Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 58–65.

С. Г. Солодкий, Е. А. Лукьянова, А. В. Мосенцова

ОБ ОДНОМ БЫСТРОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрена задача конечномерного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с периодическими гармоническими ядрами и свободными членами. Построен алгоритм, с помощью которого на классе указанных уравнений достигается существенное сокращение объема вычислений по сравнению со стандартными методами без потери точности решения.

Введение и постановка задачи. На сегодняшний день в рамках IBC-теории (Informational Based Complexity) интенсивное развитие приобрели исследования, посвященные нахождению сложности для широкого круга математических задач (см., например, [1], [2], [3]). Суть этих исследований заключается в построении алгоритмов, которые для восстановления приближенного решения с необходимой погрешностью требуют существенно меньших затрат различных вычислительных ресурсов по сравнению со стандартными методами, а также в нахождении оценок минимально возможных объемов этих затрат. Более строго, под сложностью решаемой задачи понимается наименьшее количество некоторого фиксированного вычислительного ресурса, используемого при достижении наперед заданной точности приближения. В частности, для классов интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$x(t) - \int_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{0.1}$$

с 2π-периодическими коэффициентами $h(t,\tau)$ и $f(t)$ установлены точные порядковые оценки сложности (в случае коэффициентов конечной гладкости) [4], [5] и точные порядки в логарифмической шкале для сложности в случае аналитических коэффициентов [6]. Договоримся далее в качестве вычислительного ресурса, объем которого требуется сократить, рассматривать только элементарные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление). Заметим тут же, что подобного рода алгоритмы (т.е. алгоритмы, направленные на сокращение объема вычислений без потери точности) принято называть быстрыми. Объектом предлагаемых исследований являются уравнения (0.1) с гармоническими ядрами и свободными членами. Цель настоящей работы состоит в построении быстрого алгоритма для решения уравнений с гармоническими коэффициентами.

Прежде всего введем в рассмотрение необходимые обозначения и понятия. Через L_2 обозначим пространство функций $f(t), g(t)$, суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$ с обычными скалярным произведением $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ и нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. В пространстве L_2 возьмем ортонормированный базис, порождаемый тригонометрическими полиномами

$$e_0(t) \equiv 1,\ e_m(t) = \pi^{-1\backslash 2}\cos(mt), \quad e_{-m}(t) = \pi^{-1\backslash 2}\sin(mt),\ m = 1, 2, \ldots.$$

Хорошо известно (см., например, [7, с.397]), что многочлены вида $e_{l,m}(t, \tau) = e_l(t)e_m(\tau)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$ функций двух переменных $h(t, \tau)$, суммируемых в квадрате на $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_2$ и нормой $\|\cdot\|_2$, определяемыми обычным образом:

$$(h_1, h_2)_2 := \int\limits_Q h_1(t, \tau)h_2(t, \tau)\ dt\ d\tau,$$

$$\|h\|_2 := \left(\int\limits_Q h^2(t, \tau)\ dt\ d\tau\right)^{1/2}.$$

Для произвольных функций $f \in L_2$ и $h \in L_2(Q)$ их коэффициенты Фурье задаются стандартным путем

$$\hat{f}(m) := (f, e_m) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)e_m(t)\ dt,$$

$$\hat{h}(l, m) := (h, e_{l,m})_2 = \int\limits_Q h(t, \tau)e_m(t)e_l(\tau)\ dt\ d\tau.$$

Будем рассматривать следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$\Gamma^\rho = \{f :\ f \in L_2,\ \| f \|_\rho := (\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|m|}\hat{f}^2(m))^{1/2} < \infty\},$$

$$\mathcal{T}^\rho = \{h : h \in L_2(Q),\ \| h \|_{2,\rho} := (\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|l|}\rho^{-2|m|}\hat{h}^2(l, m))^{1/2} < \infty\}.$$

Известно [8, с.186], что пространства Γ^ρ и $\mathcal{T}^\rho$ состоят из 2π-периодических функций соответственно одной и двух переменных, которые являются по каждой переменной следами гармонических в единичном круге $\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ функций на окружности радиуса $\rho\{(x, y) :\ x^2 + y^2 = \rho^2\}$, $0 < \rho < 1$.

Через Γ_1^ρ обозначим шар единичного радиуса в пространстве Γ^ρ и введем в рассмотрение множество функций двух переменных

$$\mathcal{H}_\rho^\alpha = \{h :\, h \in \mathcal{T}^\rho,\, \| h \|_{2,\rho} \leq \alpha_1,\, \|(I-H)^{-1}\| \leq \alpha_2\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $Hx(t) = \int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau$. Совокупность уравнений Фредгольма (0.1) с ядрами $h(t,\tau)$ из $\mathcal{H}_\rho^\alpha$ и свободными членами $f \in \Gamma_1^\rho$ обозначим $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$.

Под способом задания дискретной информации об уравнениях из класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$ будем понимать совокупность $T = (T_1,\, T_2)$ двух произвольных наборов T_1 и T_2 линейных непрерывных функционалов

$$T_1 h = (\lambda_1(h), \lambda_2(h), \ldots, \lambda_{n_1}(h))\,, \qquad (0.2)$$
$$T_2 f = (\sigma_1(f), \sigma_2(f), \ldots, \sigma_{n_2}(f))\,,$$

заданных над множествами $\mathcal{H}_\rho^\alpha$ и Γ_1^ρ соответственно. Через $\mathcal{T}$ будем обозначать длину вектора T, то есть $\mathcal{T} = n_1 + n_2$.

Под алгоритмом φ решения уравнения (0.1) будем понимать произвольный оператор, ставящий в соответствие информационному вектору $T(h,f) = (T_1 h,\, T_2 f) \in R^{n_1+n_2}$ в качестве приближенного решения уравнения (0.1) некоторый элемент $\varphi(T,h,f) \in L_2$. При этом будем считать, что элемент $\varphi(T,h,f)$ находится в результате выполнения конечного числа элементарных операций (э.о.). Другими словами, предполагается, что приближенное решение уравнения (0.1) ищется в виде, однозначно определяемом некоторым числовым вектором $b_1, b_2, \ldots, b_l$, например, в форме сплайна или полинома, для вычисления компонент b_i которого разрешается провести лишь конечное число э.о.

В работах [9], [10, гл.1, §4] для приближенного решения уравнений (0.1) из описанного класса предложен алгоритм, состоящий в нахождении решения уравнения

$$\hat{x}(t) - H_\nu \hat{x}(t) = S_\nu f(t), \qquad (0.3)$$

где

$$H_\nu \hat{x}(t) = \sum_{(l,m)\in R_\nu} e_l(t)\hat{h}(l,m) \int\limits_0^{2\pi} e_m(\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$S_\nu f(t) = \sum_{m=-\nu}^{\nu} e_m(t)\hat{f}(m),$$

а способ задания информации представляет собой набор коэффициентов Фурье вида

$$T_1^* h = \Big(\lambda_{l,m}(h) = \hat{h}(l,m), \quad (l,m) \in R_\nu\Big)\,,$$
$$T_2^* f = \Big(\sigma_m(f) = \hat{f}(m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\Big)\,. \qquad (0.4)$$

Здесь множество R_ν координатной плоскости является ромбом

$$R_\nu = \{(l,m):\ l,m \in \mathbb{Z},\ |l| + 2|m| \le \nu\}, \quad \nu = 1,2,\dots,$$

для которого имеют место оценки

$$\nu^2 + \nu - 1 \le mathcalR_\nu := \nu_1 \le \nu^2 + \nu + 1, \quad n_2 = 2\nu + 1.$$

Отсюда следует, что для способа задания информации $T^* = (T_1^*, T_2^*)$ (0.4) справедливы соотношения

$$\nu^2 + 3\nu \le N \le \nu^2 + 3\nu + 2, \tag{0.5}$$

где $N =: \mathcal{T}^*$.

Из теоремы 4.1 [10] вытекает, что для метода (0.3), в котором используется информация (0.4), на исследуемом классе уравнений (0.1) при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ гарантирована погрешность порядка $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$. С другой стороны, в той же теореме установлен тот факт, что ни один алгоритм, при реализации которого используется N произвольных линейных непрерывных функционалов (0.2), не может обеспечить на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$ точность приближения лучшую по порядку, чем величина $O(\rho^{\sqrt{N(1+\varepsilon)}})$. Тем самым в [10] доказана оптимальность (с точностью до сколь угодно малого $\varepsilon > 0$) по порядку для способа задания информации (0.4) на указанном классе уравнений (0.1).

Продолжая исследования, инициированные в [9], [10], рассмотрим задачу построения быстрого алгоритма для уравнений (0.1) из $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$, т.е. проблему уменьшения количества э.о., необходимого для достижения на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$ заданного порядка точности. А именно, нам предстоит предъявить такой алгоритм решения (0.1), который в качестве дискретной информации использует компоненты вектора (0.4) и на всем классе уравнений $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$ гарантирует погрешность $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ за счет выполнения M э.о., где $M = O(N^{7/6})$.

Быстрый алгоритм и вспомогательные утверждения. Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. *При любом $0 \le L \le \nu$ справедливо неравенство*

$$\|H_\nu - S_L H_\nu\| \le \alpha_1 \rho^{L+1}.$$

Доказательство. Возьмем любую функцию $f \in L_2$. Тогда выполняется

$$\|(H_\nu - S_L H_\nu) f\|^2 = \sum_{|l|=L+1}^{\nu} \Bigg(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}(l,m) \hat{f}(m) \Bigg)^2 \le$$

$$\sum_{|l|=L+1}^{\nu} \Bigg(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}^2(l,m) \Bigg) \Bigg(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{f}^2(m) \Bigg) \le \|f\|^2 \sum_{|l|=L+1}^{\nu} \frac{\rho^{-2|l|}}{\rho^{-2|l|}} \Bigg(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}^2(l,m) \Bigg) \le$$

$$\leq \|f\|^2 \frac{1}{\rho^{-2(L+1)}} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|l|}\rho^{-2|m|}\hat{h}(l,m) = \rho^{2(L+1)}\|h\|_{2,\rho}^2\|f\|^2.$$

Утверждение леммы следует из полученного выше неравенства, произвольности $f \in L_2$ и определения класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$.

Для любого уравнения (0.1) из класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ рассмотрим последовательность элементов

$$x_0 = 0, \quad x_k = x_{k-1} + (I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu x_{k-1} - x_{k-1} + S_\nu f), \tag{0.6}$$

где $k = 1, 2, \ldots, K, \quad K = \{(\nu^2 + 3\nu + 2)^{1/6}\}, \quad L = K^2$. Здесь, как обычно, $\{u\}$ обозначает ближайшее сверху к u целое число.

Легко видеть, что все элементы x_k принадлежат подпространству $span(e_{-v}, \ldots, e_0, \ldots, e_v)$, причем для построения каждого x_k достаточно иметь дискретную информацию (0.4) и решить уравнение

$$\varepsilon_k = S_L H_\nu \varepsilon_k + (H_\nu x_{k-1} - x_{k-1} + S_\nu f), \quad x_k = x_{k-1} + \varepsilon_k. \tag{0.7}$$

Через φ обозначим алгоритм, который каждому уравнению (0.1) в качестве приближенного решения ставит в соответствие элемент $\varphi(T^*, h, f) := x_K$. Аналогично лемме 2 из [11] доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *В рамках алгоритма φ для представления приближенного решения x_K любого уравнения из $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ в стандартном виде $\sum\limits_{i=-\nu}^{\nu} \alpha_i e_i$ достаточно выполнить не более $O(\nu^{7/3})$ э.о.*

Основной результат.

Теорема 1. *Для достижения точности $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ на классе уравнений $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ в рамках алгоритма φ требуется вычислить N коэффициентов Фурье (0.4) и выполнить $O(N^{7/6})$ э.о.*

Доказательство. Для произвольного уравнения (0.1) из рассматриваемого класса найдем оценку величины $\|\varphi(T^*, h, f) - \hat{x}\|$, где $\varphi(T^*, h, f)$ и $\hat{x}$ — приближенные решения уравнения (0.1), соответствующие алгоритмам (0.6) и (0.3). Заметим, что алгоритмы (0.6) и (0.3) используют один и тот же набор дискретной информации (0.4), состоящий из N коэффициентов Фурье.

Чтобы найти искомую оценку, нам потребуются следующие соотношения, установленные в гл.1, §4 [10]:

$$\|x\|_\rho \leq 1 + \alpha_1\alpha_2, \tag{0.8}$$

$$\|(I - H_\nu)^{-1}\| \leq \gamma, \tag{0.9}$$

где постоянная γ не зависит от ν.

Далее, используя теорему об оценке норм резольвент близких операторов [12, с.517], неравенство (0.9) и лемму 1, для достаточно больших L получаем

$$\|(I - S_L H_\nu)^{-1}\| \le \frac{\|(I - H_\nu)^{-1}\|}{1 - \|(I - H_\nu)^{-1}\| \|H_\nu - S_L H_\nu\|} \le$$
$$\le \frac{\gamma}{1 - \gamma \|H_\nu - S_L H_\nu\|} \le \frac{\gamma}{1 - \gamma \alpha_1 \rho^{L+1}} \le \gamma_1, \tag{0.10}$$

где γ_1 не зависит от ν. Представим решение $\hat{x}$ уравнения (0.3) в следующем виде

$$\hat{x} = x_{K-1} + (I - H_\nu)^{-1}(H_\nu x_{K-1} - x_{K-1} + S_\nu f). \tag{0.11}$$

Из (0.6) и (0.11) следует

$$\hat{x} - \varphi(T^*, h, f) = \{(I - H_\nu)^{-1} - (I - S_L H_\nu)^{-1}\}(I - H_\nu)(\hat{x} - x_{K-1}) =$$
$$= (I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)(\hat{x} - x_{K-1}) =$$
$$\{(I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)\}^{K-1}(\hat{x} - x_1). \tag{0.12}$$

В силу (0.3) и (0.6) имеет место

$$\|\hat{x} - x_1\| = \|(I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)\hat{x}\| \le$$
$$\le \|(I - S_L H_\nu)^{-1}\| \|H_\nu - S_L H_\nu\| (\|x\| + \|\hat{x} - x\|). \tag{0.13}$$

Как уже упоминалось выше, в теореме 4.1 [10] было установлено, что алгоритм (0.3) гарантирует на исследуемом классе точность решения

$$\|x - \hat{x}\| = O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}}). \tag{0.14}$$

Кроме того, с учетом соотношений (0.8), (0.10), (0.13) и леммы 1, из (0.12) следует

$$\|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\| \le$$
$$\le \|(I - S_L H_\nu)^{-1}\|^K \|(H_\nu - S_L H_\nu)\|^K (\|x\|_\rho + \|\hat{x} - x\|) \le c\rho^{(L+1)K}.$$

Отсюда при $K = \{(\nu^2 + 3\nu + 2)^{1/6}\}$, $L = K^2$ имеем

$$\|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\| \le O(\rho^{\sqrt{\nu^2 + 3\nu + 2}}). \tag{0.15}$$

С помощью очевидного неравенства

$$\|x - \varphi(T^*, h, f)\| \le \|x - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\|$$

и оценок (0.5), (0.14), (0.15) окончательно получаем, что алгоритм φ (0.6) обеспечивает на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ погрешность порядка $\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}}$ при любом $\varepsilon > 0$. Для доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 2.

Обсуждение результатов. Оценим теперь эффективность предлагаемого алгоритма φ (0.6) по сравнению с другими методами, известными ранее. Для этого в первую очередь требуется подсчитать объем вычислительных затрат (в смысле количества произведенных э.о.) в рамках алгоритма (0.3), предложенного в работах [9], [10]. Нетрудно видеть, что для нахождения решения уравнения (0.3) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений размерности ν, а это в свою очередь требует (в общем случае) выполнения $O(\nu^3)$ э.о. Напомним, что при этом оба алгоритма (0.3) и (0.6) гарантируют на исследуемом классе уравнений (0.1) одинаковую по порядку точность решения ($O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$). Сузим теперь класс изучаемых уравнений путем наложения дополнительного условия на норму интегрального оператора $\|H\| \leq q < 1$. В этом случае традиционно применяется метод последовательных приближений. В качестве конечного набора функционалов (0.2) используем оптимальный способ задания дискретной информации (0.4). Таким образом, описанный алгоритм (обозначим его $\hat{\varphi}$) принимает вид

$$x'_0 = 0,\, x'_k = H_\nu x'_{k-1} + S_\nu f,\, k = 1, 2, \ldots \tag{0.16}$$

Определим количество K_* шагов итерации, обеспечивающих на исследуемом классе ту же точность приближения $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого в силу (0.5) достаточно определить наименьшее k, удовлетворяющее условию $q^k \leq C\rho^{\sqrt{\nu^2+3\nu}}$. Тогда очевидно, что алгоритму $\hat{\varphi}$ для достижения нужного уровня погрешности необходимо выполнить не менее $O(\nu)$ итераций (0.16). Кроме того, согласно лемме 2 построение каждого элемента x'_k требует $2\nu^2 + 2\nu + 1$ э.о. С учетом соотношения $K_* \geq O(\nu)$ для алгоритма $\hat{\varphi}$ получаем нижнюю оценку общего объема его вычислительных затрат, равную по порядку $O(\nu^3)$.

Выводы. Сравнительный анализ эффективности трех обсуждаемых алгоритмов показывает, что для достижения одинаковой по порядку точности решения уравнений (0.1) предлагаемый алгоритм φ требует выполнения существенно меньшего числа э.о., чем (0.3) и (0.16). Тем самым было установлено, что построенный нами алгоритм действительно является более быстрым (в указанном выше смысле) по сравнению с известными ранее методами, предназначенными для решения уравнений (0.1) с гармоническими коэффициентами.

Список литературы

[1] Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.

[2] Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х. Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183 с.

[3] Переверзев С. В. Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений.// Киев: Институт математики НАН Украины. - 1996 - 252 с.

[4] Переверзев С.В. Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами.// Сиб.мат.журн. 1991. Т. 32. N 1. С.107–115.

[5] Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. Information complexity of multivariate Fredholm integral equation in Sobolev classes// J. Complexity 1996. V.12. P. 17 - 34.

[6] Переверзев С. В., Азизов М. Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с аналитическими коэффициентами// Укр. мат. журнал. 1996. Т. 48. № 5. С. 656-665.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 5-е. М.: Изд-во Наука, 1981. – 544 с.

[8] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

[9] Азизов М. Информационная сложность приближенного решения уравнений Фредгольма с гармоническими ядрами и свободными членами// Доповіді НАН України. 1996. №5. С.24-28.

[10] Азизов М. Информационная сложность приближенного решения интегральных уравнений и смежные вопросы теории приближенных методов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук. – Киев: Ин-т математики НАНУ. 1998. –259 с.

[11] Солодкий С. Г. Об одном алгоритме решения уравнений Фредгольма с гармоническими коэффициентами.// Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. №9. С.1286-1290.

[12] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.– М.: Наука, 1977. – 744 с.