Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 80–88

УДК 517.988.6

С. К. Персидский, В. В. Журавлев

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему уравнений в конечных разностях вида

$$x_s(m+1) = f_s(m, x_1(m), ..., x_n(m)), (s = 1, ..., n) \tag{1}$$

причем $f_s(m, 0, ..., 0) \equiv 0, (s = 1, ..., n)$.

Обычно предполагается, что в области $h : I \times R^n$ все функции f_s являются однозначными и принимают в любой точке указанной области конечные значения, где $I = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$. Тогда при возрастании аргумента m решение системы вполне определяется начальными значениями, что позволяет проводить исследование устойчивости системы (1) различными методами, в том числе методом функций Ляпунова. Однако, при убывании аргумента m [1] решения этой системы могут делиться на отдельные ветви, что делает невозможным построение полной системы первых интегралов системы (1), а в случае, когда система (1) является автономной, не представляется возможным исследовать свойства ее траекторий, и т. д. Для решения указанных задач для соответствующих разностных систем необходимо ввести понятие единственности решения, аналогичное такому понятию для систем дифференциальных уравнений.

Будем говорить, что решение разностной системы вида (1) обладает в области h свойством единственности, если через каждую точку $(m_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in h$ проходит единственное решение этой системы (как при возрастании, так и при убывании дискретного аргумента m). Например, указанное определение будет заведомо выполненным для линейной разностной системы

$$x_s(m+1) = p_{s1}(m)x_1(m) + ... + p_{sn}(m)x_n(m), (s = 1, ..., n) \tag{2}$$

в случае, когда коэффициенты этой системы непрерывны на множестве I, а матрица, составленная из коэффициентов системы $P(m)$, является невырожденной при любом значении $m \in I$. Показано [2], что в этом случае можно построить полную систему первых интегралов системы (2), которая широко используется в теории устойчивости для обращения некоторых теорем второго метода Ляпунова [3, 2].

Заметим, что в общем случае предположение о гладкости правых частей системы (1) в области h не гарантирует единственности решения этой системы. В этом состоит существенное отличие между системами дифференциальных и разностных уравнений, которое не было учтено в некоторых работах, например, неверные формулировки теорем существования для разностных систем, которые содержатся в работах [4, 5]. Действительно, в работе [6] рассмотрено скалярное уравнение $x(m+1) = sin(x(m))$ с бесконечно дифференцируемой правой частью, однако решения этого уравнения не обладают свойством единственности. В самом деле, рассмотрим решения уравнения со следующими начальными значениями при $m = 0$: $x(0) = \pm\pi k, (k \in Z)$. Тогда при $m = 1$ все рассматриваемые решения пройдут через одну и ту же точку $(1; 0)$. Кроме того, решения, выходящие из этой точки при уменьшении аргумента m на единицу будут делиться на счетное число ветвей. В качестве другого примера рассмотрим линейную систему вида

$$\begin{cases} x_1(m+1) = x_1(m) - x_2(m) \\ x_2(m+1) = -x_1(m) + x_2(m) \end{cases} \tag{3}$$

с вырожденной матрицей $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. При $m = 0$ возьмем за начальную точку $M(a; a+1)$, где a - любое действительное число, тогда при $m = 1$ все рассматриваемые решения пройдут через точку $(-1; 1)$.

Рассмотрим далее автономную систему

$$x(m+1) = F(x(m)), \tag{4}$$

где $x \in R^n, m \in Z$. Если правые части системы - гладкие функции, и отображение $F : R^n \to R^n$ является инъекцией, т. е. $F(b) \neq F(a)$ при $b \neq a$, где a, b, - любые векторы из R^n, тогда нетрудно видеть, что решения системы (4) будут обладать свойством единственности в каждой точке множества $h_1 : m \in Z, x \in R^n$, где под Z понимается множество всех целых чисел числовой оси. Заметим, что достаточное условие существования и единственности решения дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть правые части системы (4) - однозначные, непрерывные по всем переменным функции в некоторой выпуклой области $H \subset R^n$, и в каждой точке этой области принимают конечные значения $\forall m \in I$. Если матрица Якоби отображения $F : H \to R^n$ всюду в H является знакоопределенной, тогда всюду в H существует единственное решение системы (4).*

Будем предполагать, что все решения автономной системы (4) в области h_1 обладают свойством единственности.

Утверждение 1. *Если $x = \varphi(m)$ - какое-нибудь решение системы (4), то при любом $c \in Z$ функция $x = \varphi(m+c)$ также будет являться решением этой системы, причем оба рассматриваемых решения порождают одну и ту же дискретную траекторию γ, где под траекторией γ системы (4) будем понимать проекцию соответствующего решения этой системы на пространство R^n.*

Отсюда немедленно следует следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если две дискретные траектории системы (4) γ_1 и γ_2 имеют хотя бы одну общую точку, то они тождественны друг другу, т. е. в рассматриваемом случае любые две дискретные траектории системы (4) либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

Условие теоремы о существовании и единственности решений будет заведомо выполнено для линейной системы

$$x(m+1) = P(m)x(m), \tag{5}$$

где при любом $m \in Z$ матрица $P(m)$ является невырожденной, а коэффициенты системы $p_{sk}(m)$ - однозначные функции, принимающие в каждой точке множества h_1 конечные значения. Покажем, что решения линейной системы (5) обладают в рассматриваемой области свойством единственности.

Действительно, рассмотрим случай возрастания аргумента m. Пусть $m = m_0 + 1$, в качестве начальных значений возьмем ненулевые векторы a и b такие, что

$$x(m_0) = a, \ y(m_0) = b, \ a \neq b.$$

Тогда $x(m_0+1) = Aa, \ y(m_0+1) = Ab$, и рассмотрим

$$x(m_0+1) - y(m_0+1) = Aa - Ab = A(a-b).$$

Так как A - невырожденная матрица и $a \neq b$, то $x(m_0+1) \neq y(m_0+1)$. Аналогичные рассуждения, проведенные для случая убывания аргумента m, обосновывают единственность решения и в этом случае.

В частности, указанные условия будут заведомо выполнены для линейной системы разностных уравнений

$$x(m+1) = Px(m) \tag{6}$$

с невырожденной матрицей P, что позволяет в пространстве R^2 рассмотреть фазовые портреты этой системы, исходя из общих свойств решений линейной разностной системы с постоянными коэффициентами. Заметим, что в книге П. Видаля [7] приведено утверждение о том, что, исходя из общих свойств решений линейной разностной системы второго порядка, нельзя сделать заключение о фазовых портретах траекторий указанной системы. Отметим также, что исследование фазовых портретов для нелинейных систем одного класса проводилось в работе [8].

В дальнейшем, будем рассматривать линейную разностную систему с постоянными коэффициентами при $n = 2$ вида

$$\begin{cases} x_1(m+1) = a_{11}x_1(m) + a_{12}x_2(m) \\ x_2(m+1) = a_{21}x_1(m) + a_{22}x_2(m), \end{cases} \tag{7}$$

характеристическое уравнение которой имеет вид $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$.

Рассмотрим случаи корней характеристического уравнения.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - действительные, $\lambda_i \neq 1, \lambda_i \neq 0$, где $i = 1, 2$.

Общее решение системы (7) имеет вид:

$$x(m) = c_1\lambda_1^m h_1 + c_2\lambda_2^m h_2,$$

где h_1 и h_2 - собственные вектора матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Обозначим через

$$y_1 = \text{пр}_{h_1} x(m), y_2 = \text{пр}_{h_2} x(m) \tag{8}$$

проекции вектора $x(m)$ на направления h_1 и h_2 соответственно. Ограничимся рассмотрением случая $c_1 \geq 0$ и $c_2 \geq 0$, поскольку наряду с траекторией (8) система (7) имеет также траектории, лежащие во втором, третьем и четвертом квадрантах соответственно.

1) Пусть $0 < \lambda_i < 1, (i = 1, 2), \lambda_1 \neq \lambda_2$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_1 < \lambda_2$, т. е. имеет место неравенство $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Тогда при $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$

$$y_1 \to 0,\ y_2 \to 0, \text{ при } \ m \to +\infty$$
$$y_1 \to +\infty,\ y_2 \to +\infty, \text{ при } m \to -\infty.$$

Кроме того, $\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{c_1(\lambda_1-1)\lambda_1^m}{c_2(\lambda_2-1)\lambda_2^m} \to 0$ при $m \to +\infty$. Т. о. при $m \to +\infty$ траектория "входит"в начало координат и в пределе "касается"оси y_2, а при $m \to -\infty$ - удаляется от начала координат, оставаясь в первом квадранте системы координат y_1, y_2.

При $c_1 = c_2 = 0$ траектория представляет собой положение равновесия $x = 0$ ($y_1 = y_2 = 0$). При $c_1 = 0$, $c_2 > 0$ траектория совпадает с положительной полуосью оси y_2. Имеет место фазовый портрет, аналогичный портрету в случае устойчивого узла системы двух дифференциальных уравнений.

2. Если $1 < \lambda_1 < \lambda_2$, то при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$y_1 \to 0,\ y_2 \to 0, \text{ при } m \to -\infty$$
$$y_1 \to +\infty,\ y_2 \to +\infty, \text{ при } m \to +\infty.$$

Расположение траекторий остается таким же, как и в предыдущем случае, но изменяется направление движения точки при возрастании параметра m. Случай аналогичен случаю неустойчивого узла для системы дифференциальных уравнений.

Схематическая иллюстрация случаев 1 и 2 приведена на рис. 1.

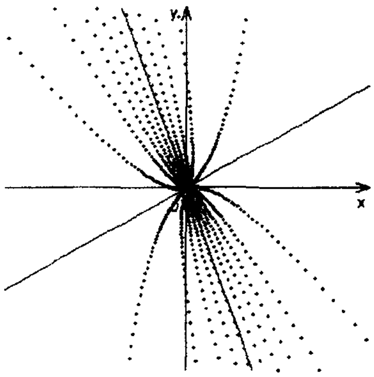

Рис. 1

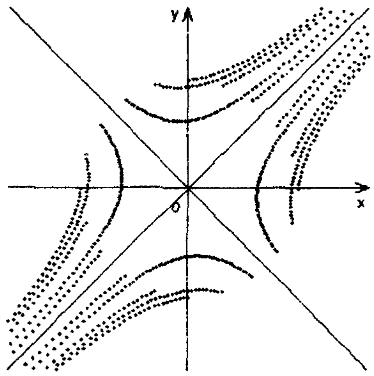

Рис. 2

3. $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. В этом случае при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ имеем

$$y_1 \to 0,\ y_2 \to +\infty, \text{ при } m \to +\infty$$
$$y_1 \to +\infty,\ y_2 \to 0, \text{ при } m \to -\infty.$$

Кроме того, дискретная траектория, попав в начальный момент в какой-то координатный угол системы координат y_1, y_2, остается в нем и в дальнейшем, т.о. расположение траекторий аналогично тому, какое имеет место в случае седла для системы дифференциальных уравнений (рис. 2).

4. $\lambda_{1,2} = \rho(cos\varphi \pm sin\varphi) = \rho e^{\pm i\varphi}$.

В этом случае матрица системы (7) имеет комплексный собственный вектор $h = \frac{1}{2}(h_1 - ih_2)$ с собственным значением λ_1, где вектора h_1 и h_2 - действительные. Кроме того, вектор $\overline{h} = \frac{1}{2}(h_1 + ih_2)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Заметим, что вектора h_1 и h_2 являются линейно независимыми, т. к. в противном случае были бы линейно зависимы и вектора h и $\overline{h}$, что невозможно в силу их соответствия различным собственным значениям. В комплексной форме общее решение системы (7) можно записать в виде

$$z = c_1\lambda_1^m h + c_2\overline{\lambda_1^m}\overline{h}$$

где c_1 и c_2 - комплексные константы. Соответственно любое действительное решение системы (7) можно записать в виде $x = Re(z)$, т. е.

$$x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(c_1\lambda_1^m h + c_2\overline{\lambda_1^m}\overline{h}) + \frac{1}{2}(\overline{c}_1\overline{\lambda_1^m}\overline{h} + \overline{c}_2\lambda_1^m h) =$$
$$= \frac{1}{2}(c_1 + \overline{c}_2)\lambda_1^m h + \frac{1}{2}(\overline{c}_1 + c_2)\overline{\lambda_1^m}\overline{h}.$$

Пусть $\frac{1}{2}(c_1 + \overline{c}_2) = c$, тогда $\frac{1}{2}(\overline{c}_1 + c_2) = \overline{c}$ и

$$x = c\lambda_1^m h + \overline{c}\overline{\lambda_1^m}\overline{h}.$$

Запишем число c в тригонометрической форме:

$$c = Re^{i\alpha}.$$

Тогда $\bar{c} = Re^{-i\alpha}$, и получаем, что

$$x = Re^{i\alpha}\rho^m e^{i\varphi m}\tfrac{1}{2}(h_1 - ih_2) + Re^{-i\alpha}\rho^m e^{-i\varphi m}\tfrac{1}{2}(h_1 + ih_2) =$$
$$= R\rho^m \frac{e^{i(\alpha+\varphi m)} + e^{-i(\alpha+\varphi m)}}{2} h_1 - iR\rho^m \frac{e^{i(\alpha+\varphi m)} - e^{-i(\alpha+\varphi m)}}{2} h_2 =$$
$$= R\rho^m cos(\alpha + \varphi m) h_1 + R\rho^m sin(\alpha + \varphi m) h_2.$$

Обозначая через y_1 и y_2 координаты вектора x относительно базиса h_1 и h_2, получим

$$y_1 = R\rho^m cos(\alpha + \varphi m), \quad y_1 = R\rho^m cos(\alpha + \varphi m).$$

Таким образом, при $R = 0$ получаем положение равновесия. а при $R > 0$ возможны следующие ситуации:

1) при $\rho < 1$

$$y_1 \to 0, \ y_2 \to 0 \text{ при } m \to +\infty,$$
$$y_1^2 + y_2^2 \to +\infty \text{ при } m \to -\infty.$$

Траектории представляют собой дискретные спирали аналогично случаю устойчивого фокуса.

2) при $\rho > 1$

$$y_1^2 + y_2^2 \to +\infty \text{ при } m \to +\infty,$$
$$y_1 \to 0, \ y_2 \to 0 \text{ при } m \to -\infty.$$

Траектории аналогичны траекториям в случае неустойчивого фокуса.

Схематическая иллюстрация случаев 1) и 2) приведена на рис. 3.

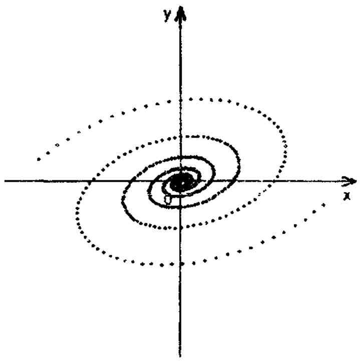

Рис. 3

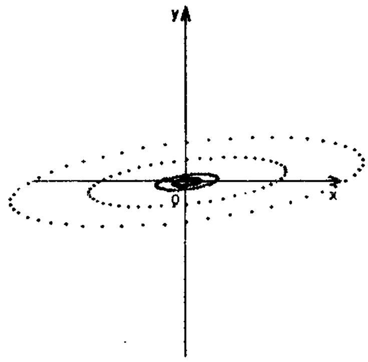

Рис. 4

3) при $\rho = 1$ мы получаем, что $y_1^2 + y_2^2 = R^2$, и расположение траекторий аналогично случаю центра (рис. 4).

5. Рассмотрим далее случай кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$.

1) Если система (7) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(m+1) = ax_1(m) \\ x_2(m+1) = ax_2(m), \end{cases}$$

тогда траектории системы будут представлять собой семейство дискретных лучей, входящих (при $a < 1$) или выходящих (при $a > 1$) из начала координат, таким образом имеет место фазовый портрет, аналогичный случаю дикритического узла для систем дифференциальных уравнений (рис. 5).

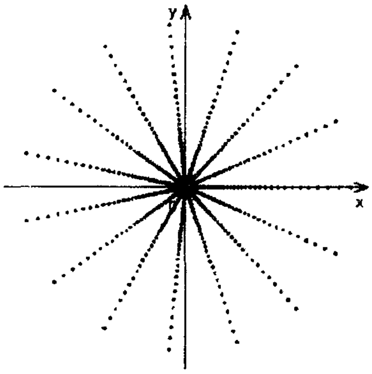

Рис. 5

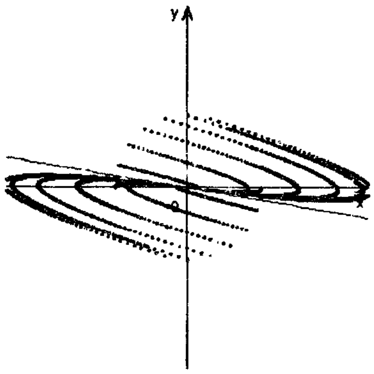

Рис. 6

2) Остальные случаи кратного корня. В этом случае общее решение системы (7) имеет вид:

$$x(m) = c_1\lambda^m h_1 + c_2\lambda^m(h_1(m+1) + h_2),$$

где вектора h_1 и h_2 удовлетворяют соотношениям $Ah_1 = \lambda h_1$ и $Ah_2 = \lambda(h_1 + h_2)$. Рассмотрим проекции решения на направления h_1 и h_2:

$$y_1 = \text{пр}_{h_1}x = c_1\lambda^m + c_2\lambda^m(m+1), \; y_2 = \text{пр}_{h_2}x = c_2\lambda^m.$$

Предположим, что $c_2 \neq 0$.

2a) при $\lambda > 1$ имеем, что

$$y_1 \to \infty, \; y_2 \to \infty \text{ при } m \to +\infty,$$
$$y_1 \to 0, \; y_2 \to 0 \text{ при } m \to -\infty.$$

Кроме того, если рассмотреть характер стремления проекций к положению равновесия при $m \to -\infty$, то становится очевидным, что y_2 стремится к нулю монотонно, а y_1 - либо монотонно, либо монотонно возрастая (убывая - при отрицательных значениях) до некоторого значения, а затем монотонно устремляясь к нулю. Таким образом, фазовый портрет в этом случае выглядит так же, как и в случае вырожденного узла.

2b) при $0 < \lambda < 1$

$$y_1 \to 0, \; y_2 \to 0 \text{ при } m \to +\infty,$$
$$y_1 \to \infty, \; y_2 \to \infty \text{ при } m \to -\infty.$$

Характер стремления проекций к нулю остается прежним, таким образом, и в этом случае фазовый портрет аналогичен портрету в случае вырожденного узла.

Если же $c_2 = 0$, то в этом случае $y_1 = c_1\lambda^m$, $y_2 = 0$, и движение будет происходить по прямолинейной траектории, соответствующей собственному вектору h_1 в направлении, определяемом корнем λ: если $0 < \lambda < 1$, то движение будет происходить к положению равновесия, если же $\lambda > 1$, то в противоположную сторону (рис. 6).

6. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \notin \{0; 1\}$.

В этом случае общее решение системы (7) имеет вид:

$$x(m) = c_1 h_1 + c_2\lambda_2^m h_2.$$

Проектируя решение на вектора h_1 и h_2, получаем:

$$y_1 = \text{пр}_{h_1} x(m) = c_1,\ y_2 = \text{пр}_{h_2} x(m) = c_2\lambda_2^m.$$

Таким образом, фазовый портрет будет представлять собой семейство параллельных прямых, что аналогично случаю одного нулевого корня для систем дифференциальных уравнений. В случае, когда $c_1 = 0$ либо $c_2 = 0$ - получаем также прямолинейные траектории (рис. 7).

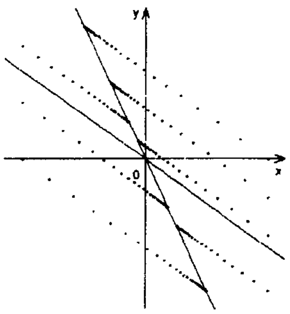

Рис. 7

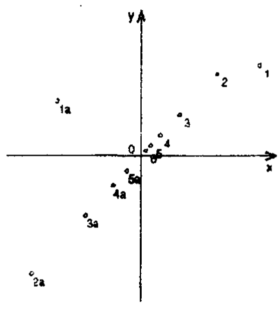

Рис. 8

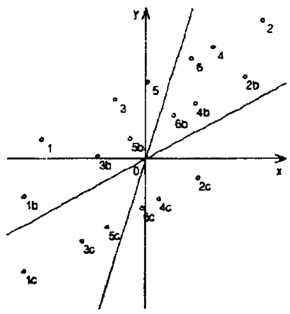

Рис. 9

7. $\lambda_1 = 0$.

1) пусть $\lambda_2 \notin \{0; 1\}$. Тогда общее решение системы (7) будет иметь вид

$$x(m) = c_2\lambda_2^m h_2,$$

т. е. будет справедливо соотношение $\frac{x_2(m+1)}{x_1(m+1)} = c$ (т. к. система уравнений будет иметь следующий вид $\begin{cases} x_1(m+1) = a_{11}x_1(m) + a_{12}x_2(m) \\ x_2(m+1) = c(a_{11}x_1(m) + a_{12}x_2(m)) \end{cases}$).

Т. о. точка в следующий за начальным момент времени окажется на прямой $x_2 = cx_1$. Дальнейшее ее движение будет происходить по указанной прямой, направление же движения определится корнем λ_2: если $0 < \lambda_2 < 1$, то движение будет происходить к положению равновесия, если же $\lambda_2 > 1$, то в противоположную сторону (рис. 8).

2) при $\lambda_2 = 1$ точка, попав в момент времени $m_0 + 1$ на прямую $x_2 = cx_1$, двигаться не будет, т. о. вся указанная прямая будет состоять из положений равновесия системы.

3) при $\lambda_2 = 0$ матрица системы A будет нулевой, и при любых начальных значениях в следующий за начальным момент времени точка попадет в начало координат.

8. В случае, когда один или оба корня имеют отрицательную вещественную часть, изображающая точка траектории будет "прыгать" из одного координатного угла системы координат y_1, y_2 в другой за счет множителя $(-1)^m$, который появится в проекциях, соответствующих таким корням. Например, в случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$ каждая траектория будет представлять собой две дискретные прямые (рис. 9).

Список литературы

[1] Персидский С. К. *Несколько теорем о неустойчивости для систем конечно-разностных уравнений*// Сб. Дифференциальные уравнения и их приложения, изд. Казахского гос. унив-та, Алма-Ата, 1980 г. - С. 74-81.

[2] Персидский С. К., Журавлев В. В. *Несколько теорем о равномерной асимптотической устойчивости решений системы конечно-разностных уравнений* // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. - Т. 14 (53), №1, серия "математика". Симферополь, 2001 г. - С. 87-92.

[3] Персидский К. П. *К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений* // "Успехи мат. наук, новая серия", 1946 г., Т.1, в. 5-6 (15-16). - С. 250-256.

[4] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей* // М., Наука, Физматгиз, 1967 г. 376с.

[5] Бромберг П. В. *Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования*// Главная редакция физ.-мат. лит-ры изд-ва "Наука", М., 1967 г.

[6] Персидский С. К. *О некоторых теоремах второго метода Ляпунова для разностных уравнений*// III Всесоюзная Четаевская конференция по уст-сти движения, аналит. механике и управлению движением, Иркутск, 1977 г. - С. 23-24.

[7] Видаль П. *Нелинейные импульсные системы*// М., Энергия, 1974 г. 336 с.

[8] Персидский С. К., Дрёмов С. Ю. *О поведении траекторий на плоскости одного класса нелинейных систем* // Ученые записки СГУ. – 1999. – No. 12(51). – С. 57 – 61.

E-mail: persidskiy@ccssu.crimea.ua