Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 20 (59). 2007 г. № 1. С. 26 - 33

УДК 351.1

СТРУКТУРА И СПЕКТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЫ СКРУЧЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ВОЛОКОН

Алексеев К.Н., Яворский М.А.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: alexeyev@ccssu.crimea.ua, maxyavorsky@yahoo.com

Получено аналитическое решение векторного волнового уравнения для скрученных идеальных волокон методом теории возмущений с вырождением. Показано, что учет векторного слагаемого в волновом уравнении приводит только к незначительной перенормировки спектра постоянных распространения, в то время как структура мод совпадает с полученной в скалярном приближении. Установлено, что продольная компонента поля фундаментальных мод переносит оптические вихри с топологическим зарядом ± 1.
Ключевые слова: идеальное волокно, фотоупругость, оптический вихрь.

ВВЕДЕНИЕ

Скрученные оптические волокна являются предметом теоретического и экспериментального исследования достаточно давно. Основной интерес к таким волокнам обусловлен возможностью с помощью скрутки волокна существенно уменьшить поляризационную модовую дисперсию [1-4], которая неизбежно возникает в процессе изготовления любого реального волновода и приводит к значительному снижению как скорости передачи информации по линиям связи, так и чувствительности волоконно-оптических датчиков, основанных, например, на эффекте Фарадея. В работе [5] впервые теоретически был исследован вопрос о влиянии скрутки на распространение фундаментальных мод, как идеального одномодового волокна, так и волокон с эллиптической формой поперечного сечения. Основным методом решения данной задачи было применение метода связанных мод к векторному волновому уравнению, однако решения были получены в скалярном приближении. Вместе с тем, так называемый векторный член в волновом уравнении, имеет достаточно сложную структуру в случае, когда показатель преломления волокна является тензором, который в случае скрученных волокон описывает влияние механических напряжений на распространение света посредством фотоупругих эффектов. Более того, как показывает анализ, в данном случае векторный член содержит слагаемые, которые по порядку величины сравнимы с членами, описывающими механические напряжения в скалярном приближении. Таким образом, основной целью данной работы является учет влияния векторного члена в волновом уравнении на распространение фундаментальной моды скрученного идеального волокна.

СТРУКТУРА И СПЕКТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЫ СКРУЧЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ВОЛОКОН

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

В качестве модели мы рассматриваем прямое волокно с круглой формой поперечного сечения, состоящее из сердцевины радиуса r_0 и бесконечной оболочки. Известно [5,6], что однородная скрутка волокна, в предположении об однородности и изотропности его упругих свойств, приводит к следующему виду показателя преломления оптического волновода в декартовом базисе $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$:

$$\hat{n}^2\left(r,\varphi\right) = n^2\left(r\right)\hat{I} + q p_{44} n_{co}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & r\sin\varphi \\ 0 & 0 & -r\cos\varphi \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $n^2\left(r\right) = n_{co}^2\left(1-2\Delta f\left(r\right)\right)$ - показатель преломления идеального волокна [7], $\Delta = \dfrac{n_{co}^2 - n_{cl}^2}{2n_{co}^2}$, n_{co}, n_{cl}^2 - значения показателя преломления на оси и в оболочки идеального волокна, соответственно, $\hat{I}$ - единичная матрица, $q = 2\pi/H$, H - шаг скрутки, p_{44} - константа, характеризующая материал волокна, $\left(r,\varphi,z\right)$ - цилиндрические координаты, а ось z - ось оптического волокна. В данной работе объектом исследования являются слабонаправляющие оптические волокна, для которых высота профиля показателя преломления $\Delta << 1$.

Как известно [7], одним из методов исследования слабонаправляющих волокон является решение так называемого векторного волнового уравнения. Поскольку данное уравнение является главным математическим объектом исследования в предлагаемой работе, и поскольку процедура его получения в случае скрученных волокон несколько отличается от стандартной, мы приведем его вывод из системы макроскопических уравнений Максвелла, дополненных материальными уравнениями для немагнитной среды. Соответствующие уравнения для непроводящей среды в гауссовой системе единиц имеют вид [8]:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{5}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{6}$$

$$\vec{B} = \vec{H}, \tag{7}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного поля, соответственно, ε - диэлектрическая проницаемость среды и c – скорость света в вакууме. Следуя [9], возьмем операцию rot от обеих частей уравнения (3). Используя уравнения (2) и (7), получаем: $\mathrm{rotrot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{H}$. Далее, для преобразования правой части получившегося уравнения используем известное соотношение $\mathrm{rotrot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$, где $\vec{\nabla} = \left(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\right)$ и Δ - оператор Лапласа, а для преобразования правой части – уравнение (2) и (6):

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right). \qquad (8)$$

Если ε описывает неоднородную, но изотропную среду (т.е. не является тензором), то, используя уравнение (6) и учитывая, что $\vec{E} \propto e^{-i\omega t}$, получаем векторное волновое уравнение: $\left(\Delta + k^2 n^2(x,y,z)\right)\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\left(\vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{\nabla}n^2(x,y,z)\right)$, где $k = 2\pi/\lambda$ - волновой вектор в вакууме, λ - длина волны и учтено, что $\varepsilon = n^2$. В случае скрученного волокна, однако, оказывается невозможным так же легко исключить $\mathrm{div}\,\vec{E}$, как это было сделано в правой части уравнения (8). Действительно, исходя из (1) запишем диэлектрический тензор в виде: $\hat{\varepsilon}(x,y,z) = \varepsilon(x,y)\cdot\hat{1} + \delta\hat{\varepsilon}(z)$. Тогда, записав уравнение (6) покомпонентно: $D_i = \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(x,y,z)E_j$, подставляем его в (4) и получаем:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} \equiv \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\vec{E} + E_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} + \delta\varepsilon_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i} + E_j\frac{\partial\delta\varepsilon_{ij}}{\partial x_i} = 0,$$

где подразумевается соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Выражая отсюда $\mathrm{div}\,\vec{E}$, получаем следующее уравнение:

$$\left(\Delta + k^2 n^2(x,y,z)\right)\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\left(\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\ln\varepsilon\right) + \frac{\delta\varepsilon_{ij}}{\varepsilon}\frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \frac{E_j}{\varepsilon}\frac{\partial\delta\varepsilon_{ij}}{\partial x_i}\right). \qquad (9)$$

Важной особенностью данного уравнения является «зацепление» поперечной $\vec{E}_t$ и продольной E_z компонент электрического поля, т.е. их влияние на пространственно-временную эволюцию друг друга, что, в частности, выражается в невозможности записать замкнутую систему уравнений относительно $\vec{E}_t$. Тем не менее, используя относительную малость продольной компоненты в сравнении с поперечной для слабонаправляющих волокон: $\frac{E_z}{E_t} \sim \frac{\lambda}{r_0}$ [7], обычно все-таки пренебрегают подобным «зацеплением» и работают только с поперечной составляющей вектора электрического поля $\vec{E}_t$. Однако, как следует из вида показателя преломления (1), для учета влияния механических напряжений на распространение света по скрученному волокну необходимо учитывать продольную компоненту E_z, несмотря на ее относительную малость.

2. СПЕКТР И СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МОД

Как следует из выражения (1) второе слагаемое, описывающее фотоупругие эффекты в показателе преломления, представляет собой малую добавку (для кварца $p_{44} = -0.075$, $r \propto r_0$) к показателю преломления идеального волокна $n^2(r)$. Это позволяет использовать теорию возмущений для решения уравнения (9), которое удобно представить в виде уравнения на собственные функции и собственные значения некоторого оператора:

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right)|\psi\rangle = \beta^2 |\Phi\rangle, \tag{10}$$

где $\hat{H}_0 = \left(\nabla_t^2 + k^2 n^2(r)\right)\hat{I}$ - оператор, описывающий распространение света в идеальном волокне с показателем преломления

$$n^2(r), \ |\psi\rangle = \begin{pmatrix} e_x(r,\varphi) \\ e_y(r,\varphi) \\ e_z(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

β - постоянная распространения и оператор возмущения $\hat{V}$ имеет вид:

$$\hat{V} = k^2 q p_{44} n_{co}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & r\sin\varphi \\ 0 & 0 & -r\cos\varphi \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \psi\left(r\cos^2\varphi\nabla_r + \sin^2\varphi\right) + f''\cos^2\varphi & \psi\left(r\sin 2\varphi\nabla_r - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \frac{1}{2}f''\sin 2\varphi & 0 \\ \psi\left(r\sin 2\varphi\nabla_r - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \frac{1}{2}f''\sin 2\varphi & \psi\left(r\sin^2\varphi\nabla_r + \cos^2\varphi\right) + f''\sin^2\varphi & 0 \\ i\beta r\psi\cos\varphi & i\beta r\psi\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+iqp_{44}n_{co}^2\beta \begin{pmatrix} 0.5\sin 2\varphi r\nabla_r & -1-\cos^2\varphi r\nabla_r & 0 \\ 1+\sin^2\varphi r\nabla_r & -0.5\sin 2\varphi r\nabla_r & 0 \\ ir\beta\sin\varphi & -ir\beta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $\nabla_r \equiv \partial/\partial r$, $f = \ln n^2(r)$, $\psi = \frac{1}{r}f'$ (штрих обозначает производную по r) и в двух последних операторах учтено, что для фундаментальных мод $\nabla_\varphi = 0$. В выражении для оператора возмущения $\hat{V}$ первый член возникает из левой части уравнения (9), а второй и третий – из векторного члена. Именно два последние слагаемые не учитывались в работе [5], хотя первый и третий члены в (11) имеют один порядок величины.

Известно [7], что в случае фундаментальной моды ($l = 0$) спектр оператора $\hat{H}_0$ двукратно вырожден – постоянные распространения двух ортогонально поляризованных мод совпадают. Таким образом, необходимо использовать вариант теории возмущений с вырождением. Следуя известному рецепту [10], мы должны записать оператор возмущения $\hat{V}$ в $\hat{H}_0$ - представлении, для чего необходимо выбрать базис в пространстве собственных функций $\left|\psi_i^{(0)}\right\rangle$ оператора нулевого приближения, принадлежащих одному собственному значению $\tilde{\beta}^2$, где $\tilde{\beta}$ - скалярная постоянная распространения. В качестве такого базиса удобно выбрать следующие поля:

$$\left|\psi_1^{(0)}\right\rangle = \left(F_0(r), 0, \frac{i}{\beta}F_0'(r)\cos\varphi\right)^T, \quad \left|\psi_2^{(0)}\right\rangle = \left(0, F_0(r), \frac{i}{\beta}F_0'(r)\sin\varphi\right)^T, \qquad (12)$$

где T обозначает транспонирование, $F_0(r)$ - функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка в сердцевине и модифицированная функция Ханкеля в оболочке волокна, штрих. Матричные элементы оператора $\hat{V}$ в базисе (12) определяются как $V_{ij} = \dfrac{\left\langle \psi_i^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_j^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \psi_i^{(0)} \middle| \psi_i^{(0)} \right\rangle}$, где предполагается следующее определение скалярного произведения:

$$\left\langle \Phi \middle| \Psi \right\rangle = \iint\limits_S r dr d\varphi \left(\Phi_x^*, \Phi_y^*, \Phi_z^* \right) \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где S - все поперечное сечение волокна. После несложных вычислений получаем вид матрицы возмущения в указанном базисе:

$$V = \begin{pmatrix} A_0 & i\Sigma \\ -i\Sigma & A_0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $A_0 = \left(F_0 F_0' \right)_{r=r_0}$, $\Sigma = -\dfrac{q p_{44} k^2 n_{co}^4}{\tilde{\beta}}$. Структура мод и поляризационные поправки $\Delta\beta^2 = \beta^2 - \tilde{\beta}^2$ определяются из стандартного уравнения: $V\mathbf{x} = \Delta\beta^2 \mathbf{x}$. Отметим, что компоненты вектор-столбца $\mathbf{x} = (a, b)$ имеют смысл коэффициентов разложения поля моды по базису (12): $a\left|\psi_1^{(0)}\right\rangle + b\left|\psi_2^{(0)}\right\rangle$. Таким образом, фундаментальные $l = 0$ моды скрученного идеального волокна имеют вид:

$$\left|\psi_1\right\rangle \approx \left(F_0, iF_0, \frac{iF_0'}{\tilde{\beta}} e^{i\varphi} \right)^T e^{i\beta_1 z}, \quad \left|\psi_2\right\rangle \approx \left(F_0, -iF_0, \frac{iF_0'}{\tilde{\beta}} e^{-i\varphi} \right)^T e^{i\beta_2 z}, \tag{15}$$

а соответствующий спектр постоянной распространения таков:

$$\beta_{1,2} \approx \tilde{\beta} + \frac{A_0}{2\tilde{\beta}} \mp \frac{q p_{44} n_{co}^2}{2}, \tag{16}$$

где учтено, что для слабонаправляющих волокон $\tilde{\beta} \approx k n_{co}$ [7].

Проанализируем полученные результаты. Если в выражениях (15) пренебречь продольной компонентой электрического поля в силу ее относительной малости, то полученные выражения будут представлять собой право - и лево - циркулярно-поляризованные поля. Данный вывод полностью совпадает с известными результатами работы [5], несмотря на то, что в ней было учтено только первое слагаемое в (11), тогда как о наличии других членов даже не шла речь. Такое положение дел объясняется просто «счастливой » случайностью, а именно тем, что вклад третьего члена в выражении (11) в матрицу возмущения (14) в данном случае оказался равным нулю. Вместе с тем, второе слагаемое в (11), которое описывает спин-орбитальное взаимодействие в оптических волокнах [11,12], в случае фундаментальных $l=0$ мод дает тривиальный вклад в матрицу (14) в виде совпадающих диагональных элементов A_0, что не приводит к изменению структуры фундаментальных мод, а лишь обуславливает небольшую перенормировку спектра постоянных распространения (16) посредством члена $A_0/2\tilde{\beta}$. Тем не менее, выражения (15) содержат, хоть и чисто эвристический, но принципиально новый результат. Он заключается в том, что продольная компонента мод (15) представляет собой скалярную дислокацию волнового фронта [13], а именно – оптический вихрь [14] с единичным (по модулю) топологическим зарядом: $F_0'(r)e^{\pm i\varphi}$, причем знак «+» соответствует правой, а знак «-» - левой циркулярной поляризации. Отметим, что слагаемые, обуславливающие расщепление спектра постоянных распространения (16) и приводящие к наблюдаемому эффекту вращения линейно-поляризованного света [15] при распространении по волокну, полностью совпадают с известными выражениями [5].

ВЫВОДЫ

Разработана теория возмущений с вырождением в применении к оптическим волокнам, скрутка которых приводит к наведению механических напряжений. Данный метод позволяет, в частности, учитывать влияние спин-орбитального взаимодействия на распространение излучения, что особенно актуально при исследовании структуры высших мод с азимутальным числом $l \geq 1$. Показано, что для фундаментальной моды скрученного идеального волокна учет векторного слагаемого в волновом уравнении приводит только к незначительной перенормировки спектра постоянных распространения. Установлено, что продольная компонента электрического поля фундаментальных мод переносит оптический вихрь с топологическим зарядом ± 1.

Список литературы

1. Barlow A.J., Ramskov-Hansen J.J., Payne D.N. Birefringence and polarization mode-dispersion in spun single-mode fibers // Appl.Opt.- 1981.- V.20, №17.- P.2962-2968.
2. Fujii Y., Sano K. Polarization coupling in twisted elliptical optical fiber // Appl.Opt.-1980.- V.19, №15.- P.2602-2605.
3. Li M.J., Chen X., Nolan D.A. Effect of residual stress on polarization mode dispersion of fibers made with different types of spinning // Opt. Lett.-2004.- V.29, №5.- P.448-450.
4. Wang M., Li T., and Jian S. Analytical theory for polarization mode dispersion of spun and twisted fibre // Opt. Exp.- 2003.- V.11, №19.- P.2403-2410.
5. Ulrich R., Simon A. Polarization optics of twisted single-mode fibres // Appl.Opt.- 1979.- V.18, № 13.- P.2241-2251.
6. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах.- М.:Мир, 1987.-616с.
7. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов.- М.: Радио и связь, 1987. - 656 с.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика, т.2. Теория поля, -М.: Наука, 1973.- 502с.
9. Born M., Wolf E. Principles of Optics, 6^{th} ed.- Pergamon, Oxford, 1987.- 719с.
10. Давыдов А.С. Квантовая механика.- М.: Наука, 1973.- 703С.
11. Алексеев К.Н., Воляр А.В., Фадеева Т.А. Спин-орбитальное взаимодействие и эволюция оптических вихрей в возмущенных слабо направляющих волокнах // Оптика и спектроскопия. 2002.- Т.93, №.4.- С.639-649.
12. Liberman V.S., Zel'dovich B.Ya. Spin-orbit interaction of a photon in an inhomogeneous medium // Phys. Rev. A.- 1992.- V.45, №8.- P.5199-5207.
13. Nay J.F, Berry M.V. Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. A.- 1974.- V.336.- P.165-190.
14. Soskin M.S., Gorshkov V.N., Vasnetsov M.V., Malos J.T., Heckenberg N.R. Topological charge and angular momentum of light carrying optical vortices // Phys. Rev. A.- 1998.-V.56, №5.- P.4064-4075.
15. Smith A.M. Polarization and magnetooptic properties of single-mode optical fiber // Appl. Opt.- 1978.- V.17, №1.- P.52-56.

Алексєєв К. Н., Яворський М.А. **Структура та спектр фундаментальної моди скручених ідеальних волокон** // Учені записки Таврійського національного університета ім. В. І. Вернадського. – 2007. – Серія «Фізика». - Т. 20 (59). - № 1. - С. 26 - 33.

Отримано аналітичний розв'язок векторного хвильового рівняння для скручених ідеальних волокон методом теорії збурювань із виродженням. Показано, що правильне урахування векторного доданка у хвильовому рівнянні приводить тільки до незначної перенормировки спектра сталої поширення, у той час як структура мод збігається з отриманої в скалярному наближенні. Установлено, що поздовжній компонент поля фундаментальних мод переносить оптичні вихори з топологічним зарядом ± 1.

Ключові слова: ідеальне волокно, фотопружність, оптичний вихор.

Alexeyev C.N., Yavorsky M.A. **Structure and spectrum of the fundamental mode of twisted ideal fibres** // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2007. – Series «Fizika». – V. 20 (59). - № 1. – P. 26 - 33.

The analytic solution of the vector wave equation for twisted ideal fibre by means of perturbation theory with degeneracy has been established. It is demonstrated that the correct account of the vectorial term in wave equation provided small renormalization of the propagation constant spectrum, while the mode structure is the same as in the scalar approximation. The presence of optical vortices with topological charge ± 1 in the longitudinal component of mode fields is shown.

Keywords: ideal fibre, photo-elasticity, optical vortex.

Поступила в редакцию 10.01.2007 г.