

О.П. Бойко

О СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ СТИЛЬТЬЕСОВСКИХ СТРУН С ОДНОМЕРНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

MSC2000: 34K29, 34K10

ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению прямых и обратных задач для струн с одномерным трением было положено в работах [1], [2], [3], где рассматривались весьма широкие классы струн, в том числе не имеющие плотности в классическом понимании. Важным подклассом является класс гладких струн. Уравнение колебаний струны, плотность которой имеет вторую производную, с помощью известного преобразования Лиувилля [4] можно привести к уравнению Штурма-Лиувилля. Прямые и обратные задачи для таких струн рассматривались во многих работах (см, например, [5]).

Другим важным подклассом струн являются стильтьесовские струны, т.е. невесомые нити несущие сосредоточенные массы. Модели физических явлений, связанных с стильтьесовскими струнами широко используются в теоретической механике и инженерном деле [6], [7], [8], а также в теории электрических цепей [9].

В настоящей статье рассматриваются колебания стильтьесовских струн с конечным числом сосредоточенных масс, подверженных одномерному трению. Подход настоящей статьи основывается на классических результатах из книги [10] и использует разложение в цепную дробь, введенное Стильтьесом [11].

1. ПОСТАНОВКИ

В [12] рассмотрена нить длины l , натянутая единичной силой и несущая n сосредоточенных масс m_1, m_2, \dots, m_n . Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, через l_0, l_1, \dots, l_n обозначены

длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Рассмотрен случай, когда левый конец струны жестко закреплен, а правый конец, несущий массу m_n , движется с коэффициентом вязкого трения α .

В этом случае для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$ уравнение колебаний k -ой массы имеет следующий вид:

$$\frac{v_k(t) - v_{k+1}(t)}{l_k} + \frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + m_k v_k''(t) = 0. \quad (1)$$

Закрепление левого конца струны описывается уравнением

$$v_0(t) = 0, \quad (2)$$

а уравнение колебаний демпфированной массы m_n имеет вид:

$$\frac{v_n(t)}{l_n} + \frac{v_n(t) - v_{n-1}(t)}{l_{n-1}} + m_n v_n''(t) + \alpha v_n'(t) = 0. \quad (3)$$

Избавляясь от времени с помощью стандартной подстановки $v_k(t) = u_k e^{i\lambda t}$ получаем соответствующую краевую задачу:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (4)$$

$$u_0 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n \lambda^2 + i\alpha \lambda) u_n = 0. \quad (6)$$

В [12] с использованием методов [10] доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть задано число $l > 0$. Для того чтобы множество комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$) было спектром задачи (4)-(6) с $\{m_k\}_1^n$, $\{l_k\}_0^n$, таких что $\sum_{k=0}^n l_k = l$, и $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1) $\text{Im } \lambda_k > 0$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$;
- (2) $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$ для не чисто мнимых λ_{-k} и кратности симметрично расположенных чисел совпадают.

Следует отметить, что ранее этот результат был получен другим способом в [13], [14], а для случая свободного левого конца он следует из результатов работы [1].

В [15] рассмотрен случай когда трение приложено в промежуточной точке. Такая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_1) \quad (7)$$

$$\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k+1}}{\tilde{l}_k} + \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tilde{l}_{k-1}} - \tilde{m}_k \lambda^2 \tilde{u}_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_2) \quad (8)$$

$$u_0 = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad (10)$$

$$u_{n_1+1} = \tilde{u}_{n_2+1}, \quad (11)$$

$$\frac{u_{n_1+1} - u_{n_1}}{l_{n_1}} - \frac{\tilde{u}_{n_2+1} - \tilde{u}_{n_2}}{l_{n_2}} = -i\alpha \lambda u_{n_1+1} \quad (12)$$

и представляет собой описание струны общей длины l , состоящей из двух частей: левой части длины \hat{l} и правой части длины $l - \hat{l}$. В левой части струны расположено n_1 масс m_1, m_2, \dots, m_{n_1} , пронумерованные в порядке возрастания индекса от левого конца струны к правому, а в правой части струны расположено n_2 масс $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_{n_2}$, пронумерованные в обратном порядке от правого конца струны к левому. В точке соединения частей струны расположено невесомое кольцо, движущееся в направлении перпендикулярном к равновесному положению струны, с коэффициентом вязкого трения α . Длины интервалов, на которые точки приложения масс делят струну, обозначены через l_0, \dots, l_{n_1} и $\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{n_2}$ и пронумерованы от соответствующего конца струны до точки приложения трения.

Для задачи (7)-(12) в [15] получена следующая теорема:

Теорема 2. Пусть заданы числа $l > 0$ и $\hat{l} \in (0; l)$. Для того чтобы множество комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$) было спектром задачи (7)-(12) с общим числом масс n и длинами интервалов l_k ($k = 0, 1, \dots, n_1$) и \tilde{l}_k ($k = 0, 1, \dots, n_2$), таких что $\sum_0^{n_1} l_k = \hat{l}$ и $\sum_0^{n_2} \tilde{l}_k = l - \hat{l}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1) $\text{Im } \lambda_k \geq 0$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $\lambda_k \neq 0$;
- (2) $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$ для не чисто мнимых λ_{-k} и кратности симметрично расположенных чисел совпадают;
- (3) Все вещественные λ_k (если такие есть) однократные;
- (4) Для каждого вещественного λ_k справедливо $\text{Im } \Phi'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} = 0$, $\text{Im } \Phi''(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} \neq 0$, где $\Phi(\lambda) = \prod_{k=-n}^n (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k})$.

Следствием этих условий является то, что число вещественных собственных значений не превосходит n .

2. ИССЛЕДОВАНИЕ

Мы рассматриваем задачу когда оба конца нити закреплены, а трение приложено к крайней справа массе. Обозначим через l общую длину струны несущей n сосредоточенных масс m_1, m_2, \dots, m_n . Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, обозначим через l_0, l_1, \dots, l_n длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Через α обозначим коэффициент вязкого трения, с которым движется масса m_n .

Соответствующая краевая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

$$u_0 = 0, \quad (14)$$

$$u_{n+1} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n \lambda^2 + i\alpha \lambda) u_n = 0. \quad (16)$$

Согласно работе [10] решение рекуррентных соотношений (13) имеет вид

$$u_k = R_{2k-2}(\lambda^2) u_1, \quad (17)$$

где R_{2k-2} – некоторый многочлен степени $2k-2$.

Введем согласно [10] многочлены с нечетными индексами:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = \frac{R_{2k}(\lambda^2) - R_{2k-2}(\lambda^2)}{l_k}. \quad (18)$$

Многочлены R_k удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = -\lambda^2 m_k R_{2k-2}(\lambda^2) + R_{2k-3}(\lambda^2),$$

$$R_{2k}(\lambda^2) = l_k R_{2k-1}(\lambda^2) + R_{2k-2}(\lambda^2), \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad R_0(\lambda^2) = 1, \quad R_{-1}(\lambda^2) = \frac{1}{l_0}.$$

Учитывая эти равенства, из уравнения (16) получаем

$$R_{2n-3}(\lambda^2) + (-m_n \lambda^2 + \frac{1}{l_n}) R_{2n-2}(\lambda^2) + i\alpha \lambda R_{2n-2}(\lambda^2) = 0. \quad (19)$$

Обозначим через $\Phi(\lambda)$ многочлен степени $2n$, стоящий в левой части (19), и будем называть его характеристическим многочленом задачи (13)-(16), так как спектр λ_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) задачи (13)-(16) совпадает с множеством корней функции $\Phi(\lambda)$.

Легко показать, что спектр задачи (13)-(16) совпадает со спектром квадратичного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A, \quad (20)$$

где операторы M , K , A действуют в n -мерном гильбертовом пространстве и имеют следующий вид:

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\},$$

$$K = \text{diag}\{0, 0, \dots, \alpha\},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n-1}} & -\frac{1}{l_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{l_n} & \frac{1}{l_n} \end{pmatrix}.$$

Для операторов, входящих в пучок (20) справедливы неравенства при некотором $\epsilon > 0$:

$$A \geq \epsilon I, \quad M \geq \epsilon I, \quad K \geq 0.$$

Пользуясь общими результатами теории операторных пучков (см., например, [16]) получаем что все собственные значения пучка (20) лежат в замкнутой верхней полуплоскости, однако, исходя из конкретного вида пучка, покажем что все его собственные значения лежат в открытой верхней полуплоскости.

Действительно, пусть есть некоторое собственное значение λ_k на вещественной оси. Соответствующий ему собственный вектор обозначим через Y_k . Тогда из равенства

$$\lambda_k^2 (MY_k, Y_k) - (AY_k, Y_k) - i\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0 \tag{21}$$

следует $\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0$.

Ноль не является собственным значением, ввиду строгой положительности оператора A , значит $(KY_k, Y_k) = 0$. Если $Y_k = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, то это означает что $\alpha|u_n|^2 = 0$, откуда $u_n = 0$. Но тогда, из формулы (16) следует что $u_{n-1} = 0$, а из (13), что $u_k = 0$ при всех k , т.е. $Y_k = 0$, что невозможно.

Определение 1. Многочлен принадлежит классу Эрмита-Биллера (HB) если все его нули лежат в открытой верхней полуплоскости [17].

Тогда из вышесказанного следует что многочлен (19) принадлежит классу многочленов Эрмита-Биллера.

Кроме того, из самой формы многочлена (19) видно, что для него выполняется условие симметрии $\Phi(-\bar{\lambda}) = \overline{\Phi(\lambda)}$, т.е. он принадлежит классу симметричных многочленов Эрмита-Биллера и, следовательно для него выполняются условия:

- (i) $\text{Im } \lambda_k > 0$ для $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$;
(ii) $\lambda_{-k} = -\bar{\lambda}_k$ для не чисто мнимых λ_{-k} и кратности симметрично расположенных чисел совпадают.

Теорема 3. Пусть заданы числа $l > 0$ и $l_n \in (0, l)$. Для того чтобы набор комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ был спектром задачи (13)-(16) с $\sum_{k=0}^{n-1} l_k = l - l_n$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (i) и (ii). Соответствующий $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$, l и l_n набор положительных чисел $\{\{l_k\}_{k=0}^{n-1}, \{m_k\}_{k=1}^n\}$ является единственным.

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СТРУНЫ

Построим многочлен

$$\Phi(\lambda) = \prod_{-n, k \neq 0}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \quad (22)$$

Из симметрии нулей этого многочлена следует что четные многочлены:

$$P(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) + \Phi(-\lambda)}{2} \quad (23)$$

и

$$Q(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda)}{2i\lambda} \quad (24)$$

вещественны.

Коэффициент трения α находим по формуле

$$\alpha = Q(0) \left(\frac{1}{l - l_n} + \frac{1}{l_n} \right). \quad (25)$$

Величину крайней справа демпфированной массы m_n получаем следующим образом:

$$m_n = -\alpha \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda^2)}{\lambda^2 Q(\lambda^2)}. \quad (26)$$

Ввиду того что степень $P(\lambda^2)$ равна $2n$, а степень $Q(\lambda^2)$ равна $2n - 2$, предел в правой части (26) существует. Кроме того, нетрудно показать, что

$$m_n = -\alpha \left(i \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \lambda_k \right)^{-1}.$$

Отсюда, ввиду условий (i) и (ii) теоремы 3, следует, что $m_n > 0$.

Определение 2. (см. [18]) Функция $\omega(\lambda)$ называется неванлинновской функцией (или R-функцией) если:

- (1) она аналитична в полуплоскостях $\text{Im } \lambda > 0$ и $\text{Im } \lambda < 0$;

- (2) $\omega(\bar{\lambda}) = \overline{\omega(\lambda)}$ ($\text{Im}\lambda \neq 0$);
 (3) $\text{Im}\lambda \text{Im} \omega(\lambda) \geq 0$ для $\text{Im}\lambda \neq 0$.

Определение 3. (см. [18]) Неванлинновская функция $\omega(\lambda)$ называется S-функцией если $\omega(\lambda) \geq 0$ для $\lambda < 0$.

Легко показать, что функция

$$\frac{\alpha^{-1}\lambda Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)}$$

принадлежит классу S-функций и не имеет полюса в начале координат. Тогда, согласно [10], эту функцию можно разложить в цепную дробь

$$\frac{\alpha^{-1}Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)} = a_{n-1} + \frac{1}{-b_{n-1}z + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{-b_{n-2}z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_0}}}}}} \quad (27)$$

с $a_k > 0$ и $b_k > 0$ для всех k .

Мы отождествляем a_k с длиной k -го интервала l_k и b_k с k -ой массой m_k стильтесовской струны.

Получена характеристика спектра для стильтесовской струны с конечным числом сосредоточенных масс, закрепленными концами и вязким трением, приложенным к одной из крайних масс. Получен алгоритм восстановления величин точечных масс, длин интервалов между ними и коэффициента трения по спектру колебаний, общей длине струны и длине крайнего интервала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аров Д.З. *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости* // Сибирский мат. ж. – 1975. – Т.16, №.3. – С.440-465.
 [2] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны* // Доклады АН СССР – 1979. – Т.247, №.5. – С.1046-1049.

- [3] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием* // J. Operator Theory – 1989. – V.22 – P.369-395.
- [4] Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics* // Interscience, New York – 1953. – V.1
- [5] Pivovarchik V.N., *Direct and inverse problems for damped strings* // J. Operator Theory – 1999. – V.42 – P.189-220.
- [6] Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis F.D. *Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads when n is large.* // C.R. Acad. Sci. Paris, I. – 1991. – V.313 – P. 961 - 965.
- [7] Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М. *Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера.* // Прикл. матем. и мех. – 1991. – Т. 55, вып. 6. – С. 989 - 995.
- [8] Filimonov A.M., Myshkis A.D. *On properties of large wave effect in classical problem bead string vibration.* // J. of Difference Equations and Applications – 2004 – V. 10:13–15 – P. 1171-1175.
- [9] Wohlers R.M. *Lumped and distributed passive networks* // Academic Press, New York – 1969.
- [10] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и колебания механических систем* // ГИТТЛ, М. – 1950.
- [11] Stieltjes T.-L. *Recherches sur les fractions continues.* // Ann. Fac. Sci. Toulouse – 1894 – V.8 – P.1-122 – 1895 – V.9 – P. 1-47.
- [12] Бойко О.Р., Pivovarchik V.N. *Inverse problem for Stieltjes string damped at one end* // Methods of Functional Analysis and Topology – 2008 (в печати)
- [13] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping. *Applicable Analysis*, **29** (1988), 1-18.
- [14] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping II. *Integral Equations and Operator Theory*, **13** (1990), 883-897.
- [15] Boyko O., Pivovarchik V.N. *Inverse three spectral problem for a Stieltjes string and inverse problem with one dimensional damping* // Inverse Problems – 2008 – V.24, 015019.
- [16] Pivovarchik V.N. *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensional Linear Part.* // Укр. мат. журн. – 2007 – Т.59, №5 – С. 702-716
- [17] Levin B.Ja. *Distribution of zeros of entire functions* // Trans. Math. Monographs, AMS, Providence, RI – 1980 – V.5
- [18] Кац И.С., Крейн М.Г. *R-функции - аналитические функции, отображающие полуплоскость в себя. Дополнение 1 в кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.* // М.: Мир – 1968.