Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 1 (2007), с. 56–63.

О. А. Дудик

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ УСЛОВИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В данной работе подробно рассматривается случай, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и оператор потенциальной энергии имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Приводится доказательство обращения теоремы Лагранжа об устойчивости.

1. Постановка спектральной задачи.

Малые движения плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, описываются эволюционным уравнением (см. [1])

$$\mathcal{A}\frac{dx}{dt} + \mathcal{B}x = f(t), \quad x(0) = x^0, \quad x = (\vec{v}; \vec{z}; \vec{w}; \vec{\zeta}; \vec{\delta})^t. \tag{1}$$

Операторные матрицы в задаче (1) имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{11} & \nu^{-1}\rho R^* & I_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{21}\nu^{-1}R^* & I_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \rho\nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ RA & \nu^{-1}B & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & B_{34} & mgl \\ -\gamma_n & -\nu^{-1}\gamma_n R^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$I_{11}\vec{v} = \rho\vec{v}, \quad I_{12}\vec{w} = \rho P_{0,S}\left(\vec{w} \times \vec{r}\right),$$
$$I_{21}\vec{v} = \rho \int_\Omega \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) d\Omega, \quad I_{22}\vec{w} = J\vec{w} \tag{3}$$

$$B_{23}\vec{w} = \rho g B^{-1/2} P Q^* \left(\theta\left(\vec{w} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{e_3}\right),$$
$$B_{34}\zeta = -\rho g \int_\Gamma \left(\vec{e_3} \times \vec{r}\right) \zeta d\Gamma, \tag{4}$$

$$B := Q^* B_\sigma Q : D(B) \subset \overrightarrow{M_0}(\Omega) \to \overrightarrow{M_0}(\Omega); Q^* := A^{-1/2} V, Q := \gamma_n A^{-1/2}, \tag{5}$$

$$R := B^{1/2} P A^{-1/2} : \overrightarrow{\mathcal{J}}_{o,s}(\Omega) \to \overrightarrow{M_0}(\Omega); \tag{6}$$

$$R^+ := A^{-1/2} P B^{1/2}, \quad D(R^+) := D(B^{1/2}) \subset \overrightarrow{M_0}(\Omega), \tag{7}$$

$$\overline{R^*} := R^* \in \sigma_\infty(\overrightarrow{M_0}(\Omega)). \tag{8}$$

Здесь $\rho > 0$ — плотность жидкости, $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $J > 0$ — компонента тензора инерции системы относительно оси $O\,x_1$, m — масса всей системы, $l > 0$ — расстояние от O до центра масс C всей системы, $\alpha > 0$ — коэффициент трения на оси, $\vec{w}(t)$ — угловая скорость маятника.

Отметим (см. [1]), что оператор $\mathcal{A}$ является обратимым и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + R_1, \quad \mathcal{A}_0 = diag\,(\rho I; \rho I; J; I; I)\,, R_1 \in \sigma_\infty. \tag{9}$$

Заметим также, что оператор $\mathcal{B}$ можно представить в виде:

$$\mathcal{B} = (I + R_2)\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1, \qquad \mathcal{B}_0 = diag\left(\rho\nu A; \nu^{-1} B; \alpha; I; I\right), R_2 \in \sigma_\infty, \tag{10}$$

где $\mathcal{B}_1$ - ограниченный оператор.

Рассмотрим нормальные движения системы, то есть решения задачи (1) при $f(t,x) \equiv 0$, зависящие от t по закону $exp(-\lambda t)$ (см. [2]) . Приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{B}x = \lambda \mathcal{A} x, \tag{11}$$

которая равносильна системе уравнений

$$\rho\nu A\vec{v} = \lambda\left(\rho\vec{v} + \frac{1}{\nu}\rho R^*\vec{z} + I_{12}\vec{w}\right), \tag{12}$$

$$RA\vec{v} + \nu^{-1} B\vec{z} + B_{23}\vec{w} = \lambda\rho\vec{z}, \tag{13}$$

$$\alpha\vec{w} + B_{34}\zeta + mgl\vec{\delta} = \lambda\left(I_{21}\vec{v} + \nu^{-1} I_{21} R^*\vec{z} + J\vec{w}\right), \tag{14}$$

$$-\gamma_n\vec{v} - \frac{1}{\nu}\gamma_n R^+\vec{z} = \lambda\zeta, \tag{15}$$

$$-\vec{w} = \lambda\vec{\delta}. \tag{16}$$

Полагая $\lambda \neq 0$, можно исключить из (12) - (16) отклонение ζ и угловое перемещение $\vec{\delta}$. С учетом того, что

$$\zeta = -\frac{1}{\lambda}\gamma_n\left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}\rho R^{+}\vec{z}\right), \quad v \in D(A), \quad \vec{z} \in D(B). \tag{17}$$

$$\vec{\delta} = -\frac{1}{\lambda}\vec{w}, \tag{18}$$

получим

$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}R^{+}\vec{z}\right) + I_{12}\vec{w}\right), \tag{19}$$

$$B^{1/2}A^{1/2}\left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}R^{+}\vec{z}\right) + B_{23}\vec{w} = \lambda\rho\vec{z}, \tag{20}$$

$$\alpha\vec{w} - \frac{1}{\lambda}B_{34}\gamma_n\left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}R^{+}\vec{z}\right) - \frac{1}{\lambda}mgl\vec{w} = \lambda\left(I_{21}\left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}R^{+}\vec{z}\right) + J\vec{w}\right). \tag{21}$$

Вводя замену

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{\nu}R^{+}\vec{z}, \tag{22}$$

имеем

$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right), \tag{23}$$

$$B^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + B_{23}\vec{w} = \lambda\rho\vec{z}, \tag{24}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\lambda}mgl\right)\vec{w} - \frac{1}{\lambda}B_{34} = \lambda\left(I_{21}\vec{u} + J\vec{w}\right), \tag{25}$$

Из (4)-(25) следует, что

$$\vec{z} = \frac{1}{\lambda\rho}\left(B^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + B_{23}\vec{w}\right) = \frac{1}{\lambda\rho}\left(B^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + \rho g B^{-1/2}Q^{*}\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\right). \tag{26}$$

Подставим (23),(26) в (22), учитывая свойства операторов (5), (7) (см. [1], [3]), тогда

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + \frac{1}{\rho\nu\lambda}\Big(R^{+}B^{1/2}A^{1/2}\vec{u} \quad + \\
&+ \rho g R^{+}B^{-1/2}Q^{*}\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\Big) = \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + \\
&+ \frac{1}{\rho\nu\lambda}\Big(A^{-1/2}BA^{1/2}\vec{u} \quad + \rho g A^{-1/2}Q^{*}\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\Big) = \\
&= \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + \frac{1}{\rho\nu\lambda}\Big(A^{-1/2}BA^{1/2}\vec{u} \quad + \rho g V\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\Big) = \\
&= \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + \frac{1}{\rho\nu\lambda}\left(VB_{\sigma}\gamma_n\vec{u} \quad + \rho g V\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\right) = \\
&= \frac{\lambda}{\rho\nu}A^{-1}\left(\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + \frac{1}{\rho\nu\lambda}\left(A^{-1}GB_{\sigma}\gamma_n\vec{u} \quad + \rho g V\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right)\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, система уравнений (12) - (16) принимает вид

$$\begin{cases} \vec{u} = (\lambda/\rho\nu)A^{-1}\left(I_{11}\vec{u} + I_{12}\vec{w}\right) + (1/\rho\nu\lambda)A^{-1}\left(B_{11}\vec{u} + B_{12}\vec{w}\right), \\ \\ \alpha\vec{w} = \lambda\left(I_{21}\vec{u} + I_{22}\vec{w}\right) + \lambda^{-1}\left(B_{21}\vec{u} + B_{22}\vec{w}\right), \end{cases} \tag{28}$$

здесь

$$B_{11}\vec{u} = GB_{\sigma}\gamma_n\vec{u}, \qquad B_{12}\vec{w} = \rho g V\left(\theta\left(\vec{w}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e_3}\right), \tag{29}$$

$$B_{21}\vec{u} = B_{34}\gamma_n\vec{u}, \qquad\qquad B_{22}\vec{w} = mgl\vec{w}, \tag{30}$$

$I_{ij} \quad (i = 1,2; j = 1,2)$ определены в (3).

Запишем систему уравнений (28), (29) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \rho\nu\vec{u} \\ \alpha\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{pmatrix}\right\}. \tag{31}$$

или

$$I_0 y = \lambda\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{I}y + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}y, \quad y = (\vec{u},\vec{w})^t. \tag{32}$$

Осуществляя замену

$$y = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}z \tag{33}$$

и действуя слева оператором $\widetilde{\mathcal{A}}^{1/2}$ на обе части уравнения (32), получим

$$\lambda^2\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\widetilde{I}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}z + \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}z = \lambda\widetilde{\mathcal{A}}^{1/2}I_0\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}z. \tag{34}$$

Отсюда следует, что задача (11) равносильна спектральной задаче для квадратичного пучка

$$\left(\lambda^2 \widehat{\mathcal{A}}^{-1} - \lambda \widehat{I} + \widehat{\mathcal{B}}\right) z = 0, \qquad z \in \widehat{H}, \tag{35}$$

где
$\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$ - компактная операторная матрица;
$\widehat{I}$ - ограниченная положительно определенная операторная матрица;
$\widehat{\mathcal{B}}$ - неограниченная самосопряженная операторная матрица.

2. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

Покажем, что если квадратичная форма $\left(\widehat{\mathcal{B}}z, z\right)_{\widehat{H}}$ потенциальной энергии принимает отрицательные значения, то имеет место обращение теоремы Лагранжа об устойчивости (см. [2], [3]).

Теорема 1. *Если оператор потенциальной энергии* $\widehat{\mathcal{B}}$ *имеет ровно* æ *(с учетом кратностей) отрицательных собственных значений, то задача* (35) *имеет также ровно* æ *отрицательных собственных значений, которые расположены в левой комплексной полуплоскости.*

Доказательство проведем по этапам.

1. Введем в (35) новый спектральный параметр

$$\eta = -\lambda \tag{36}$$

и рассмотрим при $\eta > 0$ оператор

$$D(\eta) := \eta^2 \widehat{\mathcal{A}}^{-1} + \eta \widehat{I}. \tag{37}$$

Отметим важные свойства этого оператора: при любом $\eta > 0$ оператор $D(\eta)$ ограничен и положительно определен в $\widehat{H}$.
Доказательство того, что $D(\eta) \gg 0$, следует из свойств операторов $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}, \widehat{I}$ и того, что $\eta > 0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$D(\eta)\vec{z} = -\widehat{\mathcal{B}}\vec{z}. \tag{38}$$

Если это уравнение имеет при некотором $\eta > 0$ нетривиальное решение, то задача (35) будет иметь нетривиальное решение $\lambda = -\eta < 0$, то есть будет установлено утверждение теоремы.

2. Обобщая задачу (38), рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\widehat{\mathcal{B}}\vec{z} = -\beta D(\eta)\vec{z}, \tag{39}$$

где $\beta = \beta(\eta)$ —новый спектральный параметр.

С учетом того, что $\widehat{\mathcal{B}} = diag(B_+; 0; -B_-)$ $(B_\pm > 0)$, запишем (39) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} -B_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{23} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{40}$$

или

$$\begin{cases} -B_+ z_1 = \beta \left(D_{11} z_1 + D_{12} z_2 + D_{13} z_3 \right), \\ \\ 0 = \beta \left(D_{21} z_1 + D_{22} z_2 + D_{23} z_3 \right), \\ \\ B_- z_3 = \beta \left(D_{31} z_1 + D_{32} z_2 + D_{33} z_3 \right). \end{cases} \tag{41}$$

Так как $D \gg 0$, то $D_{ii} \gg 0$ и, следовательно, $D_{22} \gg 0$, то существует ограниченный оператор D_{22}^{-1}.

Рассматривая систему (41) при $\beta = 0$, получаем тривиальное решение. Далее полагаем $\beta \neq 0$.
Тогда

$$z_2 = -D_{22}^{-1} \left(D_{21} z_1 + D_{23} z_3 \right). \tag{42}$$

Подставляя (42)в (41), получим

$$\begin{pmatrix} -B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{11} & \widetilde{D}_{13} \\ \widetilde{D}_{31} & \widetilde{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Здесь

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{11} & \widetilde{D}_{13} \\ \widetilde{D}_{31} & \widetilde{D}_{33} \end{pmatrix} \gg 0.$$

Вводя замену

$$B_+^{1/2} \varphi_1 = \psi_1, \tag{44}$$

$$B_-^{1/2} \varphi_3 = \psi_3, \tag{45}$$

приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} B_+^{-1/2} \widetilde{D}_{11} B_+^{-1/2} \psi_1 + B_+^{-1/2} \widetilde{D}_{13} B_-^{-1/2} \psi_3 \\ B_-^{-1/2} \widetilde{D}_{31} B_+^{-1/2} \psi_1 + B_-^{-1/2} \widetilde{D}_{33} B_-^{-1/2} \psi_3 \end{pmatrix} \tag{46}$$

или

$$\psi = \beta \mathcal{J} \widehat{\mathcal{B}}_0 \psi, \qquad 0 < \widehat{\mathcal{B}}_0 = \widehat{\mathcal{B}}_0^* \in \sigma_\infty, \tag{47}$$

которая имеет ровно æ (с учетом кратностей) положительных собственных значений (см. [2], пар.1.5).

3. Преобразуем уравнение (39), используя свойство $D(\eta) \gg 0 \quad (\eta > 0)$. Из этого свойства следует, в частности, что существует ограниченный обратный оператор $D^{-1}(\eta) > 0$. Поэтому, осуществляя в (39) замену

$$D^{1/2}(\eta)\vec{z} = \vec{\xi} \tag{48}$$

и применяя $D^{-1/2}(\eta)$ к обеим частям полученного уравнения, приходим к задаче на собственные значения

$$K(\eta)\vec{\xi} := D^{-1/2}(\eta)(-\widehat{\mathcal{B}})D^{-1/2}(\eta)\vec{\xi} = \beta\vec{\xi}. \tag{49}$$

Для установления существования ровно æ отрицательных собственных значений в задаче (35) воспользуемся максиминимальным принципом, а также тем обстоятельством, что в уравнении вида (49) не сам оператор $K(\eta)$, а лишь его положительная часть $K_+(\eta)$ является æ - мерным (ограниченным, поэтому и компактным) оператором.
Имеем

$$\begin{aligned} \beta_{+,k}(\eta) = \max\min \left(D^{-1/2}(\eta)(-\widehat{\mathcal{B}})D^{-1/2}(\eta)\vec{\xi},\vec{\xi}\right)_{\widehat{H}} / (\vec{\xi},\vec{\xi})_{\widehat{H}} = \\ = \max\min\left(-\widehat{\mathcal{B}}\vec{z},\vec{z}\right)_{\widehat{H}} / \left(D(\eta)\vec{z},\vec{z}\right)_{\widehat{H}} . \end{aligned} \tag{50}$$

Если при некотором $\eta > 0$ окажется, что $\beta_+(\eta) = 1$, то уравнение (38) будет иметь нетривиальное решение, и теорема будет доказана.

4. Заметим, что справедливы неравенства

$$\varphi_-(\eta)\left(\widehat{\mathcal{A}}^{-1} + \widehat{I}\right) \le D(\eta) \le \varphi_+(\eta)\left(\widehat{\mathcal{A}}^{-1} + \widehat{I}\right), \tag{51}$$

$$\varphi_-(\eta) := \min_{\eta>0}\{\eta;\eta^2\}, \qquad \varphi_+(\eta) := \max_{\eta>0}\{\eta;\eta^2\}.$$

Отсюда и из (50) получаем, что

$$\frac{\gamma_{+,k}}{\varphi_+(\eta)} \quad \le \quad \beta_{+,k}(\eta) \quad \le \quad \frac{\gamma_{+,k}}{\varphi_-(\eta)}, \tag{52}$$

где $\gamma_{+,k}$ - собственные значения задачи

$$-\widehat{\mathcal{B}}\vec{z} = \gamma\left(\widehat{\mathcal{A}}^{-1} + \widehat{I}\right)\vec{z}. \tag{53}$$

5. Опираясь на оценки (52), уравнение (38) решим графически, построив графики функций

$$\gamma_{+,k}/\varphi_+(\eta), \qquad \gamma_{+,k}/\varphi_-(\eta),$$

а также единичной функции. Так как функции $\varphi_\pm(\eta)$ непрерывны и монотонно возрастают, то найдутся такие η_1 и η_2 , что

$$\gamma_{+,k}/\varphi_+(\eta_1) = 1, \qquad \gamma_{+,k}/\varphi_-(\eta_2) = 1, \qquad 0 < \eta_1 \le \eta_2..$$

В силу (52) и непрерывной зависимости $\beta_+(\eta)$ от параметра η на промежутке $[\eta_1, \eta_2]$ найдется такое η_0, что $\beta(\eta_0) = 1$. Тогда число $\lambda = \lambda_0 = -\eta_0 < 0$ дает нетривиальное решение уравнения (38). $\square$

Вывод. Таким образом, в данной работе рассмотрена ситуация, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и нижняя грань оператора B_σ отрицательна.Так как оператор B_σ имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой на бесконечности (см. [1], лемма 1.), то рассматривался общий случай, когда оператор B_σ имеет æ (с учетом их кратности) отрицательных собственных значений и q - кратное нулевое собственное значение:

$$\lambda_1(B_\sigma) \leq \ldots \leq \lambda_{æ}(B_\sigma) < 0 = \lambda_{æ+1}(B_\sigma) = \ldots = \lambda_{æ+q}(B_\sigma) <$$
$$< \lambda_{æ+q+1}(B_\sigma) \leq \ldots \quad (54)$$

В частности, если интенсивность гравитационного поля изменяет знак и модуль, то минимальное собственное значение оператора B_σ, совпадающее с его нижней гранью, может стать отрицательным, и тогда выполняются условия (54) с $æ \geq 1, \quad q \geq 0$.

Список литературы

[1] Дудик О.А. Малые колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. ISSN 1683 - 4720. Труды ИПММ НАН Украины 2007. Вып. 14.

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989 г, - 416 с.

[3] Копачевский Н.Д. К проблеме малых движений и нормальных колебаний капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся сосуде.//Современная математика. Фундаментальные направления, 2007 г.(в печати).