Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" № 1 (2005) 64 – 72

УДК 517.98

М.А. МУРАТОВ

$*$-АЛГЕБРЫ τ-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

1. Введение

Один из первых подходов к введению "некоммутативного варианта"кольца измеримых функций был предложен И.Сигалом [1], который рассмотрел *$*$-алгебру $S(M)$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана M.* Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(M, \tau)$ в $S(M)$ всех τ-измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на M (см. например, [2], [3], [4]). Алгебры $S(M, \tau)$ и $S(M)$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и сама алгебра фон Неймана M. При этом все эти операторы присоединены к M, а алгебраические операции в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями "сильной суммы", "сильного произведения", перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана M является $*$-подалгеброй в $S(M, \tau)$ (и в $S(M)$) и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(M, \tau)$ и $S(M)$. В свою очередь, алгебры $S(M)$ и $S(M, \tau)$ являются $*$-подалгебрами *$*$-алгебры $LS(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к M* ([5], [6]).

В настоящей работе рассматриваются $*$-алгебры $S(M,\tau)$ и исследуется их связь с алгебрами $S(M)$ и $LS(M)$.

Используется терминология и обозначения из теории алгебр фон Неймана ([7], [8]) и теории измеримых операторов ([1], [3], [4], [6]).

1. $*$-АЛГЕБРЫ ИЗМЕРИМЫХ И ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА.

В этом пункте приводятся основные сведения и результаты об $*$-алгебрах измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. В частности, рассматриваются условия, при которых эти алгебры совпадают, а при которых они различны. Более подробно эти результаты изложены в [9]

Пусть H гильбертово пространство, M – подалгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$, $P(M)$ – полная решетка всех ортопроекторов в M.

Замкнутый линейный оператор T с плотной областью определения $D(T) \subset H$, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана* M [1], если он присоединен к M и существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset D(T)$ и $P_n^{\perp} = I - P_n$ – конечный проектор в M для всех $n = 1, 2, \ldots$, где I – единица алгебры фон Неймана M.

Обозначим через $S(M)$ множество всех линейных операторов в H, измеримых относительно алгебры фон Неймана M. Если $T \in S(M)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ (где $\mathbf{C}$ – поле комплексных чисел), то $\lambda T \in S(M)$ и сопряженный оператор T^* к T также измерим относительно M [1]. Кроме того, если $T, S \in S(M)$, то операторы $T+S$ и TS определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов T и S и, как показано в [?], принадлежат $S(M)$. Относительно рассмотренных алгебраических операций $S(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$. При этом M есть $*$-подалгебра в $S(M)$. В дальнейшем сильную сумму и сильное произведение операторов T и S мы будем обозначать, как и обычные, через $T + S$ и TS.

В случае, когда M – алгебра фон Неймана типа III, или когда M – фактор типа I, имеет место равенство $S(M) = M$. Для алгебр фон Неймана типа II это равенство уже неверно.

Пример 1. Пусть в алгебре фон Неймана M существует возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}$ такая, что $E = \sup_{n\geqslant 1} E_n$ - конечный проектор, и $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что тогда $S(M) \neq M$.

Действительно, пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, $E_n \uparrow E$, $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $P_n = E^{\perp} + E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $P_n \uparrow I$ и $P_n^{\perp} = E - E_n$ - конечный проектор в M. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H всюду плотное линейное подпространство $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)$, и определим линейный оператор T на D, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $P_0 = 0$.

Покажем , что оператор T допускает замыкание.

Если $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, $\|\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|T\xi_k - \eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$, где $\eta \in H$, то для каждого фиксированного n имеем, что $\|P_n\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$.

Положим $Q_m = P_m - P_{m-1}$.

Тогда $T\xi = m\xi$ для любого $\xi \in Q_m(H)$, проекторы Q_m попарно ортогональны, $P_n = \sum_{m=1}^{n} Q_m$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} Q_m = \sum_{m=1}^{\infty}(P_m - P_{m-1}) = \sup_{m\geq 1} P_m = I.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k\right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m\xi_k\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|P_m\xi_k - P_{m-1}\xi_k\|_H^2 \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$, и следовательно $\|Q_m\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$ для любого $m = 1, 2, .., n$.

Кроме того

$$\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H^2 = \left\|T\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k - \sum_{m=1}^{n} Q_m\eta\right\|_H^2 = \left\|\sum_{m=1}^{n} mQ_m\xi_k - \sum_{m-1}^{n} Q_m\eta\right\|_H^2 =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \|Q_m(m\xi_k - \eta)\|_H^2 \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$.

Следовательно, $\|Q_m(m\xi_k - \eta)\|_H = \|mG_m\xi_k - Q_m\eta\| \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$ и

$$\|Q_m\eta\|_H = \|(Q_m\eta - mQ_m\xi_k) + mQ_m\xi_k\|_H \leq \|Q_m\eta - mQ_m\xi_k\|_H + m\|Q_m\xi_k\|_H \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$.

Отсюда следует, что $Q_m\eta = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, то есть $P_n\eta = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Так как $P_n \uparrow I$, то это означает, что $\eta = 0$, и потому оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое, в силу определения T, является положительно определенным оператором, присоединенным к M.

Обозначим через $\{E_\lambda\}$ спектральное семейство проекторов для оператора $\overline{T} = |\overline{T}|$. Поскольку $\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|TP_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq n < n+1$, то, в силу леммы 1, $E_{n+1}^{\perp} \precsim P_n^{\perp}$, и поэтому $E_{n+1}^{\perp}$ - конечный проектор . Отсюда, согласно предложения 1, получим, что $\overline{T} \in S(M)$. Так как $E_n \neq E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то найдутся такие номера $n_1 < n_2 < \ldots$, что $P_{n_{k+1}} - P_{n_k} \neq 0$, в частности , $\|\overline{T}\xi_k\|_H \geq n_k$ для некоторых $\xi_k \in (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(H)$ с $\|\xi_k\|_H = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\overline{T}$ не принадлежит M, и потому $S(M) \neq M$. □

Отсюда, в частности, следует, что если M - бесконечномерная конечная алгебра фон Неймана, то $S(M) \neq M$.

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $S(M)$ и M.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $S(M) = M$.

(ii) *M представима в виде прямой суммы* $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, *где* M_0 *- алгебра фон Неймана типа* III , *а* M_n *- факторы типа* I , $n = 1, 2, \ldots, m$ *и* m *- некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*$\Box$

Замкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если T присоединен к M и существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(M)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ [6].

Обозначим через $LS(M)$ множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно M. В [6] доказано, что $LS(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$ относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается , что $0 \cdot T = 0$). При этом $S(M)$ является $*$-подалгеброй в $LS(M)$. В случае, когда M – конечная алгебра фон Неймана или фактор, алгебры $S(M)$ и $LS(M)$ совпадают. В общем случае это не так.

Если в алгебре фон Неймана M существует возрастающая к единице последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов, для которой $(I - Z_n)$ не конечный проектор, $n = 1, 2, \ldots$, то $LS(M) \neq S(M)$.

В частности, если алгебра фон Неймана M есть прямое произведение бесконечного числа не конечных алгебр фон Неймана, то $LS(M) \neq S(M)$.

В следующей теореме приводится критерий для совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и $S(M)$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $LS(M) = S(M)$.

(ii) *M представима в виде прямой суммы* $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, *где* M_0 *- конечная алгебра фон Неймана , а* M_n *- факторы типа* I_∞, II_∞, III , $n = 1, 2, \ldots, m$, *и* m *- некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*
$\Box$

Из теорем 1 и 2 следует, что если M - фактор типа I или типа III, то $LS(M) = S(M) = M$.

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и M.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $LS(M) = M$.

(ii) M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, *где* M_n *- факторы типа I или типа III,* $n = 1, 2, \dots, m$, *и* m *- некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*□

Обозначим через $LS_h(M)$ множество всех самосопряженных операторов из $LS(M)$ и определим в $LS_h(M)$ частичный порядок, полагая $S \leq T$, если $(T - S)$ - положительно определенный оператор. $*$ - Подалгебра $\mathcal{A}$ в $*$-алгебре $LS(M)$ называется заполненной, если из соотношений $0 \leq S \leq T \in \mathcal{A}$, $S \in LS(M)$ следует, что $S \in \mathcal{A}$. Примерами заполненых $*$ - подалгебр в $LS(M)$ служат $*$ - алгебры M. $S(M, \tau)$ и $S(M)$.

В следующей теореме приводится результат о максимальности $*$-алгебры $LS(M)$ в классе тех $*$-алгебр замкнутых линейных операторов, присоединенных к M, у которых ограниченная часть совпадает с M.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра замкнутых линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, имеющих в H плотную область определения и присоединенных к алгебре фон Неймана M (алгебраические операции в $\mathcal{A}$ сильная сумма, сильное произведение, переход к сопряженному оператору и обычное умножение на скаляр). Предположим, что $*$-подалгебра $\mathcal{A} \bigcap B(H)$ в $\mathcal{A}$ совпадает с M. Тогда $\mathcal{A}$ есть заполненная $*$-подалгебра в $*$-алгебре $LS(M)$.*□

2. $*$-АЛГЕБРА τ-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА.

Пусть M - полуконечная алгебра фон Неймана и τ - точный нормальный полуконечный след на M.

Линейное подпространство D в H называется τ-плотным, если

1) $D \eta M$;

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(M)$, что $P(H) \subset D$ и $\tau(P^{\perp}) \leq \varepsilon$.

Замкнутый линейный оператор T с областью определения $D(T) \subset H$, называется *τ-измеримым относительно алгебры фон Неймана M*, если $T \eta M$ и его область определения $D(T)$ - τ-плотна в H.

Заметим, что если D - τ-плотное подпространство в H, то существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset D$ и $\tau(P_n^{\perp}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Это означает, что любое τ-плотное подпространство в H является сильно плотным в H. Поэтому каждый τ-измеримый относительно алгебры фон Неймана M оператор T является измеримым.

Сформулируем критерий τ-измеримости .

Теорема 5. [6]. *Пусть T - замкнутый оператор в H, $T\eta M$, $T = U|T|$ - полярное разложение T, $\{E_\lambda\}$ - спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Тогда $T \in S(M,\tau)$ в том и только в том случае, когда область определения $D(T)$ оператора T плотна в H и $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.* □

Обозначим через $S(M,\tau)$ множество всех линейных операторов в H, τ- измеримых относительно алгебры фон Неймана M.

Ясно, что $M \subset S(M,\tau) \subset S(M) \subset LS(M)$. Так как $S(M,\tau)$ является $*$ - подалгеброй замкнутых линейных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M ([1]), удовлетворяющей условиям теоремы 4:

$$S(M,\tau) \cap B(H) = S(M) \cap B(H) = M,$$

то она является заполненной $*$ - подалгеброй в $LS(M)$, и потому в $S(M)$.

Обозначим через $S_0(M,\tau)$ множество всех таких τ-измеримых операторов T, для которых при любом $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(M)$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in M$ $\|TP\| < \varepsilon$. В [3] показано, что оператор $T \in S_0(M,\tau)$тогда и только тогда, когда $T \in S(M,\tau)$ и $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для всех $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda\}$ - спектральное семейство проекторов для $|T|$.

Замечание 4. (i) Если $\tau(I) < \infty$ (т.е. след τ - конечен), то

$$S_0(M,\tau) = S(M,\tau) = S(M) = LS(M);$$

(ii) Если $\tau(I) = \infty$, то I не принадлежит $S_0(M,\tau)$, в частности $S_0(M,\tau) \neq S(M,\tau)$;

(iii) Если $T \in S_0(M,\tau)$, $A \in M$, то $TA, AT \in S_0(M,\tau)$ [3].

(iv) Если M - фактор типа I и τ - точный нормальный полуконечный след на M, то $M = S(M,\tau) = S(M) = LS(M)$.

(v) Пусть M - фактор типа II_∞, τ - точный нормальный полуконечный след на M. Тогда $\tau(P) < \infty$ в том и только в том случае, когда P - конечный проектор. Поэтому $M \neq S(M,\tau) = S(M)$. □

Можно показать, что $S_0(M,\,\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(M)$.

Обозначим через $Tr(M)$ множество всех точных нормальных полуконечных следов на алгебре фон Неймана M. Как уже отмечалось, $M \subset S(M,\tau) \subset S(M)$ для всех $\tau \in Tr(M)$, в частности, $M \subset \bigcap\limits_{\tau\in Tr(M)} S(M,\tau) \subset \bigcup\limits_{\tau\in Tr(M)} S(M,\tau) \subset S(M)$.

Если M - фактор типа II_∞, то $Tr(M) = \{\alpha\mu : \alpha \in (0, +\infty)\}$, где μ - некоторый фиксированный точный нормальный полуконечный след на M. Поэтому $S(M, \tau) = S(M, \mu)$ для всех $\tau \in Tr(M)$, и $M \neq S(M, \mu) = \bigcap\limits_{\tau \in Tr(M)} S(M, \tau)$.

В следующем примере приводится алгебра фон Неймана M, для которой включение $\bigcup\limits_{\tau \in Tr(M)} S(M, \tau) \subset S(M)$ также является строгим.

Пример 2. Пусть M - коммутативная алгебра фон Неймана, являющаяся C^* - произведением континуального числа экземпляров алгебры фон Неймана $L_\infty([0,1], m)$ всех ограниченных измеримых комплексных функций, заданный на отрезке $[0,1]$ с линейной мерой Лебега m (равные почти всюду функции отождествляются), т.е. $M = C^* - \prod\limits_{j \in J} M_j$, $M_j = L_\infty([0,1], m)$ для всех $j \in J$, $card J = card[0,1]$. Для каждого $f = \{f_j\}_{j \in J} \in M$, $f \geq 0$, положим $\mu(f) = \sum\limits_{j \in J} \int\limits_0^1 f_i dm$. Ясно, что μ - точный нормальный полуконечный след на M. Будем считать, что M действует в гильбертовом пространстве $H = L_2(M, \mu) = \{\{\xi_j\}_{j \in J} : \xi_j \in L_2([0,1], m), \sum\limits_{j \in J} ||\xi_j||^2 < \infty)$ по правилу $\{x_j\}_{j \in J}(\{\xi_j\}_{j \in J}) = \{x_i \xi_j\}_{j \in J}$, $\{\xi_j\}_{j \in J} \in H$. Разобьем множество J на счетное число попарно непересекающихся подмножеств J_n, $n = 1, 2, \ldots$, и положим $E_n = \{P_j\}_{j \in J} \in P(M)$, где $P_j = 1$ при $j \in J_n$ и $P_j = 0$ при $j \in J \setminus J_n$. Ясно, что $E_n E_k = 0$ при $n \neq k$, $\sup\limits_{n \geq 1} E_n = I$, и E_n не является проектором счетного типа (напомним, что проектор E имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проектров в $P(EME)$ не более чем счетно). Положим $Z_n = \sup\limits_{k \leq n} E_k$. Определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n(H)$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in E_n(H)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда замыкание $\overline{T}$ оператора T является положительно определенным оператором, присоединенным к M, причем спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с Z_n. Поскольку M - коммутативная алгебра фон Неймана, то M - конечна, и поэтому $\overline{T} \in S(M)$ Предположим, что существует $\tau \in Tr(M)$, для которого $\overline{T} \in S(M, \tau)$. Тогда найдется такое n, что $\tau(Z_n^\perp) < \infty$. Так как $Z_n^\perp = \sup\limits_{k > n} E_k$, то $\tau(E_{n+1}) < \tau(Z_n^\perp) < \infty$, что влечет счетность типа проектора E_{n+1}. Из полученного противоречия следует, что $\overline{T}$ не принадлежит $S(M, \tau)$, и потому $\bigcup\limits_{\tau \in Tr(M)} S(M, \tau) \neq S(M)$. □

Рассмотрим теперь связь между алгебрами $S(M, \tau_1)$, $S(M, \tau_2)$ для различных следов τ_1, $\tau_2 \in Tr(M)$. Для каждого $\tau \in Tr(M)$ положим $P(M, \tau) = \{P \in P(M) : \tau(P) < \infty\}$.

Теорема 6. *Для* $\tau_j \in Tr(M)$, $j = 1, 2$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$;
(ii) $P(M,\tau_1) \subset P(M,\tau_2)$.

Доказательство.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$. Предположим, что существует такой проектор $P \in P(M)$, что $\tau_1(P) = \infty$ и $\tau_2(P) < \infty$. Поскольку след τ_1 - полуконечен, то найдется такая возрастающая последовательность проекторов E_n, что $\tau_1(E_n) < \infty$, $\sup\limits_{n\geq 1} E_n = E \leq P$, $\tau_1(E) = \infty$, в частности, $E_n \neq E$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Также как и в примере 1, определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H)$, где $P_n = E^{\perp} + E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $P_0 = 0$. Как показано в примере 1, положительно определенный оператор $\overline{T}$ является измеримым оператором, при этом спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с P_n. Поскольку $\tau_1(P_n^{\perp}) = \tau_1(E - E_n) = \infty$, $\tau_2(P_n^{\perp}) \leq \tau_2(P) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\overline{T} \in S(M,\tau_2) \setminus S(M,\tau_1)$, что противоречит включению $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$. Следовательно, $P(M,\tau_1) \subset P(M,\tau_2)$.

Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ следует непосредственно из теоремы 5. □

Из теоремы 6 вытекает, что если τ_1, $\tau_2 \in Tr(M)$, то $S(M,\tau_1) = S(M,\tau_2) \Leftrightarrow P(M,\tau_1) = P(M,\tau_2)$.

Заменяя в доказательстве теоремы 6 условие $\tau_2(P) < \infty$ на условие : P - *конечный проектор* , получим следующую

Теорема 7. *Для* $\tau \in Tr(M)$ *следующие условия эквивалентны:*
(i) $S(M) = S(M,\tau)$;
(ii) $P(M,\tau) = \{P \in P(M) :\ P$ *- конечный проектор*$\}$. □

Список литературы

[1] Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. - 1953.- № 57.- P. 401–457.

[2] Nelson E. Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal.- 1974.- № 15.- P. 103–116.

[3] Yeadon F. J. Non-commutative L^P-spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.- 1975.- № 77.- P. 91–102.

[4] Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-mesaurable operators // Pacific J. Math.- 1986.- V. 123.- P. 269–300.

[5] Sankaran S. The $*$-algebra of unbounded operators // J. London Math. Soc., No. 34, 337–344 (1959).

[6] Yeadon F. J. Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc.- 1973.- № 74.- P. 257–268.

[7] Stratila S.. Zsido L. Lectures on von Neumann algebras.- England Abacus Press, 1975.- 478 p.

[8] Takesaki M. Theory of operator algebras I.- New York: Springer, 1979.- 415 p.

[9] Муратов М.А.,Чилин В.И. Сходимости в $*$-алгебрах локально измеримых операторов. // - Таврический вестник информатики и математики , № 2, с. 81 - 100, 2004.