Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 47 – 54

УДК 519.642, 517.968

Е. В. Лебедева

ОБ ОДНОМ ПРАВИЛЕ ВЫБОРА ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Пусть X - некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Через $\mathcal{L}(X)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов, действующих в X. Рассмотрим задачу приближенного решения операторного уравнения I рода

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(X)$, Range(A) $\neq \overline{\text{Range(A)}}$ и $f \in$ Range(A). Будем полагать, что нормальное решение x^+ (т. е. решение (1), норма которого в X минимальна) удовлетворяет условию истокопредставимости

$$x^+ \in M_{\nu,\rho}(A) = \{x : x = |A|^\nu v, \|v\| \leq \rho\}, \tag{2}$$

где $|A| = (A^*A)^{1/2}$, $\rho > 0$ считается известным, а для неизвестного параметра ν задана граница его значений $\nu \in [1, \nu_1], 1 < \nu_1 < \infty$.

Пусть вместо точных коэффициентов A и f уравнения (1) известны лишь некоторые их приближения $A_h \in \mathcal{L}(X)$ и $f_\delta \in X$ такие, что

$$\|A - A_h\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta,$$

где $h > 0$ и $\delta > 0$ известные оценки погрешности исходных данных.

Будем полагать, что в пространстве X существует ортонормированный базис $E = \{e_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что при любом $m = 1, 2, \ldots,$ и фиксированных $r = 1, 2, \ldots$ и $\beta_r \geq 0$ выполняется

$$\|(I - P_m)A\| \leq \beta_r m^{-r}, \qquad \|A(I - P_m)\| \leq \beta_r m^{-r}. \tag{3}$$

Здесь P_m- ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов базиса E , т. е. $P_m f = \sum_{k=1}^m (f, e_k)e_k$. Через $\mathcal{H}_r$ обозначим совокупность всех операторов $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| \leq 1$, удовлетворяющих (3).

В случае $X = L_2(0,1)$ содержательным примером уравнения (1) с $A \in \mathcal{H}_r$ является уравнение Фредгольма I рода

$$Ax(t) \equiv \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где интегральные операторы A и A^*действуют из $L_2(0,1)$ в соболевское пространство $W_2^r[0,1]$ r -раз дифференцируемых функций.

Отметим, что в качестве базиса E, удовлетворяющего (3), можно использовать ортонормированную систему функций Хаара (при $r = 1$), подпространство тригонометрических функций (в случае 2π - периодических коэффициентов $k(t,\tau), f(t)$) и ортонормированную систему полиномов Лежандра на отрезке $[0,1]$.

Через Ψ_r^{ρ,ν_1} обозначим класс уравнений (1) с операторами из $\mathcal{H}_r$ и нормальными решениями $x^+ \in M_{\nu,\rho}(A), \nu \in [1,\nu_1]$.

В настоящей работе по данным элементам A_h и f_δ будем строить конечномерные приближения к нормальному решению x^+ уравнения (1) из класса Ψ_r^{ρ,ν_1}.

Для построения конечномерных приближений к решению (1) необходима предварительная дискретизация оператора A_h и элемента f_δ. С этой целью построим модифицированную проекционную схему дискретизации. суть которой состоит в замене коэффициентов исходной задачи A_h и f_δ их конечномерными аналогами

$$A_{h,n} = \sum_{k=1}^{n}(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})A_h P_{2^{2n-k}} + P_1 A_h P_{2^{2n}}, \tag{4}$$

$$P_{2^n} f_\delta = \sum (f_\delta, e_k)e_k,$$

где $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис, фигурирующий в определении класса $\mathcal{H}_r$. В дальнейшем под дискретной информацией об уравнении (1) будем понимать набор значений скалярных произведений

$$(A_h e_j, e_i), \quad (f_\delta, e_i), \quad i = 1,2,\dots,2^n, \quad j = 1,2,\dots,2^{2n}, \quad i \cdot j \le 2^{2n}. \tag{5}$$

Заметим, что модифицированная проекционная схема (4) ранее была использована в [4] при решении задач (1) в случае, когда оператор A задан точно, а параметр ν известен и равен 2.

Известно [1, с.15], что точность восстановления решений (1), заполняющих множество $M_{\nu,\rho}$(A), не может быть меньше величины $\rho^{1/(\nu+1)}(\delta + \rho h)^{\nu/\nu+1}$.

Исходя из этого, ставим задачу построения конечномерного метода решения (1) с оптимальным порядком точности приближенного решения $O((\delta + h)^{\nu/\nu+1})$ при условии экономичного расхода дискретной информации (5).

Поскольку множество значений оператора A незамкнуто, то задача (1) является некорректной, а, значит, для постороения устойчивых приближений к x^+ требуется применение специальных регуляризующих алгоритмов (см. [2]). Следуя [3], в качестве метода регуляризации будем брать оператор $R_\alpha = R_\alpha(A) : X \to X$ вида $R_\alpha(A) = g_\alpha(A_h^* A_h)A_h^*$. Здесь $\alpha > 0$ параметр регуляризации, функция $g_\alpha(\lambda)$ измерима по Борелю на $[0,1]$ и удовлетворяет следующим условиям

$$\sup_{0\le\lambda<\infty} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_\nu \alpha^\nu, \tag{6}$$

$$\sup_{0\le\lambda<\infty} \lambda^{1/2}|g_\alpha(\lambda)| \le \chi_*\alpha^{-1/2}, \tag{7}$$

$$\nu_1 \le 2\nu_* - 1, \tag{8}$$

где χ_ν, χ_*- некоторые независящие от α положительные константы и ν_* квалификация метода R_α. Тогда под приближенным решением (1) понимается элемент $x_\alpha = R_\alpha(A_n)f_\delta$.

Укажем некоторые примеры методов регуляризации, удовлетворяющих (6)-(8). В частности, метод Ланбвебера порождается функцией $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[1-(1-\mu\lambda)^{1/\alpha}]$ с квалификацией $\nu_* = \infty$, а нестационарный итеративный метод Тихонова - функцией $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(1 - \prod_{j=1}^{l}\alpha_j/(\alpha_j+\lambda))$ и $\nu_* = \infty$.

Предлагаемый подход к построению конечномерных аппроксимаций $\hat{x}_\alpha$ состоит в нахождении приближенного решения по правилу

$$\hat{x}_\alpha = R_\alpha(A_{h,n})P_{2^n}f_\delta. \tag{9}$$

Здесь в качестве R_α можно взять любой метод регуляризации, удовлетворяющий условиям (6)-(8), $A_{h,n}$ имеет вид (4), а параметр дискретизации n вычислятся из условия

$$2^{-2rn}n \le \frac{2}{c_1}(\delta + c_2 h), \tag{10}$$

где $c_1 = \frac{2^{2r}}{2^{2r}-1}\rho \quad c_2 = \rho(1+\frac{\beta_r 2^r}{2^r-1})$. С целью сокращения объема дискретной информации (5) имеет смысл выбирать наименьшее натуральное n, удовлетворяющее (10). При этом правило останова будет осуществлятся согласно обобщенному принципу невязки [5]

$$b_1(\delta + c_2h) \le \|P_{2^n}f_\delta - A_{h,n}\hat{x}_\alpha\| \le b_2(\delta + c_2h), \quad 2 < b_1 < b_2. \tag{11}$$

Регуляризованный проекционный метод (4), (5), (9)-(11) обозначим $(R_\alpha, A_{h,n}, b_1, b_2)$.

В дальнейшем нам потребуется знание некоторых аппроксимационных свойств оператора $A_{h,n}$.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathcal{H}_r, x^+ \in M_{\nu,\rho}(A), \nu \in [1,\nu_1]$. Если параметр дискретизации n выбран согласно (10), то при достаточно малых h выполняется*

$$\|A_{h,n}x^+ - P_{2^n}f_\delta\| \le 2(\delta + c_2h),$$

$$\|\,A - A_{h,n}\| \le c_3(\delta + c_2h)^{1/2},$$

$$\|\,|A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu\| \le c_4(\delta + c_2h)^{\nu/\nu+1}, 1 < \nu < \infty,$$

где $c_3 = \beta_r\frac{2^{r+1}}{2^r-1}$, $c_4 = z(\nu)(c_3+1)$, а $z(\nu)$ - ограниченная на $(0;\infty]$ функция.

Доказательство. При доказательства первого неравенства воспользуемся следующим соотношением

$$\|\,A_{h,n}x^+ - P_{2n}f_\delta\| \le \rho\|\,(A_{h,n} - A_n)|A|^\nu\| + \|\,(A_n - P_{2^n}A)|A|^\nu\| + \|\,P_{2^n}(f - f_\delta)\|,$$

в правой части которого требуется отдельно оценить каждое из слагаемых. Используя представление оператора $A_{h,n}$ (4), неравенство моментов и лемму 4.3 [7], получим

$$\| (A_h - A_{h,n})|A|^\nu\| \leq \| A - A_n\|(\| |A|^\nu\| + \sum_{k=1}^{n} \| (I - P_{2^{2n-k}})|A|^\nu\|) \leq h(1 + \sum_{k=1}^{n} \| A(I - P_{2^{2n-k}})\|) \leq c_2$$

Оценка второго слагаемого непосредственно следует из леммы1.2 [6] и (10). Окончательно находим

$$\|A_{h,n}x^+ - P_{2^n} f_\delta\| \leq c_2 h + c_1 2^{-2rn} + \delta \leq 2(\delta + c_2 h).$$

Чтобы установить вторую оценку, воспользуемся соотношением (3) и леммой 2 [6] при $q = 0$

$$\| A - A_n\| \leq \| A - P_{2^n} A\| + \| P_{2^n} A - A_n\| \leq c_3(\delta + c_2 h)^{1/2}. \qquad (12)$$

Далее, с помощью леммы 1.2 [1, с.93] и (12) установим следующее вспомогательное соотношение

$$\| |A|^\nu - |A_n|^\nu\| \leq z(\nu)\|A - A_n\| \leq z(\nu)c_3(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}.$$

Используя лемму 3.4 [10], лемму 1.2 [1, с.93] для $1 < \nu < \infty$, а также найденную выше оценку, получим

$$\| |A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu\| \leq \| |A|^\nu - |A_h|^\nu\| + \| |A_n|^\nu - |A_{h,n}|^\nu\| \leq$$
$$\leq z(\nu)c_3(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1} + z(\nu)\sqrt{n+1}h.$$

При достаточно малых h таких, что $\sqrt{\log \frac{2}{h}} \leq h^{-1/\nu+1}$, справедливо $\sqrt{n+1}h \leq h^{\nu/\nu+1}$. Откуда следует искомое неравенство

$$\| |A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu\| \leq z(\nu)c_3(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1} + z(\nu)h^{\nu/\nu+1} \leq (\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}.$$

лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Оптимальная по порядку оценка погрешности $O((\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1})$ на классе уравнений Ψ^r_{ρ,ν_1} с неточно заданными коэффициентами A_h и f_δ достигается в рамках метода $(R_\alpha, A_{h,n}, b_1, b_2)$.*

Доказательство. Для установления настоящего утверждения будет использована схема рассуждений, применявшееся ранее при доказательстве теоремы 3.3 [7] и теоремы 4.1 [8]. Запишем погрешность метода в следующем виде:

$$x^+ - \hat{x}_\alpha = R_{\alpha,n}(A_{h,n}x^+ - P_{2^n} f_\delta) + S_{\alpha,n}x^+,$$

где $R_{\alpha,n} = g_\alpha(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}$, $S_{\alpha,n} = I - g_\alpha(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A_{h,n}$. Из свойств регуляризаторов (5) следует

$$\| R_{\alpha,n}\| = \|g_\alpha(A^*_{h,n}A_{h,n})A_{h,n}\| \leq \chi_* \alpha^{-1/2}.$$

Тогда оценку для нормы погрешности метода примет вид

$$\| x^+ - \hat{x}_\alpha \| \leq 2\chi_* \alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h) + \| S_{\alpha,n} x^+ \|. \tag{13}$$

Откуда видно, что искомая оценка следует из оценки элементов $\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h)$и $\| S_{\alpha,n} x^+ \|$. Вначале рассмотрим элемент $A_n S_{\alpha,n} x^+$

$$A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ = (P_{2^n} f_\delta - A_{h,n}\hat{x}_\alpha) + (I - A_{h,n} R_{\alpha.n})(A_{h,n} x^+ - P_{2^n} f_\delta). \tag{14}$$

Используя (6), получим

$$\| I - A_{h,n} R_{\alpha.n} \| = \| I - g_\alpha(A_{h,n} A^*_{h,n}) A_{h,n} A^*_{h,n} \| \leq \sup_{0 \leq \lambda < \infty} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leq 1.$$

Откуда с учетом (14) и (11) найдем

$$\| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \| \leq \| A_{h,n} x^+ - P_{2^n} f_\delta \| + 2(\delta + c_2 h), \tag{15}$$

$$\| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \| \geq \| A_{h,n} x^+ - P_{2^n} f_\delta \| - 2(\delta + c_2 h). \tag{16}$$

Из (16) и леммы 1 имеем

$$\| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \| \geq (b_1 - 2)(\delta + c_2 h),$$

$$\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h) \leq \alpha^{-1/2}(b_1 - 2)^{-1} \| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \|. \tag{17}$$

Используя полярное разложение оператора $A_{h,n} = U(A^*_{h,n} A_{h,n})^{1/2}$, $\|U\| = 1$, установим вспомогательное соотношение

$$A_{h,n} S_{\alpha,n} = U(1 - |A_{h,n}| g_\alpha(|A_{h,n}|^2)|A_{h,n}|)|A_{h,n}| = U S_{\alpha,n} |A_{h,n}|. \tag{18}$$

С помощью (18), (6) и леммы1 находим, что для $\nu \in (1, \nu_1]$, $1 < \nu_1 < \infty$, выполняется

$$\alpha^{-1/2} \| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \| = \alpha^{-1/2} \rho \| A_{h,n} S_{\alpha,n} |A_{h,n}|^\nu \| + \| \, |A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu \| \leq$$
$$\leq \rho \alpha^{-1/2} \| U S_{\alpha,n} |A_{h,n}|^{\nu+1} \| + \| U S_{\alpha,n} |A_{h,n}| \| \, \| \, |A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu \| \leq$$
$$\leq \rho \chi_{\frac{\nu+1}{2}} \alpha^{\nu/2} + \rho \chi_{1/2} c_4 (\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}. \tag{19}$$

Аналогичным образом для $\nu \in (1, \nu_1]$, $1 < \nu_1 < \infty$, получим следующую оценку

$$\| S_{\alpha,n} x^+ \| \leq \rho \| S_{\alpha,n} |A_{h,n}|^\nu \| + \rho \| S_{\alpha,n} \| \, \| |A|^\nu - |A_{h,n}|^\nu \| \leq$$
$$\leq \rho \chi_{\nu/2} \alpha^{\nu/2} + \rho c_4 (\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}. \tag{20}$$

Теперь отдельно рассмотрим случай когда $\nu = 1$. Используя полярное разложение оператора $A = U|A|$ и соотношение $|A| = A^* U$ из [9, с.421], где $\|U\| = 1$, имеем, что $x^+ = A^* u$, $u \in X_\rho$. Тогда с помощью леммы 1, (18), (6) получим

$$\alpha^{1/2} \| A_{h,n} S_{\alpha,n} x^+ \| \leq \alpha^{-1/2} \rho (\| U S_{\alpha,n} |A_{h,n}|^2 U^* \| + \| U S_{\alpha,n} |A_{h,n}| \| (\| A - A_n \| + \| A_n - A_{h,n} \|)) \leq$$
$$\leq \rho(\chi_1 \alpha^{1/2} + \chi_{1/2}(c_3 + \frac{z(\nu)}{c_2})(\delta + c_2 h)^{1/2}).$$

Аналогично находим

$$\| S_{\alpha,n} A^* u \| \leq \| S_{\alpha,n} A^*_{h,n} u \| + \| S_{\alpha,n}(A^* - A^*_{h,n}) u \| \leq$$

$$\leq \|u\|(\|S_{\alpha,n}|A_{h,n}|U^*\| + \|S_{\alpha,n}\|(\|A - A_n\| + \|A_n - A_{h,n}\|)) \leq$$
$$\leq \rho(\chi_{1/2}\alpha_{1/2} + (\delta + c_2 h)^{1/2}(c_3 + \frac{z(\nu)}{c_2})).$$

Тогда для $\nu \in [1, \nu_1]$, $1 < \nu_1 < \infty$, справедливо

$$\alpha^{-1/2}\| A_{h,n}S_{\alpha,n}x^+\| \leq \rho\chi_{\frac{\nu+1}{2}}\alpha^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}c_5(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1} \tag{21}$$

$$\| S_{\alpha,n}x^+\| \leq \rho\chi_{\nu/2}\alpha^{\nu/2} + \rho c_5(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}, \tag{22}$$

где $c_5 = \max\{c_3 + \frac{z(\nu)}{c_2}, c_4\}$.

Подставляя (21) в (17), находим

$$\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h) \leq (b_1 - 2)^{-1}(\rho\chi_{\frac{\nu+1}{2}}\alpha^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}c_5(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}).$$

Используя найденную выше оценку для величины $\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h)$ и неравенство (22), получим

$$\| x^+ - \hat{x}_\alpha\| \leq c_6\alpha^{\nu/2} + c_7(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1},$$

где $c_6 = \rho(\chi_{\nu/2} + 2\chi_*\chi_{\frac{\nu+1}{2}}(b_1 - 2)^{-1})$, $c_7 = \rho(c_5 + 2\chi_*\chi_{1/2}(b_1 - 2)^{-1})$.

Очевидно, что при $\alpha \leq (\delta + c_2 h)^{2/\nu+1}$ выполняется

$$\|x^+ - \hat{x}_\alpha\| \leq (c_6 + c_7)(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}$$

и в этом случае утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что $\alpha > \alpha_1 = (\delta + c_2 h)^{2/\nu+1}$. Из леммы 3.2 [7] следует, что для любой функции g_α, удовлетворяющей условиям(6)-(8), и произвольного $\alpha_1 > 0$, найдется такое $c_* > 0$, что для любых $0 \leq \lambda < \infty$ и $\alpha > \alpha_1$ выполняется

$$(1 - \lambda g_\alpha(\lambda))^2 \leq c_*(1 - \lambda g_{\alpha_1}(\lambda))^2 + \alpha_1^{-1}(\lambda(1 - \lambda g_\alpha(\lambda)))^2.$$

Тогда

$$\| S_{\alpha,n}x^+\|^2 \leq c_*(\| S_{\alpha_1,n}x^+\|^2 + \alpha_1^{-1}\| A_{h,n}S_{\alpha,n}x^+\|^2) \tag{23}$$

Используя тот факт, что $\alpha_1 = (\delta + c_2 h)^{2/\nu+1}$, а также лемму 1 и (11) получим

$$\alpha_1^{-1}\|A_{h,n}S_{\alpha,n}x^+\|^2 \leq \alpha_1^{-1}((b_2 + 2)(\delta + c_2 h))^2 = (b_2 + 2)^2(\delta + c_2 h)^{2\nu/\nu+1}$$

Из (17) найдем

$$\|S_{\alpha,n}x^+\|^2 \leq (\rho\chi_{\nu/2}(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1} + \rho c_5(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1})^2 = (\delta + c_2 h)^{2\nu/\nu+1}(\rho\chi_{\nu/2} + \rho c_5)^2.$$

Теперь, подставляя в (23) найденные выше оценки для величин $\alpha_1^{-1}\|A_{h,n}S_{\alpha,n}x^+\|^2$ и $\|S_{\alpha_1,n}x^+\|^2$, получаем

$$\|S_{\alpha,n}x^+\|^2 \leq c_*\big((\delta + c_2 h)^{2\nu/\nu+1}((\rho\chi_{\nu/2} + \rho c_4)^2 + (b_2 + 2)^2)\big) =$$
$$= c_*\big((\rho\chi_{\nu/2} + \rho z(\nu)c_3)^2 + (b_2 + 2)^2\big)(\delta + c_2 h)^{2\nu/\nu+1}.$$

В силу предположения $\alpha > \alpha_1 = (\delta + c_2 h)^{2/\nu+1}$ нетрудно видеть

$$\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h) \leq (\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1}.$$

Подставляя полученные оценки величин $\alpha^{-1/2}(\delta + c_2 h)$ и $\| S_{\alpha,n} x^+ \|$ в (13), получим

$$\|x^+ - \hat{x}_\alpha\| \le c_8(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1},$$

где $c_8 = \left(c_*(\rho\chi_{\nu/2} + \rho c_5)^2 + (b_2+2)^2\right)^{1/2} + 2\chi_*$.

Окончательно получим

$$\|x^+ - \hat{x}_\alpha\| \le \max\{c_8, c_6 + c_7\}(\delta + c_2 h)^{\nu/\nu+1},$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Для обеспечения оптимального порядка точности $O((\delta + h)^{\nu/\nu+1})$ в рамках проекционного метода $(R_{\alpha,n}, A_{h,n}, b_1, b_2)$ на классе уравнений Ψ^r_{ρ,ν_1} требуется $O((\delta + h)^{-1/r} \log^{1+1/r}(\delta + h)^{-1})$ скалярных произведений (5).*

Доказательство. Очевидно, что порядок общего объема задействованной дискретной информации (5) определяется количеством скалярных произведений вида $(A_{h,n}e_j, e_i)$. Подсчитаем эту величину

$$\text{Card }(n) = 2^{2n}(1 + \frac{n}{2}).$$

В силу выбора параметра n (10) имеем

$$n2^{-2rn} = O((\delta + h))$$

$$2^{2n} = O((\delta + h)^{-1/r} n^{1/r})$$

Тогда

$$\text{Card}(n) = O(n\, n^{1/r}(\delta + h)^{-1/r}) = O((\delta + h)^{-1/r} \log^{1+1/r}(\delta + h)^{-1}). \tag{24}$$

Замечание 3. Задача построения экономичных проекционных методов ранее рассматривалась лишь в нескольких статьях (см., например, [7], [4], [8], [6]) и только в случае точно заданного оператора. В настоящей работе построен регуляризованный проекционный метод решения некорректных задач для существенно более общего случая, а именно $A \ne A_h$. Сравним экономичность алгоритма $(R_\alpha, A_{h,n}, b_1, b_2)$ и известных алгоритмов в смысле расхода дискретной информации (5). Для этого в рассматриваемой задаче (1) положим $h = 0$. Тогда порядок (24) объема скалярных произведений (5) будет равен $O(\delta^{-1/r} \log^{1+1/r} \delta^{-1})$. В то же время, наилучшая оценка информационных затрат из известных работ была получена в [6] и составяет $(O(\delta^{-\frac{5\nu_1+3}{4(\nu_1+1)}\frac{1}{r}}))$. Из выше сказанного следует, что построенный метод $(R_\alpha, A_{h,n}, b_1, b_2)$ является не только обобщением на случай неточно заданного оператора, но и более экономичным по сравнению с предложенными ранее.

Вывод. Разработан новый подход к конечномерному решению некорректных задач, обеспечивающий наперед заданную точность для широких классов уравнений

I рода. Подсчитан порядок информационных затрат при построении приближенного решения. Установлена эффективность предложенного в работе подхода путем сравнения его с другими известными ранее методами.

Список литературы

[1] *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах.-М.: Наука, 1986

[2] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решений некорректных задач.-М: Наука, 1979.

[3] *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризирующего алгоритма для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве//*Ж.вычисл.матем. и матем.физ.* 1967. -7, N 3. C.672–677.

[4] *Pereversev S. V.* Optimization of Projection Methods for Solving Ill-Posed Problems//*Computing*.-1995.-55.-P. 113-124.

[5] *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Обобщенный принцип невязки // *Ж.вычисл.матем. и матем.физ.* 1973. Т.13, N 2. C.294-302.

[6] *Solodky S. G.* A Generalized projection scheme for solving ill-posed problems // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*.-1999.-7,N2.-P. 185-200.

[7] *Plato R., Vainikko G.* On the Regularization of Projection Methods for solving Ill-posed Problems// *Numer.Math.* 1990. -57. P.63–79.

[8] Pereversev S. V., Solodky S. G. An Efficient Discretization for Solving Ill-Posed Problems // *Lectures Applied Mathematics* - 1996.-32.-P. 643-649.

[9] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.- М.: Мир, 1972.-607с.

[10] *Солодкий С. Г.* Оптимальные схемы дискретизации операторных уравнений - Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук.-Киев: Ин-т математики НАНУ. 2003.-300с.