Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 1 (2007), с. 80–85.

Д. О. Цветков

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Введение

Задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд, исследовалась в работе [1]. В данной работе исходная задача изучается с помощью нового подхода, связанного с применением операторных блок-матриц (см., например, [3]).

Постановка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$\begin{aligned} &0 < N^2_{min} \le N^2(x_3) \le N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \\ &N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $N^2(x_3)$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля-Брента).

В состоянии покоя давление в жидкости распределено по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g\int_0^{x_3} \rho_0(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (2), $\rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [1]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega\,),\\
&\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,),\\
&\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S\,), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma\,), \quad p = g\rho_0(0)\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma\,),\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (\,x\in\Omega\,), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что для классического решения задачи (3) имеет место закон баланса полной энергии:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Bigg(\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}|^2\,d\Omega + g^2\int\limits_\Omega \big[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\big]^{-1}|\rho|^2\,d\Omega + \\ + g\rho_0(0)\int\limits_\Gamma |\zeta|^2\,d\Gamma\Bigg) = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}\,d\Omega. \tag{4}$$

Функциональные пространства

Начально-краевую задачу (3) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (3) на ортогональные подпространства (см. [2]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{5}$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \le \rho_0 \le M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных (5) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0), \tag{6}$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) = \{\, \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \; div\,\vec{u} = 0 \ (\textit{в}\ \Omega), \ u_n = 0 \ (\textit{на}\ \partial\Omega) \,\}.$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\, \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \; \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p, \ v_n = 0 \ (\textit{на}\ S), \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0 \ (\textit{в}\ \Omega), \ \int\limits_{\Gamma} p\, d\Gamma = 0 \,\}.$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \; \vec{w} = \rho_2^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma) \,\}.$$

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int\limits_{\Omega} \big[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\big]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\Omega$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\eta,\zeta)_0 := \rho_0(0)\int\limits_{\Gamma} \eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\, d\Gamma.$$

Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Будем считать $\vec{u}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (3), ортогонального разложения (6), имеем

$$\vec{u}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{u}(t,x) = \vec{v}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla w(t,x), \quad \vec{v}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla w(t,x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x), \tag{7}$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(x,t) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).$$

Обозначим P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (7) в первое уравнение (3) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -P_0\left(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\right) + P_0\vec{f}, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\nabla w\right) = -\rho_0^{-1}\nabla p_1 - P_{h,S}\left(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\right) + P_{h,S}\vec{f}, \\ &\vec{0} = -\rho_0^{-1}\nabla p_2 - P_{0,\Gamma}\left(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\right) + P_{0,\Gamma}\vec{f}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из последнего соотношения следует, что $\rho_0^{-1}\nabla p_2$ может быть найдено, если известно решение $\rho = \rho(t,x)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p \to p_1$, так как $p = p_1 + p_2,\ p_2 = 0$ (на Γ).

Рассмотрим вспомогательную задачу. По заданной функции $\psi(\hat{x}),\ \hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_1(x),\ x \in \Omega$, являющуюся решением задачи

$$\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x)\nabla p_1) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla p_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$\rho_0^{-1}(0)p_1 = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \psi \, d\Gamma = 0. \tag{9}$$

Это аналог известной задачи Зарембы. Она имеет единственное решение $p_1 \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$ при $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \bigcap H_0$, где $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого (см. [4]), $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$.

Если $p_1(x)$ — решение вспомогательной задачи (9) для $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$, то $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\rho_0^{-1}(x)\nabla p_1(x) =: G\psi$, где $G : H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ есть линейный ограниченный оператор.

Введем обозначения

$$-\nabla\rho_0 \cdot \vec{v} =: C_1^*\vec{v}, \quad -\nabla\rho_0 \cdot \vec{w} =: C_2^*\vec{w}, \quad \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla w,$$

$$P_0\left(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\right) =: C_1\rho, \quad P_{h,S}\left(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\right) =: C_2\rho.$$

Отметим, что операторы C_1 и C_1^*, C_1 и C_1^* взаимно сопряжены соответственно, и $\|C_1\| = \|C_1^*\| \le N_0,\ \|C_2\| = \|C_2^*\| \le N_0$.

Для $\psi = g\zeta$ имеем из (9) $\rho_0^{-1}\nabla p_1 = gG\zeta$. Учитывая введенные обозначения для операторов, перепишем начально-краевую задачу (3) в виде последнего соотношения (8) и задачи Коши для системы дифференциально-операторных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & gG & C_2 \\ 0 & -\gamma_n & 0 & 0 \\ -C_1^* & -C_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\vec{f} \\ P_{h,S}\vec{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\Big(\vec{v}(0); \vec{w}(0); \zeta(0); \rho(0)\Big)^t = \Big(\vec{v}^0; \vec{w}^0; \zeta^0; \rho^0\Big)^t,$$

$$\Big(\vec{v}; \vec{w}; \zeta; \rho\Big)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega) =: \mathcal{H}.$$

Здесь γ_n — оператор следа: $\gamma_n\vec{u} := u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma$. Данный оператор может быть расширен до оператора $\tilde{\gamma_n}$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\tilde{\gamma_n}) = \{\vec{w} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) : \ \tilde{\gamma_n}\vec{w} \in H_0\},$$

в этом случае оператор $\tilde{\gamma_n}$ есть оператор, сопряженный к оператору G: $\tilde{\gamma_n} = G^*$.

Определение 1. Функции $\vec{u}(t,x)$, $\zeta(t,\hat{x})$, $\rho(t,x)$ и $p(t,x) = p_1(t,x) + p_2(t,x)$ назовем сильным решением задачи (3) на отрезке $[0,T]$, если выполнено последнее уравнение (8) и $\{\vec{v};\vec{w};\zeta;\rho\}$ есть сильное решение задачи Коши (10) в пространстве $\mathcal{H}$. Это значит, что для всех $t \geq 0$ функции $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{w} \in \mathcal{D}(\widetilde{\gamma_n})$, $\zeta \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$, $\rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$ и функции $d\vec{v}/dt$, $d\vec{w}/dt$, $d\zeta/dt$, $d\rho/dt$, $C_1\rho$, $C_2\rho$, $G\zeta$, $C_1^*\vec{v}$, $C_2^*\vec{w}$, $\widetilde{\gamma_n}\vec{w}$ есть непрерывные по t, кроме того, уравнение и начальное условие (10) выполнены.

Теорема существования сильного решения

Рассмотрим для простоты задачу (10) при $g = 1$. (Если сделать замену $g^{\frac{1}{2}}\zeta \to \zeta$, $g^{\frac{1}{2}}G \to G$, тогда получим такую же задачу, как при $g = 1$.) Свяжем с задачей (10) оператор-матрицу которая имеет плотную в $\mathcal{H}$ область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{D}(\widetilde{\gamma_n}) \oplus H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega) \tag{11}$$

и определена на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ по закону

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & G & C_2 \\ 0 & -G^* & 0 & 0 \\ -C_1^* & -C_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что оператор $\mathcal{A}$ с областью определения (11) будет максимально аккретивным оператором и, значит задача Коши (10) будет равномерно корректной (см. [2]), а оператор $(-\mathcal{A})$ есть генератор сжимающей группы унитарных операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-t\mathcal{A})$, и справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad f(t) \in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right),$$

тогда задача Коши (10) *имеет единственное сильное решение на* $[0,T]$, *выражаемой формулой*

$$y(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)f(s)\,ds, \tag{12}$$

где $y^0 := (\vec{v}^0;\vec{w}^0;\zeta^0;\rho^0)^t$, $y := (\vec{v};\vec{w};\zeta;\rho)^t$, $f := (P_0\vec{f};P_{h,S}\vec{f};0;0)^t$.

Как следствие теоремы 1 имеет место следующий результат

Теорема 2. *Если выполнены условия:*

$$\vec{v}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \vec{w}^0 \in \mathcal{D}(\overline{\gamma}_n),\ \zeta^0 \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}},\ \rho_0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega),\ \vec{f}(t) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)),$$

тогда задача Коши (3) *имеет единственное сильное решение (в смысле определения 1) для любого* $t \in [0,T]$.

Выводы

В данной работе исследована задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд. Основным новым результатом является теорема существования единственности сильного решения изучаемой начально-краевой задачи (теорема 2).

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986, — Т.26, № 5. — С. 734 — 755.

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[3] Azizov T. Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. *To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container* // Math. Nachr. — 2003. — V. 248. — 249. — P. 3 — 39.

[4] Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* — М.: Наука, 1977. — 455 с.