Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 3–12.

Н. Д. Копачевский

АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Резюме

В данной работе выводится абстрактная формула Грина, приспособленная для исследования в абстрактном виде различных классов смешанных краевых задач с условиями Дирихле, Неймана, Ньютона и др. на разных участках границы. В качестве основного примера приложения этой формулы приводится формула Грина для оператора Лапласа в области с липшицевой границей, разбитой на несколько частей.

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств

Пусть Ω – произвольная односвязаная область в $\mathbb{R}^m$ с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Как известно, для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u = u(x),\ x \in \Omega$, непрерывно дифференцируемой функции $\eta = \eta(x)$ и достаточно гладкой границы $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \Delta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} [\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u]\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \Delta u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \tag{1.1}$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - (\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n})_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.2}$$

$$Lu := u - \Delta u, \quad \gamma\eta := \eta\big|_{\Gamma}. \tag{1.3}$$

Здесь γ – оператор следа, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к Γ, а $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ – стандартные функциональные гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями и нормами.

Формула Грина (1.2) (первая формула Грина для оператора Лапласа) допускает обобщения в нескольких направлениях. Во-первых, вместо конкретных гильбертовых пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ можно взять абстрактные гильбертовы пространства E, F и G соответственно, удовлетворяющие некоторым условиям связи. Во-вторых, в формуле вида (1.2) вместо скалярных произведений в первом и последнем члене можно взять их расширения по непрерывности, являющиеся функционалами (см. ниже). В-третьих, в (1.2) граница $\Gamma = \partial\Omega$ может быть не гладкой, а липшицевой.

Именно, имеют место следующие факт (см. [1], а также [2, 3]).

Теорема 1. *Пусть для тройки абстрактных гильбертовых пространств* $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}, \{F, (\cdot,\cdot)_F\}$ *и* $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ *с введёнными на них скалярными произведениями, а также для абстрактного оператора следа* γ *выполнены следующие условия:*

(1) *Пространство F плотно вложено в пространство E (обозначение $F \subset\to E$), т.е. F плотно в E и существует константа $a > 0$ такая, что*

$$\|u\|_E \le a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.4}$$

(2) *Оператор следа γ ограниченно действует из F на пространство $G_+ \subset\to G$ и*

$$\|\gamma u\|_G \le b\|u\|_F, \quad \forall u \in F,\ b > 0. \tag{1.5}$$

Тогда существуют операторы $L : \ F \to F^*$ и $\partial : \ F \to (G_+)^*$, однозначно определяемые по E, F, G и γ, такие, что имеет место абстрактная формула Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.6}$$

(Здесь косыми скобками обозначены значения функционалов $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ на элементах $\eta \in F$ и $\gamma\eta \in G_+$ соответственно.)

Рассмотрим основной пример:

$$E = L_2(\Omega),\ F = H^1(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega,\ \gamma\eta := \eta\big|_\Gamma. \tag{1.7}$$

Здесь важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 2. *(E. Gagliardo, см.* [4]*) Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. Введём на Γ гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\varphi|^2\, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x} d\Gamma_x \int\limits_{\Gamma_y} d\Gamma_y \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}. \tag{1.8}$$

Тогда оператор γ, определяемый по закону

$$\gamma u := u\big|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, т.е. имеет место оценка

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Обратно, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ *существует функция* $u \in H^1(\Omega)$ *(определяемая не единственным образом по* φ*) такая, что*

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

При этом пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ *компактно вложено в* $L_2(\Gamma)$.

Замечание 1. Напомним, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$, если для каждой точки границы существует такая её окрестность и в ней такая ортогональная система координат $0y_1 \ldots y_m$, что уравнение части границы $\partial\Omega$, попадающей в эту окрестность, имеет вид $y_m = f(y_1, \ldots, y_{m-1})$, где f — функция, удовлетворяющая условию Липшица:

$$|f(y_1, \ldots, y_{m-1}) - f(z_1, \ldots, z_{m-1})| \leq C \left(\sum_{k=1}^{m-1} |y_k - z_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *В области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* $\Gamma = \partial\Omega$ *имеет место следующая формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.10}$$

$$Lu := u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.11}$$

Отметим, что ранее абстрактная формула Грина (с билинейной коэрцитивной формой вместо $(\eta, u)_F$, а также при дополнительном условии плотности $\ker \gamma$ в E и других условиях) была выведена в работе [5], см. также [6]. Она использовалась и в работе [7]. В монографии [3] она была выведена в форме (1.6), однако вместо функционалов $\langle \eta, Lu \rangle_E$ и $\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G$ там были скалярные произведения $(\eta, Lu)_E$ и $(\gamma\eta, \partial u)_G$, причем $u \in \mathcal{D}(L) \subset F,\ Lu \in E,\ \partial u \in G$.

2. Вывод абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \delta u = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \quad \delta = \delta(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma_3,$$

где Γ_1, Γ_2 и Γ_3 – части границы $\Gamma := \partial\Omega$, имеющие положительные меры и в объединении дающие всю Γ.

В задаче (2.1) взяты для примера три классических краевых условия на разных частях границы: условие Дирихле на Γ_1, условие Неймана на Γ_2 и условие Ньютона на Γ_3.

Цель этой работы – предъявить условия при которых вместо абстрактной формулы Грина (1.6) имеет место аналогичная формула, приспобленная к решению абстрактных задач смешанного типа. Применительно к задаче (2.1) в гладком случае, как известно, следует воспользоваться формулой (см. (1.1) и (1.2))

$$(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{3} \left(\gamma_k \eta, \frac{\partial u}{\partial n_k} \right)_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{2.2}$$

$$\gamma_k \eta := \eta\big|_{\Gamma_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_k} := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Приведем вывод этой формулы в абстрактной форме, опираясь на формулу (1.6) и на построения из ([6], с. 191-192).

Будем считать, что выполнены условия теоремы 1. Пусть p_1 — непрерывный проектор в G_+, а $p_2 := I - p_1$. Тогда операторы p_k, $k = 1, 2$, непрерывно действуют из G_+ в $(\tilde{G}_+)_k := p_k G_+$. Введём ещё операторы

$$\tilde{\gamma}_k := p_k \gamma, \quad \tilde{\partial}_k := p_k^* \partial, \quad p_k^* := (\tilde{G}_+)_k^* \to (G_+)_k^*, \quad k = 1, 2. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *В сформулированных выше предположениях имеет место формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.5}$$

Доказательство леммы просто. Так как по построению

$$\gamma = (p_1 + p_2)\gamma = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2,$$

то

$$\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)\eta, \partial u \rangle_G = \langle \tilde{\gamma}_1 \eta, \partial u \rangle_G + \langle \tilde{\gamma}_2 \eta, \partial u \rangle_G =$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k^2 \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma\eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G. \tag{2.6}$$

Замечание 2. Из доказательства леммы 1 видно, что если взаимно дополнительных проекторов несколько, например, их количество равно $q \geq 2$, т.е.

$$p_k = p_k^2 : \ G_+ \to (\tilde{G}_+)_k := p_k G_+, \ k = \overline{1, q}, \quad \sum_{k=1}^{q} p_k = I, \tag{2.7}$$

то справа в (2.5) суммирование по k производится от $k = 1$ до $k = q$:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.8}$$

Формула Грина (2.8), однако, не совсем удобна для приложений. Действительно, в ней справа фигурирует функционалы на основе пространства G (в примерах – $L_2(\Gamma)$), а не функционалы на основе пространств G_k, $G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k$. Поэтому в дальнейшем преобразуем формулу (2.8) к более удобному виду, где составляющие слагаемые в (2.8) выглядят более естественным образом. Для этого потребуется ввести абстрактные операторы следа на часть границы и соответствующие операторы производных по внешней нормали.

Будем далее считать, что оператор проектировани p_k имеет структуру

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1,q}. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\rho_k : \; G_+ \to (G_+)_k, \quad k = \overline{1,q}, \tag{2.10}$$

— оператор сужения на пространство $(G_+)_k = \rho_k G_+$ (абстрактный оператор сужения на часть границы области), причём

$$G_+ = \sum_{k=1}^{q} (\dot{+}) (G_+)_k, \quad G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \quad (G_+)_k \subset\!\!\to G_k, \tag{2.11}$$

а $\omega_k \; : \; (G_+)_k \to (\tilde{G}_+)_k$ – оператор “продолжения нулём” из $(G_+)_k$ на подпространство $(\tilde{G}_+)_k \subset G_+$ (в примерах – из части границы области на всю границу), т.е.

$$\omega_k (G_+)_k = \omega_k \rho_k G_+ = p_k G_+ = (\tilde{G}_+)_k. \tag{2.12}$$

При этом в (2.9) предполагается, что ω_k — правый обратный для ρ_k, т.е.

$$\rho_k \omega_k = I_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \; k = \overline{1,q}, \tag{2.13}$$

кроме того, считаем, что операторы ρ_k и ω_k непрерывны.

Теорема 4. *При выполнениии сформулированных выше условий формула Грина* (2.8) *имеет следующий вид*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.14}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u, \tag{2.15}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на части границы области.

Доказательство. Преобразуя с учётом свойств (2.9) – (2.13) выражение, стоящее под знаком суммы в (2.8). Имеем, учитывая вывод (2.6):

$$\langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G.$$

Так как ω_k непрерывен, то здесь правое выражение является линейным ограниченным функционалом относительно $\rho_k\gamma\eta = \gamma_k\eta \in (G_+)_k$, так как

$$|\langle \omega_k \rho_k \gamma\eta, \partial u\rangle_G| \le \|\omega_k\| \cdot \|\rho_k\gamma\eta\|_{(G_+)_k} \cdot \|\partial u\|_{F^*}.$$

Поэтому этот функционал в "скалярном произведении" G_k имеет вид

$$\langle \omega_k \rho_k \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \rho_k\gamma\eta, \omega_k^* \partial u\rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}.$$

Такое обозначение для ∂_k оправдано тем, что в гладком классическом случае (см. (2.2), (2.3)) на этом месте стоит производная по внешней нормали на части границы. □

Опираясь на установленную формулу Грина (2.14), (2.15), можно рассматривать абстрактные смешанные краевые задачи вида

$$Lu = f, \quad \gamma_1 u = 0, \quad \partial_2 u = 0, \partial_3 u + \delta\gamma_3 u = 0, \tag{2.16}$$

а также и многие другие. Эти задачи обобщают задачи вида (2.1) и находят применение в приложениях, в частности, в гидродинамике, теории упругости и др.

3. Классический пример

Докажем теперь утверждения леммы 1 и теоремы 4 применительно к формуле Грина (1.10), т.е. в частном случае (1.7).

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Пусть Γ_1 — открытая измеримая часть границы Γ, $\Gamma_2 := \Gamma \setminus \Gamma_1$. Введём в рассмотрение оператор ρ_1, являющийся оператором сужения на Γ_1, т.е.

$$\rho_1\varphi := \varphi\big|_{\Gamma_1}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.1}$$

Этот оператор сопоставляет каждой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ её часть φ_1, заданную на $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

Лемма 2. *Оператор сужения*

$$\rho_1 : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_1), \tag{3.2}$$

ограничен и его норма

$$\|\rho_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_1)} \le 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Утверждения (3.2), (3.3) следуют непосредственно из определения (1.8) нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$, так как

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \Gamma_1 \subset \Gamma.$$

□

Рассмотрим теперь множество $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ тех элементов из $H^1(\Omega)$, которое принадлежит ядру оператора $\gamma_1 := \rho_1\gamma$, т.е. множество

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \ u\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\} = \ker(\rho_1\gamma). \tag{3.4}$$

Так как по теореме 2 оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, а по лемме 2 оператор ρ_1 ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$, то оператор

$$\gamma_1 = \rho_1\gamma : \ H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_1)$$

ограничен. Поэтому $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega)$, и так как

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \supset H^1_0(\Omega),$$

то его размерность $\dim H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \infty$ и $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$.

Введём теперь оператор $\omega_1 : \ H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$, действующий по закону

$$\omega_1\varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus \Gamma_1 = \Gamma_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

и называемый оператором продолжения нулём на Γ_2. Нетрудно видеть, исходя из определений (3.1) и (3.5) операторов ρ_1 и ω_1, что оператор

$$p_1 := \omega_1\rho_1 : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma) \tag{3.6}$$

обладает свойством $p_1^2 = p_1$ так как $\rho_1\omega_1$ является единичным оператором в $H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Таким образом, оператор p_1 является ограниченным проектором в $H^{1/2}(\Gamma)$, если оператор продолжения $\omega_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ ограничен.

Докажем последнее утверждение. Оно основано на общей схеме рассмотрения неоднородных краевых задач, изложенной в [3], с. 40-46.

Введём в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ оператор следа

$$\hat{\gamma}_2 := \rho_2 \left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} \right) : \ H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_2),$$

действующий по закону

$$\hat{\gamma}_2 u = \rho_2 \left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} \right) u = u\big|_{\Gamma_2}, \quad \forall u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Как очевидно из предыдущих построений,

$$\ker\hat{\gamma}_2 = \ker\rho_2 \left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} \right) = H^1_0(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0 \}.$$

Ортогональным дополнением к $H^1_0(\Omega)$ в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ будет множество функций

$$H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \ u - \Delta u = 0, \ u\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}.$$

Этот факт проверяется на гладких функциях и хорошо известен. Таким образом, имеет место ортогональное разложение

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega). \tag{3.7}$$

В дальнейшем для краткости множество $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических функций.

Очевидно, областью значений оператора $\hat{\gamma}_2$ является пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$, плотно и компактно вложенное в $L_2(\Gamma_2)$. По построению оператор $\hat{\gamma}_2$ осуществляет взаимно однозначное отображение $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma_2)$. Это позволяет ввести на $H^{1/2}(\Gamma_2)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H^{1/2}(\Gamma_2)} = (u_1, u_2)_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}, \quad u_k \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega), \quad \hat{\gamma}_2 u_k = \varphi_k, \ k = 1, 2. \tag{3.8}$$

Соответствующая норма эквивалентна норме (1.8) для $\Gamma = \Gamma_2$.

Можно проверить, опираясь на разложение (3.7), что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} = \min_{\hat{\gamma}_2 u = \varphi} \|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}.$$

Кроме того, так как $H^{1/2}(\Gamma_2)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$, то пространства $\big(H^{1/2}(\Gamma_2); L_2(\Gamma_2)\big)$ образуют гильбертову пару пространств (см. [3], с. 32). По этой паре можно построить шкалу гильбертовых пространств $H^\alpha(\Gamma_2)$, $-1 \le \alpha \le 1$ таким образом, что при $\alpha = 1/2$ имеем пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$, при $\alpha = -1/2$ — пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2) = (H^{1/2}(\Gamma_2))^*$, а при $\alpha = 0$ — пространство $L_2(\Gamma_2)$.

Обозначим через V_2 оператор, сопряженный к оператору $\hat{\gamma}_2$ в смысле "скалярного произведения" в $L_2(\Gamma_2)$, т.е.

$$\langle \hat{\gamma}_2 \eta, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = (\eta, V_2 \psi_2)_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega), \ \forall \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Поскольку оператор $\hat{\gamma}_2$ изометрически отображает пространство $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$ (см. (3.8)), то оператор V_2 изометрически отображает пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2) := (H^{1/2}(\Gamma_2))^*$ на пространство $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$. Из свойств операторов $\hat{\gamma}_2$ и V_2 следует, что оператор $C_2 := \hat{\gamma}_2 V_2$ изометрически отображает пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ на пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$. Его сужение на $L_2(\Gamma_2)$, как легко проверить, является самосопряжённым положительным компактным оператором, действующим в $L_2(\Gamma_2)$. Из этих свойств, в свою очередь, вытекает, что оператор $C_2^{-1} : \mathcal{D}(C_2^{-1}) \subset L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_2)$, $\mathcal{D}(C_2^{-1}) = \mathcal{R}(C_2|_{L_2(\Gamma_2)})$ является порождающим оператором гильбертовой пары $\big(H^{1/2}(\Gamma_2); L_2(\Gamma_2)\big)$.

Замечание 3. Оператор V_2 является оператором смешанной краевой задачи

$$u - \Delta u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Её слабое решение $u = V_2 \psi_2 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$. $\square$

Поскольку оператор $\hat{\gamma}_2$ осуществляет изометрическое отображение пространства $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma_2)$, то существует единственное в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ слабое решение задачи Дирихле:

$$u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_2} = \varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2). \tag{3.9}$$

Обратно, любая функция $u \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.9) с $u\big|_{\Gamma_2} = \varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$.

Следствием доказанных утверждений является

Лемма 3. *Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ оператор продолжения ω_1 из* (3.5) *является непрерывным оператором, действующим из $H^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, меняя местами в предыдущих рассуждениях Γ_1 и Γ_2, приходим к выводу, что задача Дирихле

$$u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1),$$

имеет единственное решение $u \in H^1_{\Gamma_2}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

По теореме 2 след элемента u на $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежит пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. При этом, согласно (1.9) имеем

$$\|\omega_1\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1\|u\|_{H^1_{\Gamma_2}(\Omega)} = c_1\|\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)},$$

т.е. $\omega_1 : \ H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — непрерывный оператор. $\square$

Следствие 1. *Операторы*

$$p_k := \omega_k\rho_k : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2,$$

(см. (3.6)*) являются ограниченными проекторами в $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Установленные факты показывают, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega), \ F = H^1(\Omega), \ G = L_2(\Gamma), \ \Gamma = \partial\Omega$, рассматриваемых в области Ω с липшицевой границей, справедливы утверждения общей леммы 1 и замечания 2 к ней, а также леммы 4.

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Для тройки пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega), L_2(\Gamma), \ \Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа $\gamma : \ H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma), \ \gamma\eta := \eta\big|_\Gamma$, в области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ справедлива следующая формула Грина:*

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{3.10}$$

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k, \quad mes(\Gamma_k \cap \Gamma_l) = 0 \ (k \ne l), \quad \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \tag{3.11}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\big|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1, q}. \tag{3.12}$$

Использование формулы (3.10) позволяет доказать теоремы о разрешимости как абстрактных задач вида (2.16) с неоднородными краевыми условиями, так и неоднородных задач вида (2.1) в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Формулировки соответствующих результатов здесь не приводятся.

Список литературы

[1] Копачевский Н. Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса.* – //Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ), №2, 2004. – с. 52-80.

[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи.* – //Украинский матем. вестник, Т. 1, № 1, 2004. – с. 69-97.

[3] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.* – Москва, Наука, 1989. – 416 с.

[4] Gagliardo E. *Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti del Seminare Matematico della Universita di Padova. – 1957. – Vol.27.

[5] Обэн Ж.-П. (Aubin J.P.) *Abstarct boundary-value operators and their adjoint.* – Rend. Seminario. Mat. Padova. 43, 1970. – p 1–33.

[6] Обэн Ж.-П. *Приближённое решение эллиптических краевых задач.* – М.: Мир, 1977. – 384 с.

[7] Showalter R. *Hilbert space methods for partial differential equations* //Electronic journal of differential equations. – 1994. – 214 p.