Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 53–57.

Н. В. Лактионова

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

В работе изучается скалярная задача, моделирующая процесс нормальных колебаний тяжелой вязкой жидкости, частично заполняющей некоторый контейнер. Исследуется процесс миграции собственных значений с положительной полуоси в комплексную плоскость при изменении главного физического параметра - вязкости.

Введение

Задачи о движении твердых тел с полостями, заполненными жидкостями, являются классическими. В монографии [2] изучена классичекая задача о нормальных колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном контейнере. В данной работе на модельном примере проводится качественные и количественные исследования спектра (частот и декрементов затухания) нормальных движений тяжелой вязкой жидкости в сосуде.

Постановка задачи

В частности, изучается спектральная задача вида

$$\begin{aligned} &\Delta u + \mu u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u = 0 \text{ (на } S), \\ &\mu \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha^2 u \text{ (на } \Gamma), \quad \mu \in \mathbb{C}; \end{aligned} \qquad (1),$$

где $\Omega = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{(x,y) : 0 < x < \pi, y = 1\}$, $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$,
$\mu = \lambda\alpha$ - спектральный параметр, λ - комплексный декремент затухания, а $\alpha = \nu^{-1}$, ν - кинематическая вязкость жидкости.

Требуется определить числа $\mu \neq 0$, при которых задача (1) допускает ненулевое решение (собственные функции), а также исследовать процесс перехода собственных значений $\mu = \mu(\alpha)$ с положительной полуоси в комплексную плоскость при возрастании α^2 от малых значений (уменьшение вязкости) до достаточно больших.

Предварительные свойства спектра. Опишем простейшие свойства спектра задачи (1), считая, что Ω, Γ и S - произвольные $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega = S \cup \Gamma$.

1. Число $\mu = 0$ не является собственным значением. Действительно, если $\mu = 0$, то $\Delta u = 0$ (в Ω), $u = 0$ ($\partial\Omega$). Значит, $u \equiv 0$, а это противоречит постановке задачи (1).

2. Если u - решение спектральной задачи (1), то $\operatorname{Re}\mu > 0$. Действительно,

$$-\int\limits_\Omega \Delta u \cdot \overline{u} d\Omega = \mu \int\limits_\Omega |u|^2 d\Omega = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega - \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \overline{u}\, d\Gamma,$$

Поэтому

$$\mu \int\limits_\Omega |u|^2 d\Omega = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega - \frac{\alpha^2}{\mu} \int\limits_\Gamma |u|^2 d\Gamma; \tag{2}$$

$$\mu \int\limits_\Omega |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{\mu} \int\limits_\Gamma |u|^2 d\Gamma = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega; \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\mu(\int\limits_\Omega |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{|\mu|^2}\,\mu \int\limits_\Gamma |u|^2 d\Gamma) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega;$$

$$\operatorname{Re}\mu = \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega}{\int\limits_\Omega |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{|\mu|^2} \int\limits_\Gamma |u|^2 d\Gamma}\, \mu > 0.$$

3. Из (2) имеем (в краткой записи)

$$\mu^2 ||u||^2_\Omega - \mu ||u||^2_{1,\Omega} + \alpha^2 ||u||^2_\Gamma = 0;$$

$$\mu_\pm = \frac{||u||^2_{1,\Omega} \pm \sqrt{||u||^4_{1,\Omega} - 4\alpha^2 ||u||^2_\Omega\, ||u||^2_\Gamma}}{2||u||^2_\Omega}.$$

Поскольку норма $||u||^2_{1,\Omega}$ эквивалентна стандартной норме $||u||^2_{W_2^1}$ (см.[3]), то по теореме вложения и теоремах о следах:

$$||u||^2_\Omega \le c_\Omega ||u||^2_{1,\Omega}, \;\; ||u||^2_\Gamma \le c_\Gamma ||u||^2_{1,\Omega},$$

тогда

$$||u||_{1,\Omega} - 4\alpha^2\, ||u||^2_\Omega\, ||u||^2_\Gamma \ge (1 - 4\alpha^2 c_\Omega c_\Gamma) ||u||_{1,\Omega}.$$

Из полученного неравенства следует, если $4\alpha^2 c_\Omega c_\Gamma < 1$, то корни только вещественные (вязкость велика).

4. Если $4\alpha^2 c_\Omega c_\Gamma \geq 1$, то могут быть невещественные корни (комплексно-сопряженные пары), что соответствует случаю достаточно малой вязкости.

5. Задача имеет дискретный спектр с предельными точками $\mu = 0$ и $\mu = +\infty$, конечное число невещественных собственных значений при любой вязкости $\nu > 0$ (это будет установлено далее на модельной задаче).

Получение, асимптотическое исследование и решение характеристических уравнений. Применяя метод разделения переменных ([1]), решение задачи (1) ищем в виде:

$$u = u_k(x, y) = \sin(kx)Y_k(y), \quad k = 1, 2, ...$$

Тогда, используя этот вид решения в (1), получим задачу для определения функциий $Y_k(y)$:

$$\begin{gathered} Y'' + (\mu - k^2)Y = 0, \;\; 0 < y < 1 \\ \mu Y_k'(1) = \alpha^2 Y_k(1). \end{gathered} \tag{4}$$

Для общего исследования характеристических уравнений (4) задачи, рассмотрим функцию

$$f_k(\delta) := \begin{cases} \delta^2\sqrt{k^2-\delta^2}\,\mathrm{cth}(\sqrt{k^2-\delta^2}), 0 < \delta < k, \\ k^2, \qquad \delta = k \\ \delta^2\sqrt{\delta^2-k^2}\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\delta^2-k^2}), k < \delta < \infty. \end{cases} \qquad (5),$$

где $\delta = \sqrt{\mu} > 0$, $0 < \alpha^2 < \infty$. Тогда основное трансцендентное уравнение для нахождения вещественных корней принимает вид

$$f_k(\delta) = \alpha^2, \quad k = 1, 2... \qquad (6).$$

Как функция комплексной переменной δ функция $f_k(\delta)$ зависит лишь от δ^2, и является мероморфной функцией с простыми полюсами в тех точках, где $\mathrm{ctg}\, x$ имеет ненулевые полюсы , то есть в точках $\sqrt{\delta^2 - k^2} = \pi n$. Это вещественные полюсы $\delta_{kn}^2 = k^2 + \pi^2 n^2$. Из теории аналитических функциий (по теореме Миттаг-Леффлера) мероморфную функцию ctg(z) можно представить в виде ряда([4]). Тогда функция $f_k(\delta)$ принимает вид:

$$f_k(\delta) = \delta^2 \left\{ 1 + 2(\delta^2 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2 - k^2 - n^2\pi^2} \right\}. \tag{7}$$

В такой форме функция $f_k(\delta)$ выражается единой формулой при любом δ^2. Рассмотрим уравнение, аппроксимирующее уравнение (7), $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\alpha^2 = \delta^2 \left\{ 1 + 2(\delta^2 - k^2) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\delta^2 - k^2 - n^2\pi^2} \right\};$$

оно сводится к нахождению нулей многочлена степени N+1 (относительно δ^2); при этом количество вещественных положительных δ^2 будет равно N-1 плюс два вещественных, если есть пересечение кривых(графиков левой и право часте уравнения) или невещественных, если пересечений нет.

Выводы

Опишем кратко итоги численного решения задачи (1). Практическая значимость работы состоит в том, что на модельном примере стал ясен механизм перехода собственных значений с действительной оси в комплексную плоскость при уменьшении вязкости. С другой стороны, как показало изучение задачи, данный модельный пример хорошо качественно описывает спектральную картину при большой вязкости и недостаточно адекватно - при малой.

Учитывая вышеизложенное результаты численных расчетов, проведенных с помощью пакета математических расчетов Maple (вычисление α_k, расчет и построение траекторий $\lambda(\alpha)$), можно сформулировать основные итоги исследования:

1. Модельная задача (1) имеет дискретный спектр с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$.

2. При $\alpha^2 \ll 1$ спектр задачи (1) состоит из двух ветвей положительных и отрицательных собственных значений λ_k^+ и λ_k^-, причем $\lambda_k^+ \to +\infty$, $\lambda_k^- \to 0$ при $k \to \infty$.

3. Каждому номеру k соответствует критическое значение значение параметра α_k^2, такое, что при $\alpha^2 > \alpha_k^2$ к счетному множеству вещественных собственных значений добавляется пара невещественнх собственных значений (для каждого номера - единственная), расположенных симметрично относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

4. Как показали вычисления, предложенная модель хорошо описывает качественную сторону процесса малых колебаний вязкой жидкости при достаточно малых значениях α^2, а также в некотором диапазоне после критических значений.

С другой стороны, данная модель не дает даже качественной картины исследуемого явления при больших значениях α^2. Это можно объяснить тем, что в этом случае задача (1) содержит малый параметр μ при старших производных, возникают решения типа пограничного слоя, которые должны описываться другой моделью.

5. Доказанные выше общие свойства решений справедливы и в модельной задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости в открытом цилиндрическом сосуде, то есть в задаче (1) при $\Omega = \Gamma \times (0,1),\ \ \Gamma \in \mathbb{R}^2$,
$\mathrm{S} = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, где Γ - произвольное поперечное сечение сосуда Ω.

В этом случае вместо функций $\sin kx$ и чисел k возникают собственные функции $\varphi = \varphi_k(x_1, x_2)$ задачи

$$-\Delta_2\varphi = \beta\varphi,\ \ (x_1, x_2) \in \Gamma,\quad \varphi = 0\ \ (\partial\Gamma),$$

отвечающие собственным значениям $\beta = \beta_k,\quad k = 1, 2, \ldots$, образующим дискретный спектр: $0 < \beta_1 \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_k \leq \ldots,\ \ \beta_k \to +\infty\ (k \to \infty)$.

Таким образом, качественно и количественно исследована модельная несамосопряженная спектральная задача, порожденная проблемой нормальных колебаний вязкой жидкости в открытом сосуде. Найдены критические значения параметров вязкости, при которых собственные значения задачи сливаются и выходят с положительной полуоси парами в комплексную плоскость. Получены графики собственных значений как функций параметра вязкости и асимптотические формулы. Разработана программа вычисления вещественных и невещественных корней характеристических уравнений задачи.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н. Д. Копачевскому за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука,1982,336с
[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.:Наука, 1989, 416с.
[3] Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики. Курс лекций, 2001.
[4] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985, 336с

У роботі вивчається скалярне задача, що моделює процес нормальних коливань важкої грузлої рідини, що частково заповнює деякий контейнер. Досліджується процес міграції власних значень із позитивної півосі в комплексну площину при зміні головного фізичного параметра - в'язкості.

Explored high-quality and in number model spectral problem, generated a problem normal vibrations of viscid liquid in the opened vessel.