Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 55 – 63

УДК 513.88

Ю.П. Москалева

О $*$-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБРЫ $\mathcal{P}_{4,abo,\tau}$

Введение

Классическими аспектами изучения семейств алгебр, зависящих от параметров являются вопросы описания параметров при которых существуют представления алгебр (см., например, [1] и имеющуюся в [1] библиографию) и построения самих представлений (см., например, [2, 3, 4] и имеющуюся в них библиографию).

Рассмотрим два семейства алгебр, которые возникают в связи с рядом известных задач теории операторов (см. ссылки работы [4]). Первое семейство: $*$-алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C} < p_1, p_2, \ldots, p_n | p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \alpha e, p_j^2 = p_j, p_j^* = p_j, \forall j = \overline{1,n} >$, порожденные n самосопряженными идемпотентами. И второе: $*$-алгебры $\mathcal{P}_{n,abo,\tau} = \mathbb{C} < q_1, q_2, \ldots, q_n, p | q_1 + q_2 + \ldots + q_n = e, q_j p q_j = \tau q_j, q_j^2 = q_j, q_j^* = q_j, \forall j = \overline{1,n}, p^2 = p, p^* = p >$, порожденные $n+1$ самосопряженными идемпотентами, где "abo", аббревиатура выражения "$all - but - one$", акцентирует отличие соотношений, которым удовлетворяет один порождающий элемент p от соотношений, которым удовлетворяют остальные порождающие элементы алгебр.

Представления алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ изучались, в частности, в работах [2, 3, 4]. Обозначим через Σ_n, где $n \in \mathbb{N}$ множество $\alpha \in \mathbb{R}$ для которых существует хотя бы одно $*$-представление $*$-алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, то есть множество таких вещественных параметров α, для которых существуют n ортопроекторов P_1, P_2, $\ldots$, P_n в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих соотношению $\sum_{j=1}^{n} P_j = \alpha I$. Описание множества Σ_n для всех $n \in \mathbb{N}$ получено С.А. Кругляком, В.И. Рабановичем и Ю.С. Самойленко в работе [2]. Построенные в этой работе функторы между категориями $*$-представлений $Rep\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при различных значения параметров позволяют выписывать формулы неприводимых неэквивалентных $*$-представлений $*$-алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$.

В работе [5] строится ряд функторов между категориями представлений различных алгебр, в частности, строится эквивалентность категорий представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$. Следуя [5] обозначим через $\tilde{\Sigma}_n$ множество вещественных параметров τ, для которых существует хотя бы одно $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{n,abo,\tau}$. Равенство $\tilde{\Sigma}_n = \frac{1}{n}\Sigma_n$, полученное в работе [5], является ответом на задачу описания параметров при которых существуют представления алгебр $\mathcal{P}_{n,abo,\tau}$.

Задача построения представлений традиционно считается более сложной задачей, чем задача описания параметров, при которых существуют представления.

Тот факт, что семейство алгебр $Rep\mathcal{P}_{n,\alpha}$ достаточно хорошо изучено и наличие построенной в работе [4] эквивалентности категорий представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$ позволяют выписывать формулы неприводимых неэквивалентных $*$-представлений алгебр $\mathcal{P}_{n,abo,\tau}$. В настоящей работе формулы неприводимых неэквивалентных $*$-представлений алгебр $\mathcal{P}_{n,abo,\tau}$ выписываются для случая $n = 4$.

1. Эквивалентность категорий представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$

Рассмотрим, построенную в работе [5] эквивалентность категорий $*$-представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная $*$-алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $*$-представление $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ $*$-гомоморфизм в алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Представления образуют класс объектов категории $Rep\mathcal{A}$; если представление π_1 действует в пространстве H_1 и представление π_2 – в пространстве H_2, то морфизм $K \in \mathrm{Mor}(\pi_1, \pi_2)$ – линейный ограниченный оператор $K \in B(H_1, H_2)$, сплетающий данные представления, т.е. $K\pi_1(x) = \pi_2(x)K$ для всех $x \in \mathcal{A}$.

Пусть идемпотенты p_1, p_2, …, p_n являются образующими $*$-алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, т.е. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \alpha e$. Тогда отображение

$$q_j \to p_j \otimes e_{jj}, \tag{1}$$

$$p \to \frac{1}{\alpha}\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j \otimes e_{ij} \tag{2}$$

продолжается до $*$-гомоморфизма алгебр $\xi : \mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}} \to qM_n(\mathcal{P}_{n,\alpha})q$, где $q = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Если задан $*$-гомоморфизм $*$-алгебр $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ и $\pi : \mathcal{A}_2 \to B(H)$ $*$-представление алгебры $\mathcal{A}_2$, то $F_\varphi(\pi) = \pi \circ \varphi$ определяет функтор из категории $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}_2$ в $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}_1$. Рассмотрим функтор $F_\xi : \mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$. Функтор F_ξ является эквивалентностью категорий $*$-представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$ [5]. Это позволяет реализовать следующую схему построения неприводимых неэквивалентных $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$: Пусть $\alpha \neq 0$ и $\pi \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,\alpha}$ действует в гильбертовом пространстве H. Обозначим $P_j = \pi(p_j)$, $j = \overline{1,n}$. По формулам (1), (2) построим ортопроекторы $\tilde{Q}_j$, $j = \overline{1,n}$ и $\tilde{P}$ в гильбертовом пространстве $H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$. Обозначим через $\mathcal{H} = \mathrm{Im}\,P_1 \oplus \mathrm{Im}\,P_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\,P_n$. Тогда ортопроекторы $Q_j = \tilde{Q}_j|_{\mathcal{H}}$, $j = \overline{1,n}$, $P = \tilde{P}|_{\mathcal{H}}$ образуют $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}}$.

2. $*$-Представления алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\tau}$

По неприводимым неэквивалентным представлениям алгебры $\mathcal{P}_{4,\alpha}$ [2] построим неприводимые неэквивалентные представления алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\tau}$. Из существования эквивалентности категорий представлений $\mathcal{P}_{4,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$ следует равенство

$$\tilde{\Sigma}_4 = \{0\} \cup \{\frac{1}{\alpha} | \alpha \neq 0, \alpha \in \Sigma_4\},$$

где $\Sigma_4 = \{0, 1, 2 - \frac{2}{2k+1}(k = 1, 2, \ldots), 2 - \frac{1}{n}(n = 2, 3, \ldots), 2, 2 + \frac{1}{n}(n = 2, 3, \ldots), 2 + \frac{2}{2k+1}(k = 1, 2, \ldots), 3, 4\}$ [1].

1) $*$-алгебра $\mathcal{P}_{4,abo,0}$ имеет 4 неприводимых неэквавалентных одномерных представлений, $Q_1 = \ldots Q_{k-1} = Q_{k+1} = \ldots = Q_4 = P = 0$, $Q_k = 1$.

2) $*$-алгебра $\mathcal{P}_{4,abo,1}$ имеет 4 неприводимых нэквавалентных одномерных представлений,$Q_1 = \ldots Q_{k-1} = Q_{k+1} = \ldots = Q_4 = 0$, $P = Q_k = 1$

3) $*$-алгебра $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{3}}$ имеет 4 неприводимых неэквивалентных трехмерных представления с точность до перестановки унитарно эквивалентностных представлению

$$Q_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0, \quad Q_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0,$$
$$Q_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1, \quad Q_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0,$$

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

с пространством представления $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

4) $*$-алгебра $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{4}}$ имеет единственное неприводимое четырехмерное представление

$$Q_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \quad Q_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0,$$
$$Q_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0, \quad Q_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1,$$

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

с пространством представления $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

5) $*$-алгебра $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{2}}$ имеет 6 неприводимых двумерных представлений с точностью до перестановки унитарно эквивалентностных представлению

$$Q_1 = 1 \oplus 0,\ Q_2 = 0 \oplus 1,\ Q_3 = 0 \oplus 0,\ Q_4 = 0 \oplus 0,\ P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

с пространством представления $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и неэквивалентные четырехмерные представления, зависящие от точек множества $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R} | a^2 + b^2 + c^2 = 1, a > 0, b > 0, c \in (-1, 1)$ или $a = 0, b^2 + c^2 = 1, b > 0, c > 0$ или $b = 0, a^2 + c^2 = 1, b > 0, c > 0\}$

$$Q_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \quad Q_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0,$$
$$Q_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0, \quad Q_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1,$$

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \frac{c(c-ib)}{\sqrt{1-a^2}} & \frac{b(b+ic)}{\sqrt{1-a^2}} & a\\ \frac{c(c+ib)}{\sqrt{1-a^2}} & 1 & -a & \frac{b(b-ic)}{\sqrt{1-a^2}}\\ \frac{b(b-ic)}{\sqrt{1-a^2}} & -a & 1 & \frac{c(c+ib)}{\sqrt{1-a^2}}\\ a & \frac{b(b+ic)}{\sqrt{1-a^2}} & \frac{c(c-ib)}{\sqrt{1-a^2}} & 1\end{pmatrix},$$

с пространством представления $\mathcal{H}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$.

6) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha=2-\frac{2}{2k+1}$, $k=1,2,\ldots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1=I\oplus 0\oplus 0\oplus 0,\quad Q_2=0\oplus I\oplus 0\oplus 0,$$
$$Q_3=0\oplus 0\oplus I\oplus 0,\quad Q_4=0\oplus 0\oplus 0\oplus I,$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}A & B\\ B^t & C\end{pmatrix},\ \text{где}\ A=\begin{pmatrix}I & D_1\\ D_1 & I\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}I & D_2\\ D_2 & I\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{00} & B_{01}\\ B_{10} & B_{11}\end{pmatrix},$$

$$D_1=\frac{1}{2k+1}\begin{cases}\operatorname{diag}(2k-1,2k-5,\ldots,3,-1,\ldots,-2k+7,-2k+3)\ , & k-\text{чт},\\ \operatorname{diag}(2k-1,2k-5,\ldots,5,1,-3,\ldots,-2k+7,-2k+3) & ,k-\text{нчт},\end{cases}$$

$$D_2=\frac{1}{2k+1}\begin{cases}\operatorname{diag}(2k-3,2k-7,\ldots,1,-3,\ldots,-2k+5,-2k+1)\ , & k-\text{чт},\\ \operatorname{diag}(2k-3,2k-7,\ldots,3,-1,-5,\ldots,-2k+5,-2k+1) & ,k-\text{нчт},\end{cases}$$

$$B_{\ell m}=\frac{1}{2k+1}\begin{pmatrix}(-1)^\ell a_{2k-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ (-1)^m a_{2k-2} & (-1)^\ell a_{2k-3} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & (-1)^m a_{2k-4} & (-1)^\ell a_{2k-5} & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^\ell a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^m a_2 & (-1)^\ell a_1\end{pmatrix},$$

где $a_j=\sqrt{j(2k-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^k\oplus\mathbb{C}^k\oplus\mathbb{C}^k\oplus\mathbb{C}^k.$$

7) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha=2-\frac{1}{2k+1}$, $k=1,2,\ldots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1=I\oplus 0\oplus 0\oplus 0,\quad Q_2=0\oplus I\oplus 0\oplus 0,$$
$$Q_3=0\oplus 0\oplus I\oplus 0,\quad Q_4=0\oplus 0\oplus 0\oplus I,$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}A & B\\ B^t & C\end{pmatrix},\ \text{где}\ B=\begin{pmatrix}\eta & \eta\\ B_{00} & B_{10}\\ B_{01} & B_{11}\end{pmatrix},\ \eta=(\sqrt{\tfrac{k}{2k+1}},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-1}),$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0&-\frac{2}{2k+1}&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0&0&-\frac{4}{2k+1}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1&0&0&\dots&-\frac{2k}{2k+1}\\0&-\frac{2}{2k+1}&0&\dots&0&1&0&\dots&0\\0&0&-\frac{4}{2k+1}&\dots&0&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-\frac{2k}{2k+1}&0&0&\dots&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&-\frac{1}{2k+1}&0&\dots&0\\0&1&\dots&0&0&-\frac{3}{2k+1}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&0&0&\dots&-\frac{2k-1}{2k+1}\\-\frac{1}{2k+1}&0&\dots&0&1&0&\dots&0\\0&-\frac{3}{2k+1}&\dots&0&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-\frac{2k-1}{2k+1}&0&0&\dots&1\end{pmatrix},$$

$$B_{\ell m}=\frac{1}{4k+2}\begin{pmatrix}(-1)^{\ell}a_{2k-1}&(-1)^{m}a_{2k-2}&0&\dots&0&0\\0&(-1)^{\ell}a_{2k-3}&(-1)^{m}a_{2k-4}&\dots&0&0\\0&0&(-1)^{\ell}a_{2k-5}&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\\0&0&0&\dots&(-1)^{\ell}a_3&(-1)^{m}a_2\\0&0&0&\dots&0&(-1)^{\ell}a_1\end{pmatrix},$$

где $a_j=\sqrt{j(4k+1-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^{k+1}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}.$$

8) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha=2-\frac{1}{2k}$, $k=1,2,\dots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1=I\oplus0\oplus0\oplus0,\quad Q_2=0\oplus I\oplus0\oplus0,$$
$$Q_3=0\oplus0\oplus I\oplus0,\quad Q_4=0\oplus0\oplus0\oplus I,$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}A&B\\B^t&C\end{pmatrix},\ \text{где}\ B=\begin{pmatrix}B_{00}&B_{10}\\\eta&\eta\\B_{01}&B_{11}\end{pmatrix},\ \eta=(\sqrt{\tfrac{2k-1}{4k}},\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1}),$$

$$A=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{k} & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{k-1}{k}\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
-\frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & -\frac{2}{k} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & -\frac{k-1}{k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2k} & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\frac{3}{2k} & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2k-1}{2k}\\
-\frac{1}{2k} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & -\frac{3}{2k} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & -\frac{2k-1}{2k} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

$$B_{\ell m}=\frac{1}{4k}\begin{pmatrix}
(-1)^{\ell}a_{2k-2} & (-1)^{m}a_{2k-3} & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & (-1)^{\ell}a_{2k-4} & (-1)^{m}a_{2k-5} & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & (-1)^{\ell}a_{2k-6} & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{m}a_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\ell}a_2 & (-1)^{m}a_1
\end{pmatrix},$$

где $a_j=\sqrt{j(4k-1-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^{k-1}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}.$$

9) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha=2+\frac{1}{2k}$, $k=1,2,\dots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1=I\oplus 0\oplus 0\oplus 0,\quad Q_2=0\oplus I\oplus 0\oplus 0,$$
$$Q_3=0\oplus 0\oplus I\oplus 0,\quad Q_4=0\oplus 0\oplus 0\oplus I,$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} A & B\\ B^t & C\end{pmatrix},\ \text{где}\ B=\begin{pmatrix}\eta & \eta\\ B_{11} & B_{01}\\ B_{10} & B_{00}\end{pmatrix},\ \eta=(\sqrt{\tfrac{2k+1}{4k}},\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1}),$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{k} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{k-1}{k} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{k} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k-1}{k} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2k} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \frac{3}{2k} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{2k-1}{2k}\\ \frac{1}{2k} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{3}{2k} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{2k-1}{2k} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{\ell m}=\frac{1}{4k}\begin{pmatrix} (-1)^{\ell}a_{2k-1} & (-1)^{m}a_{2k-2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & (-1)^{\ell}a_{2k-3} & (-1)^{m}a_{2k-4} & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{\ell}a_{2k-5} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\ell}a_3 & (-1)^{m}a_2\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{\ell}a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_j=\sqrt{j(4k+1-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^{k+1}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}\oplus\mathbb{C}^{k}.$$

10) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha=2+\frac{1}{2k+1}$, $k=1,2,\dots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1=I\oplus0\oplus0\oplus0,\quad Q_2=0\oplus I\oplus0\oplus0,$$
$$Q_3=0\oplus0\oplus I\oplus0,\quad Q_4=0\oplus0\oplus0\oplus I,$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} A & B\\ B^t & C\end{pmatrix},\ \text{где}\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{01}\\ \eta & \eta\\ B_{10} & B_{00}\end{pmatrix},\ \eta=(\sqrt{\tfrac{k+1}{2k+1}},\underbrace{0,0,\dots,0}_{k}),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{2}{2k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{2k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2k}{2k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{2k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4}{2k+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2k}{2k+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2k+1} & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2k-1}{2k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{2k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2k+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2k-1}{2k+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{\ell m} = \frac{1}{4k+2} \begin{pmatrix} (-1)^\ell a_{2k} & (-1)^m a_{2k-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell a_{2k-2} & (-1)^m a_{2k-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^\ell a_{2k-4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^m a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^\ell a_2 & (-1)^m a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_j = \sqrt{j(4k+3-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k+1}.$$

11) $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,abo,\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha = 2 + \frac{2}{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, имеют единственные неприводимые представления

$$Q_1 = I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \quad Q_2 = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0,$$
$$Q_3 = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus 0, \quad Q_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus I,$$

$$P = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} I & \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_1 & I \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} I & \tilde{D}_2 \\ \tilde{D}_2 & I \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{01} \\ B_{10} & B_{00} \end{pmatrix},$$

$\tilde{D}_1 = \mathrm{diag}(-D_1, 1)$, $\tilde{D}_2 = \mathrm{diag}(1, -D_2)$,

$$B_{\ell m} = \frac{1}{2k+1}\begin{pmatrix} (-1)^\ell a_{2k+1} & (-1)^m a_{2k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell a_{2k-1} & (-1)^m a_{2k-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^\ell a_{2k-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^\ell a_3 & (-1)^m a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^\ell a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_j = \sqrt{j(2k+2-j)}$ и пространство представления

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k+1}.$$

Автор искренне признателен Ю.С. Самойленко за постановку задачи и полезные замечания.

Список литературы

[1] Jones V. Index for subfactors// Invent. math. – 1983. – 72. – P. 1-15.

[2] Кругляк С.А., Рабанович В.И., Самойленко Ю.С. О суммах проекторов // Функц. анализ и прил. – 2002. – 36, вып. 3. – С. 30-35.

[3] Kruglyak S.A., Popovich S.V., Samoilenko Yu.S. $*$-Representations of algebras associated with Dynkin graphs and Horn's problem // Ученые записки Таврич. Нац. Ун. им. В.И. Вернадского сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2003. – 16(55), №2. – С.132-139.

[4] Заводовский М.В., Самойленко Ю.С. О $*$-представлениях алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина// Таврический вестник информатики и математики. – 2004. – №2. – С.41-51.

[5] Попович С.В., Самойленко Ю.С. О гомоморфизмах алгебр, порожденных проекторами, и функторах Кокстера // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 9. – С. 1224-1237.