Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 42–52.

А. И. Криворучко

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С АФФИННЫМИ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Получена аффинная классификация пар аффинных отражений относительно аффинных прямых, а также групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены все полуинварианты этих групп.

Введение. Пусть Φ – алгебраическая поверхность, заданная в n-мерном аффинном пространстве уравнением $F = 0$, где F – неприводимый многочлен. Если Φ имеет бесконечное множество гиперплоскостей симметрии, то F – инвариант соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей. Поэтому построение канонических уравнений алгебраических поверхностей с бесконечными множествами гиперплоскостей симметрии сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечных групп отражений, чему посвящен целый ряд работ (см., например, [1]–[3]). В то же время при изучении алгебраических поверхностей с бесконечными множествами осей симметрии приходится учитывать следующее: если поверхность Φ имеет бесконечное множество осей симметрии, то F, являясь полуинвариантом соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно прямых, может не быть инвариантом какой-либо бесконечной группы отражений. Пример такой поверхности, как следует из результатов работ [4] и [5], – линейчатая поверхность Кэли, которая задается в аффинной системе координат (x_1, x_2, x_3) трехмерного аффинного пространства уравнением $x_1 + x_2x_3 + x_3^3 = 0$. Поэтому найденные в [5] инварианты нецентроаффинных групп, порожденных отражениями относительно прямых и действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях, не позволяют прямо получить уравнение любой нецилиндрической алгебраической поверхности с бесконечным множеством осей симметрии, имеющих пустое пересечение. В связи с этим возникает *следующая задача*: Вычислить полуинварианты групп, порожденных аффинными отражениями относительно прямых.

Ниже эта задача решается для бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Цель работы – построение аффинной классификации пар отражений и групп, порождаемых двумя отражениями относительно прямых, а также вычисление полуинвариантов таких групп.

Основные результаты работы: Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

1^o. **Инварианты некоторых однопараметрических групп.** Пусть V – линейное вещественное n-мерное пространство,

$$(e_1, \dots, e_n) \tag{1}$$

– некоторый заданный в этом пространстве базис с соответствующей системой координатных функций $(x_1, \dots, x_n)$ (т.е. двойственным базисом в пространстве V^*).

Если $A \subseteq V$, то $\langle A \rangle$ – линейная оболочка A.

Если X – множество с заданной на нем системой координат $(x, \dots, z)$, то равенство $T = \{x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)\}$ означает, что $T : X \to X$ – отображение, имеющее координатное представление $x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)$; при этом если значение y' некоторой координаты y не определяется в координатном представлении T, то считается, что $y' = y$.

Пусть Λ – аффинная прямая, P – гиперплоскость, лежащие в V, и $\Lambda \nparallel P$; тогда (Λ, P) обозначает отражение относительно Λ в направлении P. Если $c \in \Lambda$, a – направляющий вектор Λ, $\xi \in V^*$, $P = \ker \xi$, то для любого вектора $v \in V$

$$(\Lambda, P)(v) = -v + 2\,(\xi(a))^{-1}\,\xi(v - c)\,a + 2\,c.$$

Далее $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbf{K} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$; $\mathbf{K}^G$ – алгебра полиномиальных инвариантов, а $\mathbf{K}(G)$ – множество всех полуинвариантов группы G.

Для любого подмножества $I \cup \{x, \dots, z\}$ кольца $\mathbf{K}$ пусть $I\,\langle x, \dots, z \rangle$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I, "переменными" $x, \dots, z$ и одночленами, имеющими только четные степени относительно "переменных" $x, \dots, z$; $I\lfloor x, \dots, z \rfloor$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I, "переменными" $x, \dots, z$ и одночленами, имеющими только нечетные степени относительно "переменных" $x, \dots, z$.

Пусть $F = f(x, \dots, z) \in I[x, \dots, z]$. *Из равенства* $f(-x, \dots, -z) = F$ *следует, что* $F \in I\,\langle x, \dots, z \rangle$, *а если* $f(-x, \dots, -z) = -F$, *то* $F \in I\lfloor x, \dots, z \rfloor$.

В системе координат (1) для любого $t \in \mathbb{R}$ положим

$$A^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2\,x_3/2 + t^3/6,\ \ x_2' = x_2 + t\,x_3 + t^2/2,\ \ x_3' = x_3 + t\},$$

$$B^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2,\ \ x_3' = x_3 + t\}, \quad P^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2/2,\ \ x_2' = x_2 + t\},$$

$$N^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2\,x_3/2,\ \ x_2' = x_2 + t\,x_3,\ \ x_4' = x_4 + t\}, \quad S^t = \{x_1' = x_1 + t\}.$$

Если $t \neq 0$, то A^t – параболический сдвиг с переносом, B^t – винтовой сдвиг, S^t – перенос, P^t – параболический поворот, N^t – винтовой параболический сдвиг.

$\mathcal{A} = (A^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (B^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{P} = (P^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{N} = (N^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = (S^t : t \in \mathbb{R})$ – однопараметрические группы. Найдем их инварианты.

Пусть $F = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}$.

Если $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{A}}$, то применяя к F преобразование A^t, получим

$$F = f(x_1 + t\,x_2 + t^2 x_3/2 + t^3/6,\ x_2 + t\,x_3 + t^2/2,\ x_3 + t,\ x_4, \ldots, x_n).$$

Полагая $t = -x_3$, получим $F = f(x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ x_2 - x_3^2/2,\ 0,\ x_4, \ldots, x_n)$. Но $x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ 2\,x_2 - x_3^2,\ x_4, \ldots, x_n$ – инварианты группы $\mathcal{A}$. Следовательно,

$$\mathbf{K}^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ 2\,x_2 - x_3^2,\ x_4, \ldots, x_n]. \tag{2}$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{gathered}\mathbf{K}^{\mathcal{B}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\ x_2,\ x_4, \ldots, x_n], \quad \mathbf{K}^{\mathcal{P}} = \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2,\ x_3, \ldots, x_n],\\ \mathbf{K}^{\mathcal{N}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\ x_2 - x_3x_4,\ x_3,\ x_5, \ldots, x_n], \quad \mathbf{K}^{\mathcal{S}} = \mathbb{R}[x_2, \ldots, x_n].\end{gathered} \tag{3}$$

2^o**. Группы, порожденные двумя отражениями.** Пусть в пространстве V для каждого $i \in \{1;\ 2\}$ задано отражение $R_i = (\Lambda_i,\ P_i)$ относительно аффинной прямой Λ_i в направлении линейной гиперплоскости P_i; L_i – линейная прямая, параллельная Λ_i; $S = L_1 + L_2$, $Q = P_1 \cap P_2$; $T = R_2R_1$, G – группа, порожденная R_1 и R_2; $\bar{G}$ – замыкание группы G в топологии Зарисского группы $\mathrm{Aff}(V)$ всех аффинных преобразований пространства V; $F \in \mathbf{K}(G)$.

Очевидно, что $R_1^2 = R_2^2 = \mathrm{id}$, $T\,R_1 = R_1T^{-1} = R_2$. Поэтому

$$G = \{T^m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{T^m R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть χ_F – характер группы G, являющийся весом F (т.е. $F \cdot g^{-1} = \chi_F(g)\,F$ для каждого элемента g группы G). Тогда $\chi_F(G) \subseteq \{-1;\ 1\}$. При этом если G' – компонента единицы id_V группы G, то $\chi_F(G') = \{1\}$. Кроме того, $F \in \mathbf{K}(\bar{G})$, а F как полуинвариант группы $\bar{G}$ имеет вес $\tilde{\chi}_F$, являющийся непрерывным продолжением веса χ_F, и $\tilde{\chi}_F(G) \subseteq \{-1;\ 1\}$.

Рассматривая все возможные случаи “взаимного расположения” P_1, P_2, Λ_1, Λ_2, построим канонический базис пары $(R_1,\ R_2)$, и в этом базисе найдем координатные представления элементов группы $\bar{G}$, а также полуинварианты группы G.

Не нарушая общности, далее считаем, что $\Lambda_1 = L_1$; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то и $\Lambda_2 = L_2$, а если $P_1 \neq P_2$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ и $V = S \oplus Q$, то $\vec{0} \in \Lambda_2 + Q$.

Отсюда следует, что $P_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. Зафиксируем $c \in P_1 \cap \Lambda_2$. При этом если $Q \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то считаем, что $c \in Q \cap \Lambda_2$.

1. $L_1 = L_2$, $P_1 = P_2$.

При построении канонического базиса (1) пары $(R_1,\ R_2)$ полагаем, что $e_1 \in L_1$, $(e_2, \ldots, e_n)$ – базис в P_1, причем если $L_1 \neq \Lambda_2$, то $e_2 = 2\,c$.

В каноническом базисе $R_1 = \{x'_i = -x_i \ \ (i > 1)\}$.

1.1. $L_1 = \Lambda_2$.

В этом случае $R_1 = R_2$, $G = \{\mathrm{id},\, R_1\}$.

Пусть $F = f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $f(x_1,\, -x_2, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_2, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1]\lfloor x_2, \ldots,\, x_n\rfloor$.

1.2. $L_1 \neq \Lambda_2$.

Теперь $e_2/2 \in \Lambda_2$ и $e_1 \parallel \Lambda_2$. Полагая $\mathcal{S} = (S^t \,:\, t \in \mathbb{R})$, где $S^t = \{x'_2 = x_2 + t\}$, имеем: $T = S^1$, $\bar{G} = \mathcal{S} \cup (\mathcal{S} \cdot R_1)$. Но тогда $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{S}}$, т.е. $F \in \mathbb{R}[x_1,\, x_3, \ldots,\, x_n]$, и, как в случае **1.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$.

2. $L_1 = L_2$, $P_1 \neq P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots,\, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in L_1$, $e_2 \in P_1 \setminus Q$, $e_1 + 2\,e_2 \in P_2$; если $n > 2$, то $(e_3, \ldots,\, e_n)$ – базис Q; при этом если $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$ (и тогда $c \notin Q$), то $e_2 = 2\,c$, а если $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$ (и тогда $n > 2$, $c \in Q \setminus \{\vec{0}\}$), то $e_3 = 2\,c$.

2.1. $L_1 = \Lambda_2$.

Для любого вещественного t пусть $D^t = \{x'_1 = x_1 + t\,x_2\}$. Тогда $\mathcal{D} = \{D^t \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа сдвигов, $T = D^1$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F имеем:

$$F = f(x_2, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_2, \ldots,\, x_n]. \tag{4}$$

Теперь, как и в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}\langle x_2, \ldots,\, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}\lfloor x_2, \ldots,\, x_n\rfloor.$$

2.2. $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$.

Определяя P^t и $\mathcal{P}$ так же, как в п. 1^o, получаем: $T = P^1$. Отсюда $\bar{G} = \mathcal{P} \cup (\mathcal{P} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) имеем: $F = f(2x_1 - x_2^2,\, x_3, \ldots,\, x_n) \in \mathbf{K}^{\mathcal{P}}$. Поэтому из R_1-полуинвариантности F следует, что $f(2x_1 - x_2^2,\, -x_3, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor.$$

2.3. $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = B^1$, $\bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F = f(x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n]. \tag{5}$$

Отсюда $f(x_1 - x_2x_3,\, -x_2,\, -x_4, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F, и $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_2]\langle x_2,\, x_4 \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3]\lfloor x_2,\, x_4 \ldots,\, x_n\rfloor$.

3. $L_1 \neq L_2$, $P_1 = P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; $e_1 + 2\,e_2 \in L_2$; если $n > 2$, то $(e_1, e_3, \ldots, e_n)$ – базис P_1; если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 2$), то $e_3 = 2\,c$.

3.1. $\Lambda_1 = L_1$, $\Lambda_2 = L_2$.

Определяя D^t и $\mathcal{D}$ так же, как случае **2.1**, получаем: $T = D^1$, $\bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F следует (4). Теперь, как в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_3, \ldots, x_n\rangle; \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_3, \ldots, x_n\rfloor.$$

3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = B^1$, $\bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из $\mathcal{B}$-инвариантности F получаем (5). Поэтому из R_1-полуинвариантности F следует, что $f(-x_1 + x_2x_3,\, x_2,\, -x_4, \ldots, -x_n) \in \{-F, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3,\, x_4, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_1 - x_2x_3,\, x_4, \ldots, x_n\rfloor.$$

4. $L_1 \neq L_2$, $V = S \oplus Q$.

Пусть J – отражение относительно плоскости Q в направлении плоскости S.

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Построим в V базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; при этом если $L_2 \subseteq P_1$, а $L_1 \nsubseteq P_2$, то $e_1 + 2\,e_2 \in P_2$; если же $L_2 \nsubseteq P_1$, то $e_1 + \alpha\,e_2 \in L_2$;

2) если $n > 2$, то $(e_3, \ldots, e_n)$ – базис Q; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, то $e_3 = 2\,c$.

Отсюда $R_1 = \{x_i' = -x_i \ (i \neq 2)\}$, $J = \{x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2\}$.

Если $n > 2$, то полагаем $\mathcal{S} = \{S^t : t \in \mathbb{R}\}$, где $S^t = \{x_3' = x_3 + t\}$.

4.1. $L_1 \subset P_2$, $L_2 \subset P_1$, $\Lambda_2 = L_2$.

В этом случае $T = R_2R_1 = R_1R_2 = J$, и поэтому $G = \{\mathrm{id}, J, R_1, R_2\}$.

Возможны лишь следующие случаи.

а) F – T-инвариантный многочлен.

Значит, $F = g(x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1, x_2\rangle[x_3, \ldots, x_n]$; теперь из R_1-полуинвариантности F получаем: $g(x_1^2, x_2^2, -x_1x_2, -x_3, \ldots, -x_n) \in \{-F, F\}$.

б) F – не T-инвариантный многочлен.

Меняя, если нужно, нумерацию x_1 и x_2, можем считать, что F – R_1-инвариантный, но не R_2-инвариантный многочлен. Тогда

$$F = g(x_2, x_1^2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \ldots, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1, x_3, \ldots, x_n\rangle$$

в силу R_1-инвариантности F, и теперь в из T-полуинвариантности F следует, что $g(-x_2, x_1^2, -x_1x_3, \ldots, -x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \ldots, x_n^2) = -F$.

В результате получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2]\langle x_1x_2, x_3, \ldots, x_n\rangle$,

$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\lfloor x_1x_2,\, x_3, \ldots,\, x_n\rfloor \cup$

$\cup\, \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle \lfloor x_2,\, x_1x_3, \ldots,\, x_1x_n\rfloor \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle \lfloor x_1,\, x_2x_3, \ldots,\, x_2x_n\rfloor.$

4.2. $L_1 \subset P_2,\;\; L_2 \subset P_1,\;\; L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset.$

В этом случае $P_2 = \ker x_1,\;\; e_1 \parallel \Lambda_2,\;\; e_3/2 \in \Lambda_2$. Отсюда $T = J\, S^1 = S^1 J$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{S} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Следовательно, $\mathbf{K}^G \subseteq \mathbf{K}^{\mathcal{S}} = \mathbb{R}[x_1,\, x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n]$. Теперь, как и в случае **4.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\langle x_1x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n\rangle$,

$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\lfloor x_1x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n\rfloor \cup$

$\cup\, \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_4, \ldots,\, x_n\rangle \lfloor x_2,\, x_1x_4, \ldots,\, x_1x_n\rfloor \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \ldots,\, x_n\rangle \lfloor x_1,\, x_2x_4, \ldots,\, x_2x_n\rfloor.$

4.3. $L_1 \nsubseteq P_2,\;\; L_2 \subseteq P_1$.

В этом случае $e_1 \in L_2$, $P_2 = \ker(2\,x_1 - x_2)$.

4.3.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Пусть D^t и $\mathcal{D}$ в построенном базисе определяются так же, как и в случае **2.1**. Тогда $T = J\, D^1 = D^1 J,\;\; \bar{G} = \mathcal{D} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F получаем (4). Теперь, как и в случае **4.1**, имеем:

$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$;

F – T-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$, тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}[x_2^2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$;

F – R_1-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$, тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$.

Допустим теперь, что F – R_2-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$. Тогда $f(x_2,\, -x_3, \ldots,\, -x_n) = -F$ в силу (4) и R_1-полуинвариантности F. Следовательно, $F \in \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$. При этом $f(-x_2,\, x_3, \ldots,\, x_n) = -F$, т.к. F полуинвариантен относительно T. Отсюда $F \in \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$.

Значит, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2^2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor \cup \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle \cup \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, получаем: $T = B^1 J = J\, B^1$, и отсюда $\bar{G} = \mathcal{B} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Из $\mathcal{B}$-инвариантности F имеем (5).

Рассмотрим теперь следующие случаи.

а) F инвариантен относительно J.

С учетом (5) получаем: $f(-x_1 + x_2x_3,\, -x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n) = F$. Поэтому

$$F = g((x_1 - x_2x_3)^2,\, (x_1 - x_2x_3)\, x_2,\, x_2^2,\, x_4, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_4, \ldots, x_n]\langle x_1 - x_2x_3,\, x_2\rangle.$$

Теперь из R_1-инвариантности F имеем:

$$g((x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\, x_2,\, x_2^2,\, -x_4, \ldots,\, -x_n) = F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1, то

$$g((x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_2^2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = -F.$$

b) F не инвариантен относительно J.

В этом случае если F инвариантен относительно R_1, то

$$f(-x_1 + x_2x_3,\, x_2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = F.$$

Отсюда

$$F = g(x_2,\, (x_1 - x_2x_3)^2,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_n,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle,$$

и из полуинвариантности F относительно J имеем:

$$g(-x_2,\, (x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_n,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) = -F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1, то F инвариантен относительно R_1J. Но тогда $f(x_1 - x_2x_3,\, -x_2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = F$. Поэтому

$$F = g(x_1 - x_2x_3,\, x_2^2,\, x_2x_4,\, \dots,\, x_2x_n^2,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \dots,\, x_n]\langle x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle,$$

и $g(-x_1 + x_2x_3,\, x_2^2,\, -x_2x_4,\, \dots,\, -x_2x_n^2,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) = -F$ в силу полуинвариантности F относительно J.

Таким образом, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2,\, x_2^2]\langle (x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle$,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G &\cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2,\, x_2^2]\lfloor (x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rfloor \cup \\ &\cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2]\langle x_4, \dots,\, x_n\rangle\lfloor x_2,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_n\rfloor \cup \\ &\cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \dots,\, x_n\rangle\lfloor x_1 - x_2x_3,\, x_2x_4, \dots,\, x_2x_n\rfloor.\end{aligned}$$

Случай $L_1 \subseteq P_2,\, L_2 \nsubseteq P_1$ аффинно эквивалентен случаю **4.3**.

4.4. $L_1 \nsubseteq P_2,\, L_2 \nsubseteq P_1,\, L_1 \neq L_2$.

Для $i \in \{1;\, 2\}$ пусть $L_i' = P_i \cap S$. Двойное отношение

$$\varkappa = (L_1,\, L_1';\, L_2,\, L_2')$$

прямых $L_1,\, L_1',\, L_2,\, L_2'$ назовем двойным отношением пары $(R_1,\, R_2)$.

По условию, $e_1 + \alpha\, e_2 \in L_2$, и из определения $\varkappa$ следует, что $e_1 + \varkappa\,\alpha\, e_2 \in P_2$. Поэтому $P_2 = \ker(\alpha\,\varkappa\, x_1 - x_2)$, $\varkappa \notin \{0;\, 1\}$.

Положим $\mu = \sqrt{|\varkappa|}$, $\alpha = \mu^{-1}$. Получаем базис, в котором $\mu\, e_1 + e_2 \in L_2$, $P_2 = \ker((\operatorname{sgn}\varkappa)\,\mu\, x_1 - x_2)$.

4.4.1. $\varkappa > 0$.

Пусть $\mathcal{H} = (H^t\, :\, t \in \mathbb{R})$, где $H^t = \{x_1' = x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t,\;\; x_2' = x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t\}$.

4.4.1.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Если $\varkappa < 1$, то при $\varphi = 2\operatorname{arth}\mu$ имеем: $T = H^{\varphi}$, $G = \{H^{m\varphi},\, H^{m\varphi}R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varkappa > 1$, то полагая $\varphi = 2\operatorname{arcth}\mu$, получаем:

$$T = H^{\varphi}J, \quad G = \{H^{2m\varphi},\ H^{(2m+1)\varphi}J,\ H^{2m\varphi}R_1,\ H^{(2m+1)\varphi}J\,R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому при любом положительном $\varkappa$, не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H}\cdot\{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$, и из $\mathcal{H}$-инвариантности F имеем: $F = f(x_1^2 - x_2^2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n]$.

Но тогда $f(x_1^2 - x_2^2,\, -x_3,\, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_2,\, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\lfloor x_3,\, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.4.1.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Если $\varkappa < 1$, то полагая $\varphi = 2\operatorname{arth}\mu$, получаем:

$$T = H^{\varphi}S^1, \quad G = \{H^{m\varphi}S^m,\, H^{m\varphi}S^mR_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Если же $\varkappa > 1$. Полагая $\varphi = 2\operatorname{arcth}\mu$, получаем: $T = H^{\varphi}S^1J$,

$$G = \{H^{2m\varphi}S^{2m},\ H^{(2m+1)\varphi}S^{2m+1}J,\ H^{2m\varphi}S^{2m}R_1,\ H^{(2m+1)\varphi}S^{2m+1}J\,R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Таким образом, учитывая периодичность функции $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, получаем, что при любом положительном $\varkappa$, не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H}\cdot\mathcal{S}\cdot\{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Но тогда из $\mathcal{S}$-инвариантности F следует, что F не зависит от x_3. Теперь, как и в случае **4.4.1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_4, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\lfloor x_4,\, \ldots,\, x_n\rfloor.$$

4.4.2. $\varkappa < 0$.

Пусть $\mathcal{E} = (E^t \,:\, t \in \mathbb{R})$, где $E^t = \{x_1' = x_1\cos t - x_2\sin t,\ \ x_2' = x_1\sin t + x_2\cos t\}$.

Положим $\varphi = -2\operatorname{arctg}\mu$.

4.4.2.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Тогда $T = E^{\varphi}$, $G = \{E^{m\varphi},\, E^{m\varphi}R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то G конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m, и полуинварианты группы G могут быть выражены через базисные инварианты группы H_2^m (см. [6]).

Допустим, что φ не соизмеримо с π. Тогда G бесконечна и $\bar{G} = \mathcal{E}\cup(\mathcal{E}\cdot R_1)$ (такое же замыкание G имеет и относительно евклидовой топологии группы $\mathrm{Aff}(V)$).

Теперь из $\mathcal{E}$-инвариантности F следует, что

$$F = f(x_1^2 + x_2^2,\, x_3, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2,\, x_3, \ldots,\, x_n].$$

Из R_1-полуинвариантности F получаем: $f(x_1^2 + x_2^2,\, -x_3, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\lfloor x_3,\, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.4.2.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Тогда $T = E^{\varphi}S^1$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то полагая $\psi = 2\pi/m$ и $G_0 = \{E^{l\psi},\, E^{l\psi} R_1 \,:\, l = 0, \ldots, m-1\}$, получаем:

$$G = G_0 \cdot \{S^l \,:\, l \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{G} = G_0 \cdot \mathcal{S}.$$

При этом G_0 конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m, полуинварианты группы G не зависят от x_3 и выражаются через базисные инварианты группы H_2^m.

Допустим теперь, что φ не соизмеримо с π. Тогда $\bar{G} = (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S}) \cup (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S} \cdot R_1)$ в силу периодичности функции $t \mapsto (\cos t,\, \sin t)$.

Из $\mathcal{S}$-инвариантности F следует, что F не зависит от x_3, и, как в случае **4.4.2.1**, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_4, \ldots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\lfloor x_4, \ldots, x_n\rfloor$.

5. $L_1 \neq L_2$, $P_1 \neq P_2$, $V \neq S \oplus Q$.

Отсюда $n > 2$, $\dim(S \cap Q) = 1$, $L_1 + Q = L_2 + Q$, $L_1 \nsubseteq P_2$, $L_2 \nsubseteq P_1$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись все следующие условия:

1) $e_1 \in Q \cap S$, $e_2 \in L_1$, $e_1 + 2\,e_2 \in L_2$ (это условие выполнимо, т.к. прямые L_1, L_2 и $Q \cap S$ попарно различны и лежат в 2-плоскости S); $e_3 \in P_1 \setminus Q$, $e_2 + 2\,e_3 \in P_2 \setminus Q$ (это условие выполнимо, т.к. $e_3 \notin P_2$, а 2-плоскость $\langle e_2,\, e_3\rangle$ пересекает P_2 по прямой, которая не содержится в Q); если $n > 3$, то $(e_1, e_4, \ldots, e_n)$ – базис в Q;

2) если $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$, то $e_3 = 2\,c + e_1/12$;

3) если $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$ и $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 3$, т.к. $L_1 + Q$ содержит скрещивающиеся прямые L_1 и Λ_2), то $e_4 = 2\,c$.

В таком базисе $R_1 = \{x_i' = -x_i \;\; (i \neq 2)\}$, $P_2 = \ker(2\,x_2 - x_3)$.

5.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ пусть $R^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2 x_3/2, \quad x_2' = x_2 + t\,x_3\}$. Тогда $\mathcal{R} = \{R^t \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа параболических сдвигов, $T = R^1$, и поэтому $\bar{G} = \mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \cdot R_1)$.

Из последнего равенства следует, что $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{R}}$, т.е. (см. [6])

$$F = f(2\,x_1 x_3 - x_2^2,\, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[2\,x_1 x_3 - x_2^2,\, x_3, \ldots, x_n].$$

Теперь $f(2\,x_1 x_3 - x_2^2, -x_3, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2\,x_1 x_3 - x_2^2]\langle x_3, \ldots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2\,x_1 x_3 - x_2^2]\lfloor x_3, \ldots, x_n\rfloor$.

5.2. $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$.

Это эквивалентно тому, что $c \notin Q$.

Определяя A^t и $\mathcal{A}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = A^1$, $\bar{G} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cdot R_1)$.

Теперь из (2) следует, что

$$F = f(x_1 - x_2 x_3 + x_3^3/3,\, 2\,x_2 - x_3^2,\, x_4, \ldots, x_n) \in \\ \mathbb{R}[x_1 - x_2 x_3 + x_3^3/3,\, 2\,x_2 - x_3^2,\, x_4, \ldots, x_n].$$

Но тогда $f(-x_1 + x_2x_3 - x_3^3/3,\, 2\,x_2 - x_3^2,\, -x_4, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2\,x_2 - x_3^2]\langle x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\, x_4, \ldots, x_n\rangle$ и

$$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2\,x_2 - x_3^2]\lfloor x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\, x_4, \ldots, x_n\rfloor.$$

5.3. $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя N^t и $\mathcal{N}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = N^1$, $\bar{G} = \mathcal{N} \cup (\mathcal{N} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F = f(x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\, x_2 - x_3x_4,\, x_3,\, x_5, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\, x_2 - x_3x_4,\, x_3,\, x_5, \ldots, x_n].$$

Отсюда $f(-x_1 + x_2x_4 - x_3x_4^2/2,\, x_2 - x_3x_4,\, -x_3,\, -x_5, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Значит,

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2 - x_3x_4]\langle x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\, x_3,\, x_5, \ldots, x_n\rangle,$$
$$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2 - x_3x_4]\lfloor x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\, x_3,\, x_5, \ldots, x_n\rfloor.$$

Заключение. *Основные результаты работы*:

Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; найдены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Аналогичным образом могут быть вычислены полуинварианты нецентроаффинных групп, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и порожденных отражениями относительно прямых.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. IV // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. Т.5, № 1/2. – С. 35–48.

[2] Рудницкий О.И. Об одном классе диких групп косых симметрий, имеющих четые орбиты направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2002, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 75–81.

[3] Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И. Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2005, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 33–41.

[4] Криворучко А.И. О кольцах инвариантов групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых. – Мат. физика, анализ, геометрия (2000), т. 7, № 4. – С. 415–441.

[5] Криворучко А.И. О нецентроаффинных группах, порожденных отражениями относительно прямых // Ученые записки ТНУ, 2004, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 38–46.

[6] Криворучко А.И. О группах, порожденных двумя аффинными отражениями // Ученые записки ТНУ, 2006, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 43–51.

Знайдена афінна класифікація пар афінних віддзеркалень відносно прямих, а також груп, які породжені двома такими віддзеркаленнями; побудовани усі напів-інваріанти нескінченних груп, які породжені двома віддзеркаленнями.

Affine classification of groups generated by two affine reflections through straight lines are obtained. Semi-invariants of infinite groups generated by two affine reflections through straight lines are calculated.