Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 73 – 79

УДК 517.98

И.В. ОРЛОВ

Q–НЕПРЕРЫВНЫЕ И S–НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

В последнее десятилетие активно развивается, прежде всего в работах С.Н.Самборского [1,2], а также Т. Нойбрунна [3], альтернативный подход к обобщенным решениям дифференциальных уравнений, основанный на переходе от обобщенных функций к классам эквивалентности квазинепрерывных (Q–непрерывных) функций, совпадающих на плотном множестве (S–непрерывных функций).

Преимущества этого подхода связаны с использованием теории решеток, поскольку, как показал С.Н.Самборский, пополнение по Мак–Нейлу (абстрактный аналог теоремы Дедекинда о сечениях) решетки непрерывных функций совпадает с пространством S–непрерывных функций.

Возникает естественный вопрос о переносе полученной техники на более обширные классы отображений. Целью настоящей работы является обобщение понятий Q–непрерывности и S–непрерывности на общие отображения в топологических пространствах и изучение свойств пространств Q–непрерывных и S–непрерывных отображений. При этом получен ряд результатов, новых и в вещественном случае. Хотя формально мы оперируем с топологическими и равномерными пространствами, однако основной класс пространств, обладающих необходимым набором свойств – это пространства Фреше.

В вещественном случае часть результатов статьи представлена в выполненной под руководством автора магистерской работе, см. [4]. Перейдем к обзору содержания статьи.

В первой части введены Q–непрерывные (глобально и в точке) отображения топологических пространств, описаны некоторые классы Q–непрерывных и Q–разрывных отображений, выделен класс пространств, для которых Q–непрерывные отображения непрерывны на всюду плотном G_δ (теорема 1.10).

Во второй части изучается пространство Q–непрерывных отображений $Q(X,Y)$. В случае отображений равномерных пространств в $Q(X,Y)$ введена равномерная структура, обобщающая метрику Хаусдорфа для графиков отображений (теорема 2.3). Факторизация $Q(X, Y)$ по совпадению замыканий графиков отображений приводит к пространству S–непрерывных отображений $S(X, Y)$. Выделен класс пространств X, Y, для которых S–непрерывные отображения есть классы Q–непрерывных отображений, совпадающих на всюду плотном G_δ (теорема 2.6).

1. Q–НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1.1. Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ назовем *Q–непрерывным (квазинепрерывным) на* X, если для любых открытых подмножеств $U \subset X$, $V \subset Y$, множество $f^{-1}(V) \cap U$ либо пусто, либо содержит непустое открытое подмножество.

Прежде всего, придадим более простой "формульный" вид определению квазинепрерывности. Далее $\overline{A}$ и A^0, соответственно, — замыкание и внутренность множества A.

Теорема 1.2. *Отображение $f : X \to Y$ Q-непрерывно на X тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $V \subset Y$:*

$$\overline{f^{-1}(V)^0} \supset f^{-1}(V). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f Q–непрерывна на X, множество $V \subset Y$ открыто, $x \in f^{-1}(V)$ (случай $f^{-1}(V) = \emptyset$ тривиальный), $U(x)$ – открытая окрестность точки x. Согласно определению 1.1,

$$(f^{-1}(V) \cap U(x))^0 = f^{-1}(V)^0 \cap U(x) \neq \emptyset,$$

откуда, в силу произвольности $U(x)$, $x \in \overline{f^{-1}(V)^0}$. Так как x – произвольная точка $f^{-1}(V)$, то выполнено (1).

Достаточность. Пусть выполнено (1), $V \in Y$ и $U \subset X$ – открыто, $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$. Тогда из (1) следует $\overline{f^{-1}(V)^0} \cap U \neq \emptyset$. Пусть $y \in \overline{f^{-1}(V)^0} \cap U$. Выберем окрестность $W(y) \subset U$. По определению точки прикосновения, $\overline{f^{-1}(V)^0} \cap W(y) \neq \emptyset$, откуда

$$(f^{-1}(V) \cap U)^0 = f^{-1}(V)^0 \cap U \neq \emptyset,$$

т. е. пересечение $f^{-1}(V) \cap U$ содержит непустое открытое множество. Следовательно, f является Q–непрерывной на X. □

Замечание 1.3. Сравнивая (1) с классическим определением непрерывности в точке:

$$x \in f^{-1}(V)^0$$

для любой окрестности $V = V(f(x))$ в Y, нетрудно "локализовать" понятие Q–непрерывности.

Определение 1.4. Отображение $f : X \to Y$ назовем *Q–непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности $V = V(f(x))$ точки $f(x)$ в Y:

$$x \in \overline{f^{-1}(V)^0}. \tag{2}$$

Проверим равносильность Q–непрерывности на X и Q–непрерывности в каждой точке $x \in X$.

Теорема 1.5. *Функция f Q–непрерывна на X тогда и только тогда, когда f Q-непрерывна в любой точке $x \in X$.*

Доказательство. Необходимость. Если функция f Q–непрерывна на X, то подставив в (1) $V = V(f(x))$ $(\forall x \in X)$, получим:

$$\overline{f^{-1}(V(f(x)))} \supset f^{-1}(V(f(x))) \ni x,$$

т. е. (2) выполнено.

Достаточность. Если (2) выполнено для $\forall x \in X$, то выбрав любое открытое множество $V \subset Y$, найдем для любого $x \in f^{-1}(V)$ такую открытую окрестность $V(f(x))$, чтобы $V(f(x)) \subset V$. Тогда:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\Big(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} V(f(x))\Big) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V(f(x))),$$

откуда, используя (2) и свойства внутренности и замыкания, находим:

$$\overline{f^{-1}(V)^0} = \overline{\Big[\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V(f(x)))\Big]^0} \supset \overline{\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} [f^{-1}(V(f(x)))]^0} \supset$$

$$\supset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \overline{[f^{-1}(V(f(x)))]^0} \supset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} = f^{-1}(V),$$

т.е. выполнено (1), откуда f Q–непрерывна на X. □

Опишем некоторые классы Q–непрерывных и Q–разрывных отображений.

Теорема 1.6. *Если функция f непрерывна в точке $x \in X$, то f Q–непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Непрерывность f в точке x означает, что для любой окрестности $V(f(x))$ существует окрестность $U(x)$: $f^{-1}(V(f(x))) \supset U(x)$. Отсюда $f^{-1}(V(f(x)))^0 \ni x$, и тем более $\overline{f^{-1}(V(f(x)))^0} \ni x$, т. е. выполнено (2). □

Получим более общее утверждение.

Теорема 1.7. *Если $F \subset X$, $\overline{F^0} = F$, $f : X \to Y$, и сужение $f|_F$ непрерывно в точке $x \in F$, то f Q–непрерывно в точке x.*

Доказательство. Для $x \in F^0$ утверждение теоремы следует из предыдущего предложения. Если же $x \in \partial F$ и сужение $f|_F$ непрерывно в точке x, то для любой открытой окрестности $V = V(f(x))$ ее прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в F, откуда, с учетом плотности F^0 в окрестности ∂F, имеем

$$f^{-1}(V) = U \cup \partial' F,$$

где U открыто в X, $x \in \partial' F \subset \partial F$. Следовательно, $f^{-1}(V)^0 \supset U$, откуда

$$x \in \partial' F \subset \overline{U} \subset \overline{f^{-1}(V)^0},$$

т.е. выполнено условие (2). □

Теорема 1.8. *Если $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (устранимый разрыв), то f не является Q-непрерывной в точке x.*

Доказательство. Выберем такую окрестность $V(f(x_0))$ и окрестность $U(x_0)$, чтобы $f^{-1}(V(f(x_0))) \cap U(x_0) = \emptyset$. Тогда $f^{-1}(V(f(x_0)))^0 \cap U(x_0) = \emptyset$, откуда $\overline{f^{-1}(V(f(x_0)))^0} \not\ni x_0$. □ □

Отметим, что функция с разрывом II рода также может быть Q-непрерывной, как показывает следующий

Пример 1.9. *Пусть* $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0 \quad , & x = 0. \end{cases}$ *Тогда f имеет в точке $x = 0$ разрыв II рода. При этом для любой окрестности $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon;\ \varepsilon)$:*

$$f^{-1}(V_\varepsilon(0))^0 = \left\{ x \mid \left|\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \right\},$$

и так как 0 - точка прикосновения последнего множества, то $\overline{f^{-1}(V_\varepsilon(0))^0} \ni 0$, откуда f Q-непрерывна при $x = 0$.

Обобщая известный для вещественных Q–непрерывных функций факт [1,2], опишем класс пространств X, Y, для которых Q–непрерывные отображения из X в Y являются непрерывными всюду на X, кроме множества I категории по Бэру.

Теорема 1.10. *Если X — бэровское пространство ([5], с.19), Y — равномерное пространство ([5], с.17) с I аксиомой счетности, и отображение $f : X \to Y$ Q-непрерывно на X, то отображение f непрерывно на некотором всюду плотном подмножестве X типа G_δ.*

Доказательство. Выберем счетную базу окружений диагонали $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ в Y^2; $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n = \Delta Y$. Для каждого $x \in X$ положим $V_n(f(x)) = \{y \in Y | (y, f(x)) \in W_n\}$.

Тогда $\{V_n(f(x))\}_{n=1}^{\infty}$ — счетная база окрестностей $f(x)$ в равномерной топологии Y, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n(f(x)) = \{f(x)\}$. Положим для каждого $n = 1, 2, \ldots$:

$$U_n = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(V_n(f(x)))^0. \tag{3}$$

Каждое множество U_n открыто и плотно в X, поскольку, в силу (2) и (3), каждая точка $x \in X$ удовлетворяет условию

$$x \in \overline{f^{-1}(V_n(f(x)))^0} \subset \overline{U}_n,$$

откуда $\overline{U}_n = X$. Положим

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Т.к. X — бэровское пространство, то ([5], с.19) множество U также плотно в X и имеет, по построению, тип G_δ.

Пусть $x \in X$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой $x_n \in X$, что

$$x \in f^{-1}(V_n(f(x_n)))^0 =: O_n.$$

Таким образом, O_n — открытые окрестности точки x ($n = 1, 2, \ldots$), причем $f(O_n) \subset V_n(f(x_n)) \ni f(x)$. Так как, в силу равномерности топологии Y, множества $V_n(f(x_n))$ ($n = 1, 2, \ldots$) образуют базу окрестностей точки $f(x)$, то приходим к определению непрерывности f в произвольной точке $x \in U$. □

Заметим, что, в частности, утверждение теоремы 1.10 выполнено, если X и Y — пространства Фреше ([5], с.19).

2. Пространства Q–непрерывных и S–непрерывных отображений

Определение 2.1. Пусть X, Y — топологические пространства. Обозначим через $Q(X, Y)$ пространство всех Q–непрерывных отображений из X в Y. Если Y — топологическое векторное пространство, то $Q(X, Y)$ будем рассматривать как векторное пространство (с поточечными операциями).

В случае, когда X и Y — равномерные пространства, в $Q(X, Y)$ можно ввести равномерную топологию, обобщающую хаусдорфову метрику.

Определение 2.2. Пусть Z — равномерное пространство, W — окружение диагонали в Z^2, $A \subset Z$. Обозначим

$$W(A) = \{z_1 \in Z \mid \exists\, z_2 \in A : (z_1, z_2) \in W\}.$$

(Легко видеть, что $W_1(W_2(A)) \subset (W_1 \circ W_2)(A)$).

Если X, Y — равномерные пространства, $Z = X \times Y$, W — окружение диагонали в Z^2; $f, g \in Q(X,Y) =: E$, G_f и G_g — графики отображений f и g, то введем окружение диагонали $\widetilde{W}$ в E^2 по правилу:

$$((f,g) \in \widetilde{W}) :\Leftrightarrow (G_f \subset W(G_g), G_g \subset W(G_f)). \tag{4}$$

Проверим, что система $\{\widetilde{W}\}$ образует базу равномерности в E^2.

Теорема 2.3. *Система окружений диагонали* $\mathfrak{B} = \{\widetilde{W}\}$, *заданная соотношением (4), задает базу равномерности в* $E = Q(X,Y)$, *которую мы назовем равномерностью Хаусдорфа в* E.

Доказательство. Проверим основные свойства равномерности ([5], с.17):

а) Каждое множество $\widetilde{W}$, очевидно, содержит диагональ ΔE^2.

б) Из симметричности условия (4) следует $(\widetilde{W} \in \mathfrak{B}) \Rightarrow (\widetilde{W}^{-1} \in \mathfrak{B})$.

в) Если выбрано окружение диагонали W' в Z так, чтобы $W' \circ W' \subset W$, и $(f,g) \in \widetilde{W}'$, $(g,h) \in \widetilde{W}'$ то из (4) получаем:

$$\begin{cases} G_f \subset W'(G_g), & G_g \subset W'(G_f); \\ G_h \subset W'(G_g), & G_g \subset W'(G_h); \end{cases} \qquad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} G_f \subset W'[W'(G_h)] \subset (W' \circ W')(G_h) \subset W(G_h) & ; \\ G_h \subset W'[W'(G_f)] \subset (W' \circ W')(G_f) \subset W(G_f) & ; \end{cases}$$

т.е. $(f,g) \in \widetilde{W}$, а значит $\widetilde{W}' \circ \widetilde{W}' \subset \widetilde{W}$. □

Замечание 2.4. Уже в одномерном векторном случае $X = Y = \mathbb{R}$ топология, порожденная равномерностью (4), не согласована с линейными операциями в $Q(X,Y)$; имеет место лишь замкнутость линейных операций [1,2]. В скалярном случае, как и в более общем случае метрических пространств X и Y, равномерность Хаусдорфа сводится к метрике Хаусдорфа [2]:

$$\rho(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 |\, G_f \subset U_\varepsilon(G_g), G_g \subset U_\varepsilon(G_f)\},$$

где через U_ε обозначена ε–окрестность множества.

Отметим далее, что топология в $Q(X,Y)$, порожденная равномерностью Хаусдорфа (4), не отделима, поскольку, очевидно,

$$\bigcap_W \widetilde{W} = \{(f,g) |\, \overline{G}_f = \overline{G}_g\}.$$

Проводя соответствующую факторизацию в $Q(X,Y)$, мы приходим к пространству S–непрерывных отображений $S(X,Y)$, введенному С.Н.Самборским [1,2] в случае $X = Y = \mathbb{R}$.

Определение 2.5. Введем отношение эквивалентности R в пространстве $Q(X,Y)$:

$$(fRg) :\Leftrightarrow (\overline{G}_f = \overline{G}_g)$$

Фактор-пространство

$$S(X,Y) = Q(X,Y)/R,$$

(наделенное соответствующей равномерной фактор-топологией в случае равномерных пространств X и Y) назовем *пространством С.Н.Самборского*, а его элементы — *S–непрерывными отображениями* из X в Y.

Отметим, что в векторном случае отделимая равномерная топология в $S(X,Y)$ также не согласована с векторными операциями; последние, однако, замкнуты в данной топологии.

Полученное в теореме 1.10 описание Q–непрерывных отображений позволяет описать S–непрерывные отображения более простым образом.

Теорема 2.6. *Если X — бэровское равномерное пространство, Y — равномерное пространство с I аксиомой счетности, то fRg в $Q(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $f = g$ на некотором всюду плотном в X множестве типа G_δ.*

Доказательство. Пусть C_f, C_g, соответственно, — множества точек непрерывности f и g. Если fRg, т.е. $\overline{G}_f = \overline{G}_g$, то $f(x) = g(x)$ в совместных точках непрерывности $x \in C_f \cap C_g$, т.е., в силу теоремы 1.10, на всюду плотном G_δ–множестве. Обратно, если $f = g$ на некотором плотном подмножестве $X' \subset X$, то $G_f|_{X'} = G_{g|'_X}$, откуда

$$\overline{G_f} = \overline{G_{f|_{X'}}} = \overline{G_{g|_{X'}}} = \overline{G_g},$$

т.е. fRg. □

Заметим, что утверждение теоремы 2.6, в частности, имеет место, если X и Y — пространства Фреше.

Список литературы

[1] Samborskii S.N. *Expansions of Differential Operators and Nonsmooth Solutions of Differential Equations.* Cybern. Syst. Anal., **38**, N3 (2002),453–466.

[2] Samborskii S.N. *On Metric Completeness and Order Completeness.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol.247, 2004, 1–8.

[3] Neubrunn T. *Quasi-continuity.* Real. Anal. Exch., **14**, N 2 (1989), 259–306.

[4] Гончарова Е. В. *Векторные пространства с замкнутыми операциями.* Таврическая научн. конф. ст-в и молодых спец-в по матем и инф-ке. 2005, Симферополь, 20–24.

[5] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – Мир, Москва, 1971. – 360 с.