Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 31–41.

А. А. Корнута

СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ФЛАТТО–ВИНЕР ГРУПП E_6, E_7

Пусть G конечная группа симметрий, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей в вещественном пространстве E^n . Найдены алгебры инвариантов Флатто-Винер групп E_6 и E_7 .

Постановка задачи

Пусть в вещественном пространстве E^n введена прямоугольная система координат Ox_i; G — неприводимая конечная группа, порождённая ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей, I^G— алгебра инвариантов группы G.

Согласно теореме Шепарда–Тодда–Шевалле [1,2] алгебра I^G порождена n алгебраически независимыми однородными многочленами $I^G_{m_i}$ степеней $m_i \left(i = \overline{1,n}\right)$. В связи с этим возникает задача разработки методов построения и изучения свойств базисных инвариантов $I^G_{m_i}$. Эта задача нашла изучение в работах многих отечественных и зарубежных авторов [3-7].

Одно из направлений данных исследований указали Л. Флатто и М. Винер, установившие связь дифференциальных уравнений с построением базисных инвариантов алгебр I^G.

Флатто и Винер [8] доказали, что существуют, с точностью до постоянного множителя, базисные инварианты $I^G_{m_k}(x)$ алгебры I^G $\left(x = (x_i)\ ,\ i = \overline{1,n}\right)$, удовлетворяющие уравнениям

$$I_{m_j}(\partial)\, I_{m_k} = 0\, (1 \le j < k)\,,$$

где $I_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $I_{m_j}(\partial)$—дифференциальный оператор, полученный из многочлена $I_{m_j}(x)$ заменой x_i на $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Это утверждение даёт практический способ построения базисных инвариантов конечных групп. При решении данной задачи уже найдены системы базисных инвариантов Флатто–Винер групп $H_2(r)$, A_3, A_4 [9], F_4 [10], E_8[11].

Цель настоящей заметки построить системы базисных инваринтов Флатто–Винер групп E_6 и E_7, порождённых отражениями в пространствах E^6 и E^7, соответственно. Решение задачи приведено в п.1, 2 настоящей статьи.

1. Рассмотрим в пространстве E^6 полуправильный многогранника Госсета 2_{21}. Координаты его вершин зададим строками следующей матрицы [12]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_\nu = \cos\dfrac{2\pi\nu}{3}$, $s_\nu = \sin\dfrac{2\pi\nu}{3}$; $\lambda, \mu = 1, 2, 3$. Все 36 пятимерных плоскостей симметрии определяются уравнениями

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_5 = 0, \quad \sqrt{3}x_1 \pm x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_3 \pm x_4 = 0, \quad \sqrt{3}x_5 \pm x_6 = 0, \quad x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + 2x_5 = 0, 2x_1 + 2x_3 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - 2x_5 = 0, x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через E_6 группу симметрий многогранника 2_{21}. Она порождена отражениями относительно плоскостей (1).

Алгебра инвариантов I^{E_6} группы E_6 порождена шестью алгебраически независимыми формами степеней $m_i = 2, 5, 6, 8, 9, 12$ [13], которые могут быть записаны в виде [14]:

$$Q_2 = \sum p_\lambda, \qquad Q_5 = \sum q_\lambda(p_\mu - p_\nu), \qquad Q_6 = \sum q_\lambda^2 - 10\sum q_\lambda q_\mu + \sum p_\lambda^2 p_\mu - 3p_1p_2p_3,$$

$$Q_8 = 2\sum q_\lambda^2\left(p_\mu + p_\nu\right) - 6\sum p_\lambda q_\lambda\left(q_\mu + q_\nu\right) + 8\sum q_\lambda q_\mu p_\nu + \sum p_\lambda^2 p_\mu\left(p_\mu - p_\nu\right),$$

$$\begin{gathered} Q_9 = 5\sum p_\lambda p_\mu^2\left(q_\lambda + q_\nu\right) - 5\sum p_\lambda^2 p_\mu\left(q_\mu + q_\nu\right) + \sum p_\lambda^2 q_\lambda\left(p_\mu - p_\nu\right) + \\ + \sum q_\lambda\left(p_\mu^3 - p_\nu^3\right) + 12\sum q_\lambda\left(q_\mu^2 - q_\nu^2\right), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Q_{12} = 288\sum_{\lambda<\mu} q_\lambda^2 q_\mu^2 - 72\sum q_\lambda^3 q_\mu - 144\sum q_\lambda^2 q_\mu q_\nu + 42\sum p_\lambda^3\left(q_\mu^2 + q_\nu^2\right) - 12\sum p_\lambda^3 q_\lambda q_\mu + \\ +48\sum p_\lambda^3 q_\mu q_\nu - 70\sum p_\lambda^2 q_\mu q_\nu\left(p_\mu + p_\nu\right) - 166\sum p_\lambda^2 p_\mu q_\lambda q_\mu + \\ +68\sum p_\lambda p_\mu q_\nu\left(p_\lambda q_\lambda + p_\mu q_\mu\right) - 62\sum p_\lambda p_\mu q_\nu^2\left(p_\lambda + p_\mu\right) + 4\sum q_\lambda^2 p_\lambda^2 p_\mu + 64\sum q_\lambda^2 p_\lambda p_\mu^2 - \\ -24p_1p_2p_3\sum q_\lambda^2 + 240p_1p_2p_3\sum q_\lambda q_\mu - 11\sum p_\lambda^2 p_\mu p_\nu\left(p_\lambda^2 + p_\mu^2\right) + 2\sum p_\lambda^4 p_\mu^2 - \\ -2\sum p_\lambda^4 p_\mu p_\nu + 10\sum p_\lambda^3 p_\mu^3 + 30{p_1}^2{p_2}^2{p_3}^2, \end{gathered}$$

здесь и далее переменные $p_\lambda = x_\alpha^2 + x_\beta^2$, $q_\lambda = \frac{1}{3}x_\alpha^3 - x_\alpha x_\beta^2$ $((\alpha\beta) = (12), (34), (56))$, индексы λ, μ различны в каждом члене соответствующей суммы и индексы λ, μ, $\nu = 1,\ 2,\ 3$ (циклически).

При построении системы Флатто–Винер для группы E_6 будем считать, что $I_2 = Q_2$.

1. 1. Запишем инвариант Флатто–Винер пятой степени в виде $I_5 = aQ_5$. Подействуем на многочлен I_5 оператором $I_2(\partial)$, получим тождество. Следовательно, с точностью до постоянного множителя инвариант I_5 совпадает с Q_5.

1. 2. Любой инвариант шестой степени группы E_6 представим в виде $a_1 {I_2}^3 + a_2 Q_6$, с неопределёнными коэффициентами a_1, a_2. Для их нахождения запишем равенства $I_2(\partial) I_6(x) = 0$, $I_5(\partial) I_6(x) = 0$. Они приводят к уравнению $6a_1 + a_2 = 0$. Отсюда, $a_2 = -6a_1$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6 = \sum p_\lambda^3 - 3\sum p_\lambda^2 p_\mu - 6\sum q_\lambda^2 + 60\sum q_\lambda q_\mu + 24 p_1 p_2 p_3.$$

1. 3. Инвариант восьмой степени представим в виде

$$I_8 = a_1 {I_2}^4 + a_2 Q_6 I_2 + a_3 Q_8.$$

Система уравнений $I_2(\partial) I_8(x) = 0$, $I_5(\partial) I_8(x) = 0$, $I_6(\partial) I_8(x) = 0$ приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений $48a_1 + 5a_2 = 0$, $144a_1 + 33a_2 + 8a_3 = 0$, $432a_1 + 9a_2 - 16a_3 = 0$, $12a_1 - a_2 - a_3 = 0$, $9a_2 + 4a_3 = 0$, $432a_1 + 63a_2 + 8a_3 = 0$.

Её решение $a_2 = -\frac{48}{5}a_1$, $a_3 = \frac{108}{5}a_1$. Инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8 = 5\sum p_\lambda^4 - 28\sum p_\lambda^3 p_\mu + 42\sum p_\lambda^2 p_\mu^2 - 48\sum q_\lambda^2 p_\lambda + 168\sum q_\lambda^2 p_\mu +$$
$$+1344\sum q_\lambda q_\mu p_\nu - 168\sum q_\lambda q_\mu p_\mu.$$

1. 4. Запишем инвариант девятой степени в виде

$$I_9 = a_1 Q_5 {I_2}^2 + a_2 Q_9.$$

Система $I_2(\partial) I_9(x) = 0, I_5(\partial) I_9(x) = 0, I_6(\partial) I_9(x) = 0, I_8(\partial) I_9(x) = 0$ приводит к уравнению $3a_1 + 5a_2 = 0$. Следовательно, инвариант девятой степени имеет вид

$$I_9 = 36\sum q_\lambda^2 (q_\mu - q_\nu) - 2\sum p_\lambda^3 (q_\mu - q_\nu) + 2\sum p_\lambda^2 q_\lambda (p_\mu - p_\nu) -$$
$$-5\sum p_\lambda q_\mu \left(p_\mu^2 - p_\nu^2\right) + 20\sum p_\lambda^2 (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu).$$

1. 5. Инвариант двенадцатой степени можно записать в виде

$$I_{12} = a_1 {I_2}^6 + a_2 Q_6 {I_2}^3 + a_3 {Q_6}^2 + a_4 Q_8 {I_2}^2 + a_5 {Q_5}^2 I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_5(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_9(\partial) I_{12}(x) = 0$, получим однородную систему из 31 линейного уравнения относительно шести коэффициентов $a_i \left(i = \overline{1,6}\right)$. Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $96a_1 + 5a_2 = 0$, $864a_1 + 111a_2 + 14a_3 + 8a_4 + 16a_6 = 0$, $4320a_1 + 1149a_2 + 346a_3 + 376a_4 + 24a_5 + 2384a_6 = 0$, $4320a_1 + 951a_2 + 194a_3 + 184a_4 + 4a_5 + 736a_6 = 0$, $120a_1 - 2910a_2 - 635a_3 - 1260a_4 - 54a_5 - 5820a_6 = 0$.

Общее решение этой системы имеет вид: $a_2 = -\dfrac{96}{5}a_1$, $a_3 = \dfrac{10856}{155}a_1$, $a_4 = \dfrac{8978}{93}a_1$, $a_5 = \dfrac{114584}{93}a_1$, $a_6 = -\dfrac{14114}{465}a_1$. Следовательно,

$$\begin{gathered}
I_{12} = 155\sum p_\lambda^6 - 2046\sum p_\lambda^5 p_\mu + 6831\sum p_\lambda^4 p_\mu^2 - 10164\sum_{\lambda<\mu} p_\lambda^3 p_\mu^3 + \\
+11880\sum p_\lambda^4 p_\mu p_\nu - 9240\sum p_\lambda^3 p_\mu p_\nu\left(p_\mu + p_\nu\right) - 9240 p_1^2 p_2^2 p_3^2 - 2976\sum p_\lambda^3 q_\lambda^2 + \\
+20328\sum p_\lambda^3 q_\mu^2 - 458304\sum p_\lambda^3 q_\mu q_\nu - 37488\sum p_\lambda^2 p_\mu {q_\mu}^2 - 3564\sum p_\lambda^3 q_\lambda q_\mu + \\
+23892\sum p_\lambda^2 q_\lambda^2 p_\mu + 203280\sum p_\lambda q_\mu^2 p_\nu (p_\lambda + p_\nu) + 1848\sum p_\lambda^2 p_\mu q_\lambda q_\mu - \\
-125664\sum p_\lambda^2 q_\lambda\left(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu\right) + 351120\sum p_\lambda^2 q_\mu q_\nu\left(p_\mu + p_\nu\right) - 3696 p_1 p_2 p_3 \sum q_\lambda q_\mu + \\
+10856\sum q_\lambda^4 + 121616\sum q_\lambda^3 q_\mu - 247632\sum_{\lambda<\mu} q_\lambda^2 q_\mu^2 + 2631552\sum q_\lambda^2 q_\mu q_\nu.
\end{gathered}$$

Таким образом, построены базисные инварианты Флатто–Винер I_{m_i} группы E_6.

2. В вещественном евклидовом пространстве E^7 зададим прямоугольную систему координат $Ox_i \left(i = \overline{1,7}\right)$. Вершины центрально симметричного многогранника 3_{21} в пространстве E^7 определим радиус-векторами $(\pm1, 0, \pm1, \pm1, 0, 0, 0)$ и всеми получаемыми из них циклическими перестановками координат. Его 63 плоскости симметрии определяются уравнениями

$$x_i = 0,\ \left(i = \overline{1,7}\right); \quad x_i \pm x_j \pm x_k \pm x_l = 0.$$

где индексы i, j, k, l принимают значения следующих четвёрок чисел:$1, 2, 3, 5$; $1, 2, 4, 7$; $1, 3, 6, 7$; $1, 4, 5, 6$; $2, 3, 4, 6$; $2, 5, 6, 7$; $3, 4, 5, 7$ [15].

Группу симметрий многогранника 3_{21} обозначим E_7. Образующие алгебры инвариантов этой группы имеют степени $m_i = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$ [12] и могут быть записаны в виде [15] :

$$Q_2 = \sum x_i^2, \qquad Q_6 = \sum x_i^6 + 5\sum x_i^4 x_j^2 + 30\sum_{i<j<k} x_i^2 x_j^2 x_k^2,$$

$$Q_8 = 3\sum x_i^8 + 28\sum x_i^6 x_j^2 + 70\sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 + 420\sum_{j<k} x_i^4 x_j^2 x_k^2,$$

$$Q_{10} = \sum x_i^{10} + 15\sum x_i^8 x_j^2 + 70\sum x_i^6 x_j^4 + 420\sum_{j<k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 + 1050\sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 x_k^2,$$

$$Q_{12} = \sum x_i^{12} + 22\sum x_i^{10}x_j^2 + 165\sum x_i^8 x_j^4 + 308\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 990\sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 +$$
$$+4620\sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 11550\sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4,$$

$$Q_{14} = 3\sum x_i^{14} + 91\sum x_i^{12}x_j^2 + 1001\sum x_i^{10}x_j^4 + 3003\sum x_i^8 x_j^6 + 6006\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^2 x_k^2 +$$
$$+45045\sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + 84084\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + 210210\sum_{j<k} x_i^6 x_j^4 x_k^4,$$

$$Q_{18} = \sum x_i^{18} + 51\sum x_i^{16}x_j^2 + 1020\sum x_i^{14}x_j^4 + 6188\sum x_i^{12}x_j^6 + 14586\sum x_i^{10}x_j^8 +$$
$$+6120\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^2 x_k^2 + 92820\sum x_i^{12}x_j^4 x_k^2 + 1021020\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4 x_k^4 + 408408\sum x_i^{10}x_j^6 x_k^2 +$$
$$+656370\sum_{i<j} x_i^8 x_j^8 x_k^2 + 3063060\sum x_i^8 x_j^6 x_k^4 + 5717712\sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6,$$

здесь и далее индексы $i, j, k, l, m, n, p = \overline{1,7}$ различны в любом члене соответствующей суммы; i, j, k принимают значения следующих троек чисел: $1, 3, 4$; $2, 4, 5$; $3, 5, 6$; $4, 6, 7$; $5, 7, 1$; $6, 1, 2$; $7, 2, 3$; а k, l, m - оставшиеся тройки.

2.1. Будем считать, что инвариант I_2 совпадает с Q_2, а искомый базисный инвариант шестой степени находится среди форм

$$a_1 {I_2}^3 + a_2 Q_6.$$

Из уравнения $I_2(\partial)\, I_6(x) = 0$ находим $11a_1 + 15a_2 = 0$. Отсюда, $a_1 = -\dfrac{15}{11}a_2$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6 = 2\sum x_i^6 - 5\sum x_i^4 x_j^2 - 120\sum_{i<j<k} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + 45\sum_{k<l<m} x_k^2 x_l^2 x_m^2.$$

2. 2. Любой инвариант восьмой степени группы E_7 представим в виде

$$I_8 = a_1 {I_2}^4 + a_2 Q_6 I_2 + a_3 Q_8.$$

Поэтому рассмотрим систему уравнений $I_2(\partial)\, I_8(x) = 0$, $I_6(\partial)\, I_8(x) = 0$, которая приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений: $13a_1 + 16a_2 + 63a_3 = 0$, $78a_1 + 115a_2 + 630a_3 = 0$, $13a_1 + 35a_2 + 315a_3 = 0$, $52a_1 + 45a_2 = 0$, $171a_2 + 2268a_3 = 0$. Решение этой системы: $a_1 = \dfrac{2835}{247}a_3$, $a_2 = -\dfrac{252}{19}a_3$. Таким образом,инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8 = 15\sum x_i^8 - 70\sum x_i^6 x_j^2 + 77\sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 + 336\sum_{j<k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 63\sum_{l<m} x_k^4 x_l^2 x_m^2 +$$
$$+3402\sum_{i<j<k<l} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 1512\sum_{k<l<m<n} x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2.$$

2. 3. Инварианты десятой степени группы E_7 могут быть представлены в виде

$$I_{10} = a_1 {I_2}^5 + a_2 Q_6 {I_2}^2 + a_3 Q_8 I_2 + a_4 Q_{10}.$$

Система $I_2(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{10}(x) = 0$ приводит к уравнениям: $25a_1 + 29a_2 + 107a_3 + 45a_4 = 0$, $45a_1 + 69a_2 + 413a_3 + 315a_4 = 0$, $15a_1 + 16a_2 + 42a_3 = 0$, $15a_1 + 37a_2 + 329a_3 + 315a_4 = 0$, $10a_1 + 13a_2 + 42a_3 = 0$, $75a_1 + 108a_2 + 539a_3 + 315a_4 = 0$, $5a_1 + 3a_2 = 0$, $133a_2 + 1764a_3 + 1890a_4 = 0$, $25a_1 + 29a_2 + 176a_3 + 180a_4 = 0$. Её решение: $a_1 = -\dfrac{162}{23}a_4$, $a_2 = \dfrac{270}{23}a_4$, $a_3 = -\dfrac{45}{23}a_4$. Следовательно, инвариант I_{10} имеет вид:

$$I_{10} = 2\sum x_i^{10} - 15\sum x_i^8 x_j^2 + 50\sum x_i^6 x_j^4 + 480\sum_{j<k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 - 90\sum_{l<m} x_k^6 x_l^2 x_m^2 -$$
$$-1320\sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 - 45\sum_{k<l} x_k^4 x_l^4 x_m^2 + 810\sum_{j<k<l} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 3240\sum_{i<j<k} x_m^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 +$$
$$+2160\sum_{l<m<n} x_k^4 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - 6480\sum_{i<j<k<l<m} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2.$$

Отметим, что в [16] при решении системы была допущена ошибка. Здесь приведено верное решение.

2. 4. Запишем инвариант группы E_7 двенадцатой степени

$$I_{12} = a_1 {I_2}^6 + a_2 Q_6 {I_2}^3 + a_3 {Q_6}^2 + a_4 Q_8 {I_2}^2 + a_5 {Q_5}^2 I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial) I_{12}(x) = 0, I_6(\partial) I_{12}(x) = 0, I_8(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_{10}(\partial) I_{12}(x) = 0$ получим однородную систему 16 линейного уравнения относительно коэффициенов a_i $\left(i = \overline{1,6}\right)$. Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $17a_1 + 19a_2 + 21a_3 + 67a_4 + 27a_5 + 33a_6 = 0$, $255a_1 + 354a_2 + {}$ ${}+485a_3 + 1657a_4 + 900a_5 + 1485a_6 = 0$, $1020a_1 + 1209a_2 + 1390a_3 + 4172a_4 + 1260a_5 = 0$, $153a_1 + 378a_2 + 875a_3 + 3409a_4 + 3465a_5 + 10395a_6 = 0$, $8a_1 - 249a_2 - 458a_3 - 3332a_4 -$ $- 3402a_5 - 8316a_6 = 0$.

Общее решение этой системы: $a_1 = \frac{280}{761}a_4$, $a_2 = -\frac{1288}{761}a_4$, $a_3 = -\frac{490}{761}a_4$, $a_5 = -\frac{970}{761}a_4$, $a_6 = \frac{1735}{8371}a_4$. Следовательно,

$$I_{12} = 30\sum x_i^{12} - 330\sum x_i^{10}x_j^2 + 913\sum x_i^8x_j^4 - 924\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 1584\sum_{j<k} x_i^8x_j^2x_k^2 +$$
$$+1947\sum_{l<m} x_k^8x_l^2x_m^2 - 1232\sum x_i^6x_j^4x_k^2 - 2618\sum x_k^6x_l^4x_m^2 - 7392\sum_{i<j<k} x_i^4x_j^4x_k^4 +$$
$$+4851\sum_{k<l<m} x_k^4x_l^4x_m^4 - 41580\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2 + 33264\sum_{i<j<k} x_m^6x_i^2x_j^2x_k^2 -$$
$$-7392\sum_{l<m<n} x_k^6x_l^2x_m^2x_n^2 + 51282\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2 + 20328\sum_{\substack{i<j\\k<m}} x_i^4x_j^2x_k^2x_m^2 -$$
$$-11088\sum_{\substack{i<m\\j<k}} x_i^4x_m^4x_j^2x_k^2 + 133056\sum_{i<j<k<l} x_m^4x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2 -$$
$$-99792\sum_{j<k<l<m} x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2 + 798336\sum_{i<j<k<l<m<n} x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2.$$

2. 5. Инварианты четырнадцатой степени можно записать в виде

$$I_{14} = a_1{I_2}^7 + a_2Q_6{I_2}^4 + a_3{Q_6}^2I_2 + a_4Q_8{I_2}^3 + a_5Q_8Q_6 + a_6Q_{10}{I_2}^2 + a_7Q_{12}I_2 + a_8Q_{14}.$$

Из уравнений $I_2(\partial)I_{14}(x) = 0$, $I_6(\partial)I_{14}(x) = 0$, $I_8(\partial)I_{14}(x) = 0$, $I_{10}(\partial)I_{14}(x) = 0$, $I_{12}(\partial)I_{14}(x) = 0$, получаем совместную систему 32 линейных однородных уравнений, равносильную следующей системе 7 уравнений: $133a_1 + 145a_2 + 157a_3 + 495a_4 + 531a_5 + 193a_6 + 229a_7 + 819a_8 = 0$, $399a_1 + 535a_2 + 703a_3 + 2385a_4 + 3049a_5 + 1229a_6 + 1925a_7 + 9009a_8 = 0$, $399a_1 + 595a_2 + 883a_3 + 3249a_4 + 4765a_5 + 2147a_6 + 4389a_7 + 27027a_8 = 0$, $665a_1 + 1025a_2 + 1583a_3 + 5985a_4 + 9289a_5 + 4235a_6 + 9317a_7 + 63063a_8 = 0$, $133a_1 + 165a_2 + 209a_3 + 621a_4 + 821a_5 + 235a_6 + 198a_7 = 0$, $399a_1 + 925a_2 + 1981a_3 + 8001a_4 + 16219a_5 + 7805a_6 + 22407a_7 + 189189a_8 = 0$, $56a_1 - 385a_2 - 770a_3 - 5460a_4 - 6235a_5 - 5474a_6 - 13068a_7 - 81081a_8 = 0$. Её решение: $a_1 = \frac{24270246}{322121}a_8$, $a_2 = -\frac{234215982}{1610605}a_8$, $a_3 = \frac{26486460}{322121}a_8$, $a_4 = -\frac{1621620}{322121}a_8$, $a_5 = -\frac{81081}{10391}a_8$, $a_6 = \frac{13648635}{322121}a_8$, $a_7 = -\frac{190827}{10391}a_8$.

Поэтому инвариант четырнадцатой степени имеет вид:

$$I_{14}=3252\sum x_i^{14}-49322\sum x_i^{12}x_j^2+224042\sum x_i^{10}x_j^4-297570\sum x_i^8x_j^6+$$
$$+777504\sum_{j<k}x_i^{10}x_j^2x_k^2+283374\sum_{l<m}x_k^{10}x_l^2x_m^2-2837016\sum x_i^8x_j^4x_k^2-$$
$$-695331\sum x_k^8x_l^4x_m^2+4464096\sum_{i<j}x_i^6x_j^6x_k^2+3049956\sum_{k<l}x_k^6x_l^6x_m^2+$$
$$+2812992\sum_{j<k}x_i^6x_j^4x_k^4-2098278\sum_{l<m}x_k^6x_l^4x_m^4-1636362\sum_{j<k<l}x_i^8x_j^2x_k^2x_l^2-$$
$$-2299752\sum_{i<j<k}x_m^8x_i^2x_j^2x_k^2-235872\sum_{l<m<n}x_k^8x_l^2x_m^2x_n^2-7636356\sum_{k<l}x_i^6x_j^4x_k^2x_l^2-$$
$$-6604416\sum_{j<k}x_m^6x_i^4x_j^2x_k^2+1651104\sum_{j<k}x_i^6x_m^4x_j^2x_k^2-1100736\sum_{k<m}x_i^6x_j^4x_k^2x_m^2+$$
$$+38697750\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4x_l^2-31646160\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4x_m^2+18574920\sum_{k<l<m}x_k^4x_l^4x_m^4x_n^2-$$
$$+66044160\sum_{\substack{n<i\\ j<k<l}}x_n^4x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2-20638800\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m}}x_m^4x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2-$$
$$-107321760\sum_{\substack{m<n\\ i<j<k}}x_m^ix_j^4x_k^2x_l^2x_m^2+49533120\sum_{j<k<l<m<n}x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2-$$
$$-1783192320x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2x_7^2.$$

2. 6. Инвариант восемнадцатой степени представим в виде

$$I_{18}=a_1{I_2}^9+a_2Q_6{I_2}^6+a_3{Q_6}^2{I_2}^3+a_4{Q_6}^3+a_5Q_8{I_2}^5+a_6Q_8Q_6{I_2}^2+a_7{Q_8}^2I_2+$$
$$+a_8Q_{10}{I_2}^4+a_9Q_{10}Q_6I_2+a_{10}Q_{10}Q_8+a_{11}Q_{12}{I_2}^3+a_{12}Q_{12}Q_6+a_{13}Q_{14}{I_2}^2+a_{14}Q_{18}.$$

Из уравнений $I_2(\partial)\,I_{18}(x)=0, I_6(\partial)\,I_{18}(x)=0, I_8(\partial)\,I_{18}(x)=0, I_{10}(\partial)\,I_{18}(x)= =0,\ I_{12}(\partial)\,I_{18}(x)=0,\ I_{14}(\partial)\,I_{18}(x)=0$ получаем совместную систему 88 линейных однородных уравнений. Решение этой системы:

$$a_1=-\frac{224760471962377}{1177434995692}a_{14},\quad a_2=\frac{125992387715922}{294358748923}a_{14},\quad a_3=-\frac{412851377575364}{1471793744615}a_{14},$$
$$a_4=\frac{76869873080}{10150301687}a_{14},\quad a_5=\frac{11936255768879}{588717497846}a_{14},\quad a_6=\frac{41333454425666}{1471793744615}a_{14},$$
$$a_7=\frac{352924349739}{203006033740}a_{14},\quad a_8=-\frac{67283347778218}{294358748923}a_{14},\quad a_9=\frac{99914730292}{10150301687}a_{14},$$
$$a_{10}=-\frac{22509873672}{10150301687}a_{14},\quad a_{11}=\frac{446774326842480}{3237946238153}a_{14},\quad a_{12}=-\frac{60195292248}{10150301687}a_{14},$$
$$a_{13}=-\frac{35198762013180}{3237946238153}a_{14}.$$

Следовательно, базисный инвариант Флатто – Винер 18-ой степени имеет вид:

$$I_{18} = 111658\sum x_i^{18} - 2847279\sum x_i^{16}x_j^2 + 22137060\sum x_i^{14}x_j^4 - 70202860\sum x_i^{12}x_j^6+$$
$$+64163814\sum x_i^{10}x_j^8 + 56793600\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^2x_k^2 + 38014380\sum_{m<n} x_l^{14}x_m^2x_n^2-$$
$$-287890512\sum x_i^{12}x_j^4x_k^2 - 168384762\sum x_l^{12}x_m^4x_n^2 + 702461760\sum x_i^{10}x_j^6x_k^2+$$
$$+533585052\sum x_l^{10}x_m^6x_n^2 + 692659968\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4x_k^4 + 169387218\sum_{m<n} x_l^{10}x_m^4x_n^4-$$
$$-933095592\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^2 - 1210411917\sum_{l<m} x_l^8x_m^8x_n^2 - 494990496\sum x_i^8x_j^6x_k^4+$$
$$+875728854\sum x_l^8x_m^6x_n^4 + 228708480\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6 - 5480426952\sum_{l<m<n} x_l^6x_m^6x_n^6-$$
$$-1660568364\sum_{j<k<l} x_i^{12}x_j^2x_k^2x_l^2 + 1078642656\sum_{i<j<k} x_m^{12}x_i^2x_j^2x_k^2-$$
$$-428382864\sum_{m<n<p} x_l^{12}x_m^2x_n^2x_p^2 + 4890481596\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^4x_k^2x_l^2-$$
$$-5153292144\sum_{j<k} x_m^{10}x_i^4x_j^2x_k^2 + 1279133856\sum_{j<k} x_i^{10}x_m^4x_j^2x_k^2+$$
$$+1076971896\sum_{k<m} x_i^{10}x_j^4x_k^2x_m^2 - 766377612\sum_{k<l} x_i^8x_j^6x_k^2x_l^2+$$

$$+17510901408\sum_{j<k} x_m^8x_i^6x_j^2x_k^2 - 11490150672\sum_{j<k} x_i^8x_m^6x_j^2x_k^2-$$
$$-628539912\sum_{k<m} x_i^8x_j^6x_k^2x_m^2 - 20055385350\sum_{k<l} x_i^8x_j^2x_k^4x_l^4-$$
$$-11412961560\sum_{j<k} x_m^8x_i^2x_j^4x_k^4 - 4079995920\sum_{j<k} x_i^8x_m^2x_j^4x_k^4-$$
$$-1212971760\sum_{k<m} x_i^8x_j^2x_k^4x_m^4 + 14434363944\sum_{k<l} x_i^4x_j^2x_k^6x_l^6-$$
$$-102918816\sum_{j<k} x_m^4x_i^2x_j^6x_k^6 + 6072210144\sum_{j<k} x_i^4x_m^2x_j^6x_k^6+$$
$$+9417071664\sum_{k<m} x_i^4x_j^2x_k^6x_m^6 + 14472958500\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^4x_k^4x_l^4-$$
$$-6175128960\sum_{i<j<k} x_m^6x_i^4x_j^4x_k^4 - 5660534880\sum_{m<n<p} x_l^6x_m^4x_n^4x_p^4-$$
$$-6704425728\sum_{i<j<k<l} x_m^{10}x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2 + 7189614432\sum_{m<n<p<q} x_l^{10}x_m^2x_n^2x_p^2x_q^2+$$

$$
\begin{gathered}
+45817251480\sum_{k<l<m}x_i^8x_j^4x_k^2x_l^2x_m^2+14555661120\sum_{j<k<l}x_i^8x_m^4x_j^2x_k^2x_l^2+\\
+37712394720\sum_{j<k<l}x_m^8x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2-59545886400\sum_{i<j<k}x_m^8x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2-\\
-50636057472\sum_{\substack{m<i\\ j<k<l}}x_m^6x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2+100654602048\sum_{\substack{m<n\\ i<j<k}}x_m^6x_n^6x_i^2x_j^2x_k^2-\\
-115474911552\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m}}x_i^6x_j^6x_k^2x_l^2x_m^2-83364240960\sum_{\substack{i<j\\ k<l}}x_m^6x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2+\\
+13894040160\sum_{\substack{j<m\\ k<l}}x_i^6x_j^4x_m^4x_k^2x_l^2+46313467200\sum_{\substack{m<n\\ j<k}}x_i^6x_m^4x_n^4x_j^2x_k^2-\\
-40138338240\sum_{\substack{j<k\\ m<n}}x_i^6x_j^4x_k^4x_m^2x_n^2-289459170000\sum_{i<j<k<l}x_i^4x_j^4x_k^4x_l^4x_m^2+\\
+115783668000\sum_{i<j<k<m}x_i^4x_j^4x_k^4x_m^4x_n^2-301699157760\sum_{j<k<l<m<n}x_i^8x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2-\\
-111152321280\sum_{i<j<k<l}x_m^6x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2+213041949120\sum_{n<p<q<r}x_l^6x_m^4x_n^2x_p^2x_q^2x_r^2-\\
-439977938400\sum_{\substack{i<j<k\\ m<n<p}}x_i^4x_j^4x_k^4x_m^2x_n^2x_p^2-764172208800\sum_{\substack{m<n<p\\ i<j<k}}x_m^4x_n^4x_p^4x_i^2x_j^2x_k^2+\\
+208410602400\sum_{\substack{l<m<n\\ p<q<r}}x_l^4x_m^4x_n^4x_p^2x_q^2x_r^2+\\
+4001483566080\sum_{j<k<l<m<n<p}x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2x_p^2-\\
-1667284819200\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m<n<p}}x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2x_p^2
\end{gathered}
$$

Таким образом, построена система базисных инвариантов Флатто–Винер группы E_7.

Заключение

В работе в явном виде построена система базисных инвариантов Флатто–Винер групп E_6 и E_7.

В дальнейшем предполагается построение систем базисных инвариантов Флатто–Винер групп H_3 и H_4.

Список литературы

1. Shephard G.C., Todd J.A. Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. – 1954. – 6, N2. – P. 274 - 304.

2. Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections // Amer. j. Math. – 1955. – V.77 – P. 778 - 782.
3. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947, – 418 с.
4. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1980. – Т.11. – с. 203 – 240.
5. Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1989. – Т.21. – с. 155 – 208.
6. Винберг Э. Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Итоги науки итехники. Соврм. пробл. математики. 1989. – Т.55. – с. 137 - 309.
7. Shepler A.V. Semiinvariants of finite reflection groups // Department of Mathematics, University of California at San Diego, La Jolla, California, 92093 - 0112, *E - mail address*: ashepler@euclid.ucsd.edu
8. Flatto L. Invariants of finite reflection groups // Enseign. Math. 1978. – V.24. – № 3 – 4. – P. 237 - 292.
9. Кобец А. А., Романенко И.А. Особые многообразия для групп J_2^r, A_3 и A_4// Труды математического факультета. – Симферополь, 1997 – С.72 - 78.
10. Кобец А. А. Об одном классе алгебраических поверхностей с группой симметрий правильного 24-гранника // Таврич. нац. ун-т. – Симферополь, 1993. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №1861 УК-93.
11. Кобец А. А. Об одной системе базисных инвариантов группы E_8 // Тезисы докл. Пятая международная конференция им. акад. М. Кравчука. – Киев, 1996. – С. 72 -73.
12. Coxeter H. S. M. The polytope 2_{21}, whose twehty seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface// Amer. J. Math. 1940. – v.76, № 3. – p. 457 - 486.
13. Coxeter H. S. M. The product of the generators of a finite group generated by reflections// Duke Math. j. 1951. – v.18, – p. 765 - 782.
14. Frame J. S. The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents // Annali di Matematika. 1951 – v. 32, – p. 83 - 119.
15. Игнатенко В.Ф. Об инвариантах конечных групп, порождённых отражениями // Мат. сб. – Москва, 1983. – 120(162) – №4 – с. 556 - 568.
16. Кобец А.А., Об одной системе базисных инвариантов группы E_7 // Таврич. нац. ун-т. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №2213 УК - 95

Нехай G скінчена група симетрій, що породжена віддзеркаленнями відносно гіперплощин в дійсному просторі E^n. Знайдені алгебри інваріантів Флатто-Вінер груп E_6 та E_7 .

Let G be a finite group of symmetries with respect to hyperplanes in real space E^n. Algebras of Flatto-Weiner invariants of groups E_6 and E_7 are found.