Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 89 – 94

УДК 517.98

П. А. Старков

ПРИМЕРЫ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

Введение

В данной работе предложены примеры постановок многокомпонентных задач сопряжения. Метод предложенный в [2], позволяет исследовать данные задачи сопряжения, когда имеется несколько областей в $\mathbb{R}^m$, произвольным образом пристыкованных одна к другой на различных частях их границы, с граничными условиями сопряжения первого либо второго вида на участках этих границ.

Постановки

1^0. Пусть области $\Omega_1, ..., \Omega_p$ из $\mathbb{R}^m$ произвольным образом пристыкованы друг к другу и имеют липшицевы границы. Введем матрицу границ Γ этих областей по следующим правилам. Через Γ_{ij} обозначим участок границы $\partial\Omega_i$ области Ω_i, примыкающий к области Ω_j; при $i = j$ через $\Gamma_{ii} = S_i$ обозначим участок свободной части $\partial\Omega_i$, не примыкающий ни к какой области Ω_j.

Нетрудно видеть, что матрица границ

$$\Gamma = (\Gamma_{ij})_{i,j=1}^p$$

обладает следующими свойствами:

а) свойство симметрии $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ (как множества в $\mathbb{R}^m$);

б) наличие пустых элементов, если $\mathrm{mes}_{m-1}\,\Gamma_{ij} = 0$;

в) свойство аддитивности

$$\partial\Omega_k = \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_{kj}, \qquad \mathrm{mes}\,\partial\Omega_k = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{mes}\,\Gamma_{kj}, \quad k = 1, ..., p.$$

Обозначим через $\vec{n}_{ij}$ единичный вектор внешней нормали для области Ω_i на участке границы Γ_{ij}; тогда очевидно, $\vec{n}_{ij} = -\vec{n}_{ji}$. Аналогичным образом определим операторы следа γ_{ij} для функции u_i на поверхности Γ_{ij}:

$$\gamma_{ij} u_i := u_i|_{\Gamma_{ij}}.$$

В качестве примера случай $m = 2$, $p = 3$ представлен на рисунке 1

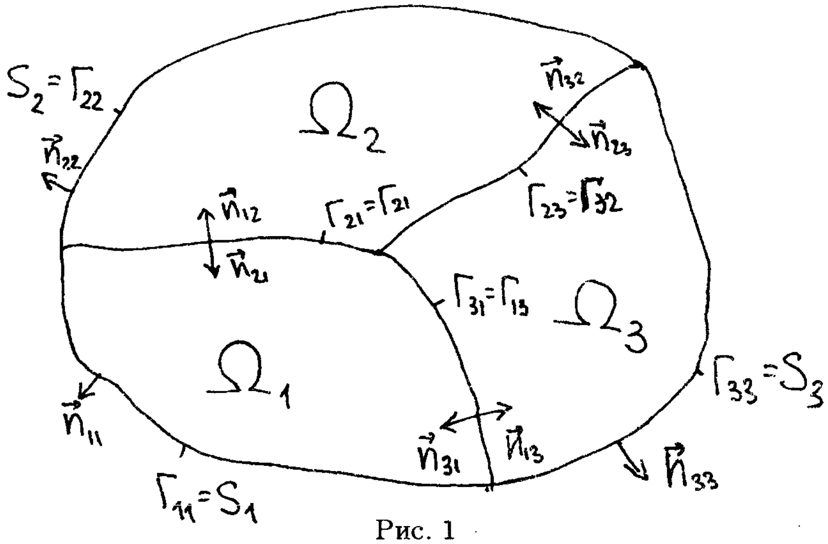

Рис. 1

2^0. На границах раздела Γ_{ij}, как это видно из предыдущих рассуждений, возможна постановка одного из следующих видов краевых условий:

а) при $i \neq j$ на Γ_{ij} ставятся условия первой задачи сопряжения, в этом случае данную Γ_{ij} обозначим через Γ'_{ij};

б) при $i \neq j$ на Γ_{ij} ставятся условия второй задачи сопряжения, в этом случае данную Γ_{ij} обозначим через Γ''_{ij};

в) при $i = j$, т.е. на внешних границах S_i, возможна постановка либо условия Дирихле, либо условия внутренней задачи сопряжения для данной области Ω. В общем случае можно считать, что

$$S_i = S'_i \bigcup S''_i, \qquad \mathrm{mes}\left(S'_i \bigcap S''_i\right) = 0,$$

причем на S'_i ставится граничное условие Дирихле, а на S''_i – граничное условие внутренней задачи.

Такие обозначения границ раздела Γ_{ij} областей Ω_i позволяют определить, какое граничное условие ставится на данной части границы, и потому полностью сформулировать стыковую задачу сопряжения. С учетом введенных обозначений общая формулировка этой новой задачи для уравнения Гельмгольца принимает следующий вид.

В областях Ω_i, $i = 1, ..., p$, необходимо найти функции $u_i(x)$, $x \in \Omega_i$, удовлетворяющие системе уравнений

$$u_i - \Delta u_i + \lambda u_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \quad i = 1, ..., p, \tag{1}$$

а также граничных условий:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} + \frac{\partial u_j}{\partial n_{ji}} = \mu\gamma_{ij}u_i, \quad \gamma_{ij}u_i = \gamma_{ji}u_j \quad (\text{на } \Gamma'_{ij},\ i < j), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} = -\frac{\partial u_j}{\partial n_{ji}} = \mu\left(\gamma_{ij}u_i - \gamma_{ji}u_j\right) \quad (\text{на } \Gamma''_{ij},\ i<j), \tag{3}$$

$$\gamma_{ii}u_i = 0 \quad (\text{на } S'_i), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ii}} = \mu\gamma_{ii}u_i \quad (\text{на } S''_i). \tag{5}$$

3^0. Исследование задачи (1)–(5) можно проводить по схемам, описанным в главе 1 для первой и второй задач сопряжения для уравнения Гельмгольца. Именно, в качестве основного гильбертова пространства E следует взять пространство $E := \bigoplus_{k=1}^{p} L_2(\Omega_k)$. Далее, в качестве пространства F следует зять подпрсстранство пространства $F := \bigoplus_{k=1}^{p} H^1(\Omega_k)$, для элементов которого выполнены условия (4) и вторая группа условий (2), т.е. главные условия связей с точки зрения вариационного исчисления. Таким образом, следует взять

$$F := \{u = (u_1;...;u_p) \in H^1(\Omega) : \gamma_{ij}u_i = \gamma_{ji}u_j \ (\text{на } \Gamma'_{ij},\ i<j),\ \gamma_{ii}u_i = 0 \ (\text{на } S'_i)\}.$$

Если эти условия отсутствуют в постановке задачи (1)–(5), то тогда $F = H^1(\Omega)$.

В качестве пространства G следует взять ортогональную сумму пространств $L_2(\Gamma_{ij})$ при $i<j$ и пространств $L_2(S''_i)$. Наконец, в качестве оператора следа γ следует взять прямоугольную матрицу с элементами, составленными из определенных комбинаций операторов следа γ_{ij} в зависимости от характера краевых условий (2)–(5).

4^0. Рассмотрим в качестве примера случай, изображенный на выше рисунке 1, причем будем дополнительно считать, что

$$S_1 = S''_1,\ S_2 = S'_2,\ S_3 = S'_3,\ \Gamma_{12} = \Gamma''_{12},\ \Gamma_{13} = \Gamma'_{13},\ \Gamma_{23} = \Gamma'_{23}.$$

Тогда речь идет о задаче вида

$$\begin{gathered}
u_i - \Delta u_i + \lambda u_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \quad i = 1,2,3, \quad \gamma_{33}u_3 = 0 \quad (\text{на } S_3),\\
\tfrac{\partial u_1}{\partial n_{11}} = \mu\gamma_{11}u_1 \quad (\text{на } S_1), \quad \tfrac{\partial u_2}{\partial n_{22}} = \mu\gamma_{22}u_2 \quad (\text{на } S_2),\\
\gamma_{13}u_1 = \gamma_{31}u_3 \quad (\text{на } \Gamma_{13}), \qquad \gamma_{23}u_2 = \gamma_{32}u_3 \quad (\text{на } \Gamma_{23}),\\
\tfrac{\partial u_1}{\partial n_{12}} = -\tfrac{\partial u_2}{\partial n_{21}} = \mu\left(\gamma_{12}u_1 - \gamma_{21}u_2\right) \quad (\text{на } \Gamma_{12}),\\
\tfrac{\partial u_1}{\partial n_{13}} + \tfrac{\partial u_3}{\partial n_{31}} = \mu\gamma_{13}u_1 \quad (\text{на } \Gamma_{13}), \quad \tfrac{\partial u_2}{\partial n_{23}} + \tfrac{\partial u_3}{\partial n_{32}} = \mu\gamma_{23}u_2 \quad (\text{на } \Gamma_{23}).
\end{gathered} \tag{6}$$

В задаче (6) следует взять

$$E = L_2(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k), \quad F = \{u = (u_1;u_2;u_3) \in H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k):$$

$$u_3 = 0 \ (\text{на } S_3), \quad u_1 = u_3 \ (\text{на } \Gamma_{13}), \quad u_2 = u_3 \ (\text{на } \Gamma_{23})\},$$

а в качестве пространства G – совокупность $L_2(G)$ элементов вида

$$\varphi = (\varphi''_1;\varphi''_2;\varphi''_{12};\varphi'_{13};\varphi'_{23})^t$$

с квадратом нормы

$$||\varphi||^2_{L_2(\Gamma)} := ||\varphi_1''||^2_{L_2(S_1)} + ||\varphi_2''||^2_{L_2(S_2)} + ||\varphi_{12}''||^2_{L_2(\Gamma_{12})} + ||\varphi_{13}'||^2_{L_2(\Gamma_{13})} + ||\varphi_{23}'||^2_{L_2(\Gamma_{23})}.$$

Можно проверить, опираясь на первую формулу Грина для оператора Лапласа для областей Ω_k, что для решений задачи (6) выполнено соотношение

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} + \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} - \mu(\gamma u, \gamma v)_{L_2(\Gamma)} = 0, \qquad \forall v \in F, \tag{7}$$

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_k} \left[|\nabla u_k|^2 + |u_k|^2\right] d\Omega_k, \qquad ||u||^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_k} |u_k|^2 d\Omega_k,$$

где γ есть (5×3) - матрица вида

$$\gamma := \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{12} & -\gamma_{21} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{31} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \frac{1}{2}\gamma_{32} \end{pmatrix}.$$

Из тождества (7) можно установить, что задача (6) равносильно проблеме

$$(I + \lambda A^{-1} - \mu B)\eta = 0, \qquad \eta \in L_2(\Omega), \tag{8}$$

причем операторы A^{-1} и B обладают свойствами

$$0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \qquad 0 \le B \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{9}$$

Далее, можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ и $\mu(B)$ операторов A^{-1} и B соответственно, расположенные в порядке их убывания, совпадают с последовательными максимумами вариационных отношений $||u||^2_{L_2(\Omega)}/||u||^2_{H^1(\Omega)}$ и $||\gamma u||^2_{L_2(\Gamma)}/||u||^2_{H^1(\Omega)}$ соответственно и потому имеют степенную асимптотику собственных значений (см. [1])

$$\lambda_k(A^{-1}) = c_A k^{-2/3}(1 + o(1)), \quad k \to \infty, \quad c_A > 0,$$
$$\mu(B) = c_B k^{-1/2}(1 + o(1)), \quad k \to \infty, \quad c_B > 0.$$

Из этих фактов следует, что задача (6) является частным случаем абстрактной спектральной задачи (см. [7]) и для ее решений справедливы общие выводы, полученные в статьях [3, 4, 5].

Аналогичные утверждения справедливы и для решений задачи (1)–(5), а также для такого же вида задач с равномерно эллиптическим оператором, систем сильно эллиптических уравнений второго порядка, уравнений линейной теории упругости, уравнений линейной гидродинамики и других. При этом возможны варианты задач, когда одна из областей имеет ненулевое по мере пересечение с другой, см., например, при $p = 2,\ m = 3$ рис. 2, где $\Omega_2 \subset \Omega_1$, и рис. 3, где $\mathrm{mes}(\Omega_1 \bigcap \Omega_2) > 0$.

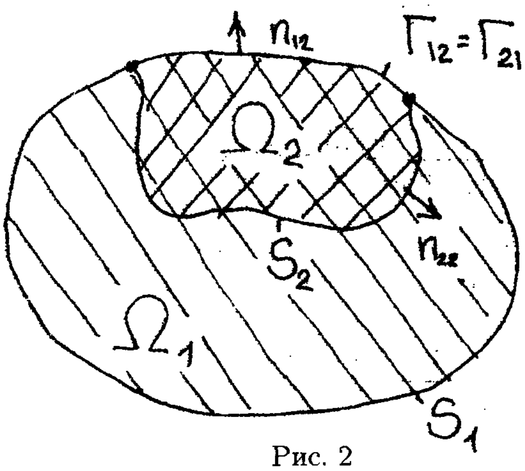

Рис. 2

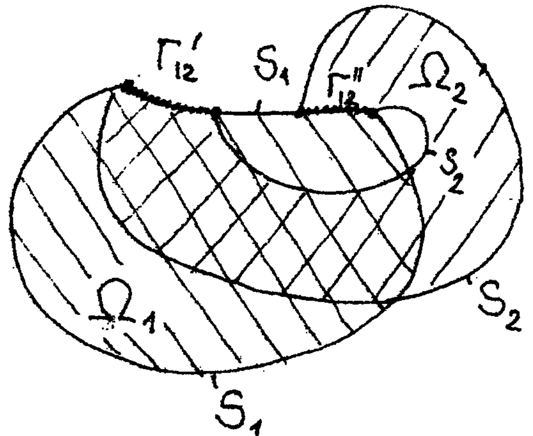

Рис. 3

Выводы

В данной статье предложены обобщения задач сопряжения [6] в виде многокомпонентных задач сопряжения, когда условия сопряжения одного из двух встречавшихся выше типов ставятся на части границы нескольких соприкасающихся областей.

Автор выражает благодарность Н.Д.Копачевскому за очень полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. *Асимптотика спектра дифференциальных уравнений* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – т.38, N.6. – с.1362-1392.

[2] Старков П. А. Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского. - 2002. - Т.15(54), N1. - с.58-62.

[3] Старков П. А. *Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения.* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. – 2002. – Т.15(54), N2. – с.82-88.

[4] Старков П. А. *О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения.* // Таврический вестник математики и информатики, Симферополь. – 2003. – N1. ISSN 1729-3901 – с.118-131.

[5] Старков П. А. *Исследование задач сопряжения при исключительных значениях фиксированного параметра.* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. – 2003. – Т.16(55), N2. – с.81-89.

[6] Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory.* - Berlin: WILEY-VCH Verlag. – 1999. – 377 p. ISBN 3-527-40092-3

[7] Starkov P. A. Abstract Transmission Problems // 1-ая летняя школа по топологической алгебре и функциональному анализу, Львовский национальный университет им.И.Франко, Львов. - 2003. - с. 37-38. (in English)