотности которых изменяются вдоль вертикальной оси, в состоянии покоя полностью заполняют сосуд произвольной формы и занимают связные области Ω_k $(k = \overline{1, m+1}\,)$, ограниченные твердыми стенками S_k $(k = \overline{1, m+1}\,)$ и границами раздела жидкостей Γ_k $(k = \overline{1, m}\,)$.

Тогда рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, позволяют задачу о малых движениях исходной гидросистемы (рассматриваемая задача изучалась в [5]–[8]) сформулировать в виде следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \rho_{0k}(z)\dfrac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2} = -\nabla p_k - g\rho_k \vec{e}_z \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \dfrac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \rho_{0k} \cdot \dfrac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_0 = 0 \quad (\text{на } S_k), \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} p_k - p_{k+1} = g(\rho_{0k} - \rho_{0,k+1})\zeta_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ \zeta_k = (u_z)_k = (u_z)_{k+1} \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int_{\Gamma_k} \zeta_k \, d\Gamma_k = 0, \end{cases} \tag{22}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} \zeta_k(0) = \zeta_k^0, \quad k = \overline{1, m}, \\ \rho_k(0, \vec{x}) = \rho_k^0(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \vec{u}_k(0, \vec{x}) = \vec{u}_k^{\,0}. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь $\vec{u}_k(t, \vec{x})$ — поле смещений в жидкости, $p_k(t, \vec{x})$ и $\rho_k(t, \vec{x})$ — отклонения поля давлений и плотности от равновесных $p_{0k}(z)$ и $\rho_{0k}(z)$ соответственно, ζ_k — вертикальное отклонение движущихся поверхностей $\Gamma_k(t)$ от равновесных Γ_k, $\vec{n}_0$ — нормаль к твердой стенке S.

Рассматривая собственные колебания исходной гидросистемы, т.е. такие решения задачи (21)–(23), для которых $\vec{u}_k(t, \vec{x})$, $p_k(t, \vec{x})$, $\rho_k(t, \vec{x})$, $\zeta_k(t, x, y)$ зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — неизвестная частота колебаний, получаем спектральную задачу

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_{0k}(z)\vec{u}_k = \nabla p_k + g\rho_k \vec{e}_z \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \rho_k + \rho'_{0k}(z)(u_z)_k = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_0 = 0 \quad (\text{на } S_k), \end{cases} \tag{24}$$

с условиями (22).

Рассмотрим далее задачу (24), (22) для сосуда цилиндрической формы с произвольным поперечным сечением Γ и боковой стенкой $\partial\Gamma \times [h_0; h_{m+1}]$. Обозначим через $N_k^2(z) := -g\rho'_{0k}(z)/\rho_{0k}(z)$ квадрат частот плавучести k-ой жидкости. Будем считать их константами: $N_k^2(z) \equiv N_k^2$; тогда каждая жидкость в состоянии покоя будет экспоненциально стратифицированной, т.е.

$$\rho_{0k}(z) = \rho_{0k}(0) \cdot \exp(-\varepsilon_k z), \quad \varepsilon_k = N_k^2 g^{-1}. \tag{25}$$

В этом случае, исключая все переменные, кроме вертикального смещения $w_k(\vec{x}) := (u_z)_k$ (в Ω_k), получаем

$$\begin{cases} (N_k^2 - \omega^2)\Delta w_k - \omega^2 \left(\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} - \dfrac{1}{g} N_k^2 \dfrac{\partial w_k}{\partial z} \right) = 0, \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \dfrac{\partial w_k}{\partial \vec{n}_0} = 0, \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \rho_{0k} \left(\omega^2 \dfrac{\partial w_k}{\partial z} + g\Delta_2 w_k \right) = \rho_{0,k+1} \left(\omega^2 \dfrac{\partial w_{k+1}}{\partial z} + g\Delta_2 w_{k+1} \right), \quad k = \overline{1, m}, \\ \zeta_k = w_k\big|_{\Gamma_k} = w_{k+1}\big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{26}$$

Разделяя в задаче (26) переменные, т.е. считая $w_k = Z_k(z) \cdot X(x, y)$, для $X(x, y)$ снова получаем задачу (9), рассмотренную в предыдущем пункте. Имеется полная система собственных функций $\{X_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, а собственные значения $\mu_p \to +\infty$. При этом, для каждого $p \in \mathbb{N}$ имеем задачу

$$\begin{cases} -(\rho_{0k} Z'_k)' + \mu_p^2 \rho_{0k} Z_k = \lambda \mu_p^2 g(-\rho'_{0k}) Z_k, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad \lambda := \omega^{-2}, \\ Z_k(h_k) = Z_{k+1}(h_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ \rho_{0k} Z'_k(h_k) - \rho_{0,k+1} Z'_{k+1}(h_k) = \lambda \mu_p^2 g(\rho_{0k} - \rho_{0,k+1}) Z_k(h_k), \quad k = \overline{1, m}, \\ Z'_1(h_0) = Z'_{m+1}(h_{m+1}) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Будем искать решение $\widehat{Z} := (Z_1(z);\ldots;Z_{m+1}(z);Z_1(h_1);\ldots Z_m(h_m))^t$ задачи (27) в гильбертовом пространстве

$$\begin{gathered}\mathbf{H} := \bigoplus_{k=1}^{m+1} L_2[(h_{k-1};h_k);\mu_p^2 g(-\rho_{0k}')] \bigoplus_{k=1}^{m}\mathbb{R},\\ \|\widehat{Z}\|^2_{\mathcal{H}} := \sum_{k=1}^{m+1}\int\limits_{h_{k-1}}^{h_k}|Z_k(z)|^2\mu_p^2 g(-\rho_{0k}')\,dz + \sum_{k=1}^{m}|Z_k(h_k)|^2\mu_p^2 g(\rho_{0k}-\rho_{0,k+1}).\end{gathered} \tag{28}$$

Введём в $\mathbf{H}$ линейный оператор

$$\begin{aligned}&A\widehat{Z} := \Big(\frac{1}{\mu_p^2 g(-\rho_{0k}')}(-(\rho_{0k}Z_k')' + \mu_p^2\rho_{0k}Z_k)_{k=1}^{m+1};\\ &\frac{1}{\mu_p^2 g(\rho_{0k}-\rho_{0,k+1})}(\rho_{0k}Z_k'(h_k) - \rho_{0,k+1}Z_{k+1}'(h_k))_{k=1}^{m}\Big),\\ &\mathcal{D}(A) := \{\widehat{Z}\in\bigoplus_{k=1}^{m+1}C^2[h_{k-1};h_k]\bigoplus_{j=1}^{m}\mathbb{R}:\\ &Z_1(h_0) = Z_{m+1}(h_{m+1}) = 0,\ Z_k'(h_k) = Z_{k+1}'(h_k)\}.\end{aligned} \tag{29}$$

Очевидно, задача (27) эквивалентна задаче $A\widehat{Z} = \lambda\widehat{Z}$. С помощью интегрирования по частям можно доказать, что оператор A является симметрическим положительно определённым оператором в $\mathbf{H}$. Согласно теореме вложения С.Л. Соболева, энергетическое пространство $\mathbf{H}_A$ оператора A компактно вложено в $\mathbf{H}$. Отсюда следует, что задача (27) имеет дискретный положительных спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\lambda_{pj}\to+\infty$ $(j\to+\infty)$ (также $\lambda_{pj}\to+\infty$ $(p\to+\infty)$). Для каждого $p\in\mathbb{N}$ система собственных элементов $\widehat{Z}_{jp}$ образует ортонормированный базис в $\mathbf{H}$. Отсюда следует, что система собственных элементов $\widehat{W}_{kp} := \widehat{Z}_{kp}\cdot X_p(x)$ задачи (26) образует ортонормированный базис в пространстве $\bigoplus_{k=1}^{m+1}L_2(\Omega_k)\bigoplus_{k=1}^{m}\mathcal{H}_k$ с соотвествующим весом.

В магистерской работе Имряковой М.А. проведено рассмотрение спектральной задачи (27) в случае двух идеальных стратифицированных жидкостей, целиком заполняющих цилиндрическую область $\Omega = \Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1 = \Gamma\times[0,h_1],\ \Omega_2 = \Gamma\times[h_1;h_2]$. Рассмотрен вид собственных функций задачи. Получены два трансцендентных характерисических уравнения для нахождения собственных значений $\lambda = \omega^{-2}$:

$$1)\ \lambda\,\mu_p^2\,g(\,\rho_{01}-\rho_{02}) - \frac{1}{2}\,(\,\rho_{01}\varepsilon_1 - \rho_{02}\varepsilon_2) = \rho_{01}\,q_1\,\mathrm{ctg}(q_1h_1) + \rho_{02}\,q_2\,\mathrm{ctg}(q_2h_2) \tag{30}$$

при $\lambda > \dfrac{1}{N_k^2} + \dfrac{N_k^2}{4g^2\mu_p^2}$, $\quad -q_k^2 := \dfrac{1}{4}\,\varepsilon_k^2 - \mu_p^2(N_k^2\lambda - 1) < 0$;

$$2)\ \lambda\,\mu_p^2\,g(\rho_{01}-\rho_{02}) - \frac{1}{2}\,(\rho_{01}\varepsilon_1 - \rho_{02}\varepsilon_2) = \rho_{01}\,r_1\,\mathrm{cth}(r_1h_1) + \rho_{02}\,r_2\,\mathrm{cth}(r_2h_2) \tag{31}$$

при $\lambda < \dfrac{1}{N_k^2} + \dfrac{N_k^2}{4g^2\mu_p^2}, \quad r_k^2 := \dfrac{1}{4}\,\varepsilon_k^2 - \mu_p^2(N_k^2\lambda - 1) > 0.$

Графическое исследование уравнений (30) и (31) привело к следующим выводам. Случаю (30) для любого $p \in \mathbb{N}$ соответствует счетное множество собственных значений $\lambda_{pj} \to +\infty$ $(j \to \infty)$. Случаю (29) для любого $p \in \mathbb{N}$ соответствует одно собственное значение λ_p. Таким образом, рассматриваемая задача имеет в качестве решений поверхностные волны, родственные поверхностным колебаниям однородной нестратифицированной жидкости, а также внутренние волны, обусловленные стратификацией жидкостей.

4. Малые колебания гидросистемы “идеальная жидкость — баротропный газ”

Будем считать, что идеальная несжимаемая жидкость с плотностью ρ_1 и баротропный газ, плотность которого $\rho_2 < \rho_1$, полностью заполняют неподвижный сосуд произвольной формы. Пусть жидкость занимает в состоянии покоя область Ω_1, а газ — область Ω_2, ограниченные твёрдыми стенками S_k $(k = 1, 2)$ и границей раздела Γ. Считая колебания данной гидросистемы малыми, как и в предыдущих задачах, отклонения поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ вдоль нормали $\vec{n}$ можно описать с точностью до малых более высокого порядка функцией ζ.

На основании рассмотрений из [1], [2], для неизвестных потенциалов скоростей $\Phi_k(\vec{x}, t)$ $(\vec{u}_k(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi_k(\vec{x}, t),\ \vec{x} \in \Omega_k,\ k = 1, 2)$ и функций смещения $\zeta(\xi_1, \xi_2, t)$, зависящих от t по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — неизвестная частота колебаний, получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_1), \\ -\Delta\Phi_2 = \lambda c^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n_0} = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \displaystyle\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \\ \sigma B\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_2 P_\Gamma\Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma), \\ \displaystyle\int_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0, \quad \lambda\int_\Omega \Phi_2\, d\Omega_2 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Здесь: $\vec{n_0}$ — вектор нормали на S, направленный наружу сосуда; c — скорость звука в газе; λ — квадрат частоты колебаний $(\lambda = \omega^2)$. Оператор P_Γ проектирования на подпространство $\mathcal{H} = \mathrm{L}_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ и оператор $B := P_\Gamma(-\Delta_\Gamma + aI)$ — есть операторы вида (2) и (4) соответственно.

Пусть теперь сосуд ограничен цилиндрической поверхностью с произвольным плоским горизонтальным основанием Γ и боковой стенкой $\partial\Gamma\times[-h_1;h_2]$. Будем считать, что угол смачивания δ равен $\pi/2$, тогда равновесной поверхностью служит горизонтальная плоскость $z=0$, и получаем области $\Omega_1=\Gamma\times(-h_1;0)$, $\Omega_2=\Gamma\times(0;h_2)$. Цилиндрическая форма сосуда позволяет провести разделение переменных. Будем искать неизвестные потенциалы в виде $\Phi_k(x,y,z)=X(x,y)Z_k(z)$ $(k=1,2)$. Тогда для $X(x,y)$ снова получаем спектральную задачу Неймана для уравнения Лапласа (9) (ее спектр состоит из положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\mu_p\to+\infty$ $(p\to\infty)$, а система собственных элементов $\{X_p(x,y)\}_{p\in\mathbb{N}}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$). Кроме этого, для каждого $p\in\mathbb{N}$ имеем спектральную задачу

$$\begin{cases}-Z_1''+\mu_p^2Z_1=0, \quad Z_1'(-h_1)=0,\\ -Z_2''+\mu_p^2Z_2=\lambda c^{-2}Z_2, \quad Z_2'(h_2)=0,\\ Z_1'(0)=Z_2'(0),\\ Z_1'(0)=\lambda\beta_p^{-1}(\rho_1Z_1(0)-\rho_2Z_2(0)).\end{cases} \tag{33}$$

где $\beta_p:=\sigma\mu_p^2+(\rho_1-\rho_2)g$.

С помощью интегрирования по частям находим, что собственные значения находятся из следующего вариационного отношения:

$$\lambda\mapsto\frac{\rho_2\int_0^{h_2}(|Z_2'(z)|^2+\mu_p^2|Z_2(z)|^2)\,dz+\rho_1\int_{-h_1}^{0}(|Z_1'(z)|^2+\mu_p^2|Z_1(z)|^2)\,dz}{\rho_2c^{-2}\int_0^{h_2}|Z_2(z)|^2\,dz+\beta_p^{-1}(\rho_1Z_1(0)-\rho_2Z_2(0))^2}. \tag{34}$$

Отсюда следует, что собственные значения могут быть лишь положительными.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}^1(-h_1;0)$ с нормой

$$\|Z_1\|_1^2:=\int\limits_{-h_1}^{0}(|Z_1'|^2+\mu_p^2|Z_1|^2)\,dz \tag{35}$$

оператор следа:

$$\gamma_1Z_1:=Z_1(0), \quad \gamma_1:\mathcal{H}^1(-h_1;0)\to\mathbb{R}. \tag{36}$$

С помощью интегрирования по частям несложно показать, что для любого $p\in\mathbb{N}$ существует единственное решение $Z_1(z)$ задачи

$$-Z_1''+\mu_p^2Z_1=0, \quad Z_1'(-h_1)=0, \quad Z_1'(0)=w, \tag{37}$$

которое находится по формуле $Z_1(z)=T_1w=wT_1(1)$, где линейный ограниченный оператор $T_1:\ \mathbb{R}\to\mathcal{H}^1(-h_1;0)$ является сопряжённым к оператору следа γ_1.

Именно, имеем

$$Z_1(z) = \frac{w \operatorname{ch}[\mu_p(z+h_1)]}{\mu_p \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}, \quad z \in [-h_1; 0]. \tag{38}$$

Будем искать фукцию $Z_2(z)$ в виде суммы решений вспомогательных задач

$$\begin{cases} -Z''_{21} + \mu_p^2 Z_{21} = 0, \\ Z'_{21}(h_2) = 0, \\ -Z'_{21}(0) = -w; \end{cases} \qquad \begin{cases} -Z''_{22} + \mu_p^2 Z_{22} = f, \\ Z'_{22}(h_2) = 0, \\ Z'_{22}(0) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Очевидно, что первая задача эквивалентна задаче (37). Следовательно, она имеет единственное решение $Z_{21}(z) = T_2(-w) = (-w)T_2(1)$, где линейный ограниченный оператор $T_2 :\ \mathbb{R} \to \mathcal{H}^1(0;h_2)$ является сопряжённым к оператору следа $\gamma_2 Z_2 := Z_2(0)$.

Вторую задачу можно записать в виде $A_p Z_{22}(z) = f$, где операторы A_p являются самосопряжёнными расширениями положительно определённых операторов

$$\widetilde{A}_p Z_{22} := -Z''_{22} + \mu_p^2 Z_{22}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{A}_p) = \{Z \in C^2[0;h_2] :\ Z'(0) = Z'(h_2) = 0\}. \tag{40}$$

Отсюда согласно (33) получаем, что $A_p Z_{22}(z) = \lambda c^{-2}\big((-w)T_2(1) + Z_{22}(z)\big)$. Из последнего условия в (33) имеем $w = \lambda \beta_p^{-1}\big(\rho_1\gamma_1 T_1(1)w + \rho_2\gamma_2 T_2(1)w - \gamma_2 Z_{22}\big)$.

Таким образом, задача (33) сводится к операторно-матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{22}(z) \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c^{-2} I & -c^{-2} T_2(1) \\ -\beta_p^{-1}\rho_2\gamma_2 & \beta_p^{-1}(\rho_1\gamma_1 T_1(1) + \rho_2\gamma_2 T_2(1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{22}(z) \\ w \end{pmatrix} \tag{41}$$

для пар $\widehat{u} := (Z_{22}(z); w)^t$ из пространства $\mathbf{H} := L_2(0;h_2) \oplus \mathbb{R}$.

Умножая первую строку в (41) на $\beta_p^{-1}\rho_2$, а вторую — на c^{-2}, получаем задачу

$$\mathcal{A}\widehat{u} = \lambda \mathcal{B}\widehat{u} \tag{42}$$

с самосопряжёнными положительно определёнными операторами

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \beta_p^{-1}\rho_2 A_p & 0 \\ 0 & c^{-2} \end{pmatrix},\ \mathcal{B} := \begin{pmatrix} c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2 I & -c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2 T_2(1) \\ -c^{-2}\beta_p^{-1}\rho_2\gamma_2 & c^{-2}\beta_p^{-1}(\rho_1\gamma_1 T_1(1) + \rho_2\gamma_2 T_2(1)) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

При этом оператор $\mathcal{A}$ — неограничен, а оператор $\mathcal{B}$ ограничен и ограниченно обратим (он представим в виде суммы одномерного и единичного оператора).

Известно (см., например, [4]), что задача вида (42) имеет собственный базис, ортогональный в $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ и в $\mathbf{H}_{\mathcal{B}} = \mathbf{H}$, при этом

$$(\widehat{u}_j, \widehat{u}_l)_{\mathcal{B}} = \delta_{jl}; \quad (\widehat{u}_j, \widehat{u}_l)_{\mathcal{A}} = \lambda_j \delta_{jl}. \tag{44}$$

Спектр задачи состоит из изолированных конечнократных положительных собственных значений $\lambda_{pj} \to +\infty$ $(p, j \to \infty)$, которые можно найти как последовательные минимумы вариационного отношения $\|\widehat{u}\|^2_{\mathcal{A}}/\|\widehat{u}\|^2_{\mathcal{B}}$.

В магистерской работе Насонкиной А.В. было проведено представленное выше исследование спектральной задачи (33). Получен общий вид собственных функций задачи. Собственные значения исследовались графически и с помощью автоматизированного пакета Maple. В случае $\lambda c^{-2} - \mu_p^2 > 0$ и $\lambda c^{-2} - \mu_p^2 < 0$ собственные значения λ являются корнями соответствующих характеристических трансцендентных уравнений

$$\frac{\mu_p \lambda \rho_2 \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda c^{-2} - \mu_p^2} h_2)}{\sqrt{\lambda c^{-2} - \mu_p^2}} = \lambda \rho_1 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) - \beta_p \mu_p, \tag{45}$$

$$\frac{\mu_p \lambda \rho_2 \operatorname{cth}(\sqrt{\mu_p^2 - \lambda c^{-2}} h_2)}{\sqrt{\mu_p^2 - \lambda c^{-2}}} = \lambda \rho_1 \operatorname{cth}(\mu_p h_1) - \beta_p \mu_p. \tag{46}$$

Было доказано, что для любого $p \in \mathbb{N}$ уравнение (45) имеет счётное множество положительных корней $\lambda_{jp} \to +\infty$ $(j, p \to \infty)$. При этом уравнение (46), по видимому, не имеет решений.

Список литературы

[1] Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости.* – Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.

[2] Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. *Гидромеханика невесомости.* – М.: Наука, 1976. – 504 с.

[3] Копачевский Н.Д. *Задачи теории колебаний жидкости в условиях невесомости. Учебное пособие.* – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1981. – 99 с.

[4] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[5] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания идеальной стратифицированной жидкости, полостью заполняющей сосуд* // МВТУ им. Н.Э. Баумана. М. – 1982. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 2.03.82 г., № 892–82.

[6] Копачевский Н.Д., Темченко Т.П., Царьков М.Ю. *Колебания системы слоев стратифицированной жидкости в цилиндрическом контейнере* // Симфероп. ун-т. – Симферополь. – 1985. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 03.06.85 г., № 1203.

[7] Темченко Т.П. *Колебания идеальной стратифицированной многослойной жидкости в произвольном контейнере* // Симфероп. ун-т. Симферополь. – 1987. – 55 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.06.87 г., № 1614.

[8] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести* // Дифференциальные уравнения. – 1988. – №10. – С.1784-1796.