Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 42 – 46

УДК 517.432

Ю.Л. Кудряшов

ИЗОМОРФИЗМ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ J-САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В [2] и [1] были, соответственно построены спектральное и трансляционное представления J-самосопряженной дилатации плотно заданного линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, с непустым множеством регулярных точек. Здесь устанавливается изоморфизм этих представлений.

I. Спектральное представление дилатации

Предположим, что $-i \in \rho(A)$ и рассмотрим операторы

$$B = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i},$$
$$\tilde{B} = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R_{-i}R^*_{-i},$$

$R_{-i} = (A + iI)^{-1}$, $Q = \sqrt{|B|}$, $J = \operatorname{sign} B$, $\tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{B}|}$, $\tilde{J} = \operatorname{sign} \tilde{B}$.

Рассмотрим пространство вектор-функций:

$$H_+ = L_2(0, \infty; \mathfrak{H}_1), \quad H_- = L_2(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2),$$

где $\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}_2 = \overline{\tilde{Q}\mathfrak{H}}$ и $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$.

В пространстве H введем индефинитную метрику с помощью оператора J.

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 h_- \\ h_0 \\ J_1 h_+ \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [h, h']_H := (Jh, h')_H,$$

где $J_1 h_+ = Jh_+(t)$, $\tilde{J}_1 h_- = \tilde{J}h_-(t)$, $h_+ \in H_+$, $h_- \in H_-$, $h_0 \in \mathfrak{H}$.

Построим в пространстве H оператор S следующим образом: вектор

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$$

тогда и только тогда, когда

1) $h_- \in W_2'(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2)$, $h_+ \in W_2'(0, \infty; \mathfrak{H}_1)$, W_2' – класс Соболева,
2) $\varphi = h_0 + \tilde{Q}h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,
3) $h_+(0) = T^*h_-(0) + iJQ(A + iI)\varphi$, где $T^* = I + 2iR^*_{-i}$.

Оператор S действует так:

$$S\begin{pmatrix}h_-\\h_0\\h_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{P}_-h_-\\-ih_0+(A+iI)\varphi\\\mathcal{P}_+h_+\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_\pm h_\pm = i\frac{dh_\pm(t)}{dt}$.

В работе [2] доказано, что оператор S является J-самосопряженной дилатацией оператора A.

II. Трансляционное представление дилатации

Рассмотрим гильбертово пространство

$$\tilde{H}=\mathfrak{H}_-\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_+,\quad \text{где}\quad \mathfrak{H}_-=\oplus_{-\infty}^{-1}\mathfrak{H}_2, H_+=\oplus_1^\infty\mathfrak{H}_1.$$

Элементами пространства $\tilde{H}$ являются векторы вида:

$$f=(\ldots,f_{-2},f_{-1},[f_0],f_1,f_2,\ldots),$$

$$f_0\in\mathfrak{H}, f_k\in\mathfrak{H}_1, \text{при}\ \ k\geq 1\ \ \text{и}\ \ f_k\in\mathfrak{H}_2, \text{при}\ \ k\leq -1,\quad \sum_{-\infty}^{\infty}||f_k||^2<\infty.$$

(Рамка означает, что помещенный в нее элемент расположен на нулевом месте).

В пространстве $\tilde{H}$ рассмотрим оператор J:

$$Jf:=(\ldots,\tilde{J}f_{-2},\tilde{J}f_{-1},[f_0],Jf_1,Jf_2,\ldots)$$

и введем J-метрику:

$$[f,g]_{\tilde{H}}:=(Jf,g)_{\tilde{H}}$$

и неограниченные операторы S_+ и S_-:

$$S_+f=\sum_{k=1}^{\infty}f_k,\quad S_-f=\sum_{k=1}^{\infty}f_{-k}.$$

Построим в пространстве $\tilde{H}$ оператор $\tilde{S}$ следующим образом: вектор $f\in\mathfrak{D}(\tilde{S})$ тогда и только тогда, когда

1) $f\in\mathfrak{D}(S_+)\cap\mathfrak{D}(S_-)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}||S_nf||^2<\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}||S_{-n}f||^2<\infty$, где $S_nf=-\frac{1}{2}f_n-\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}f_k$, $S_{-n}f=\frac{1}{2}f_n+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}f_{-k}$.
2) $\varphi'=f_0+\tilde{Q}S_-f\in\mathfrak{D}(A)$,
3) $S_+f=T^*S_-f+JQ(A+iI)$.

Если $f\in\mathfrak{D}(\tilde{S})$, то

$$\tilde{S}f=(\ldots,g_{-1},[g_0],g_1,\ldots),$$

где $g_0=if_0+(A+iI)\varphi'$, $g_n=iS_nf$ $(\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

В [1] доказано, что оператор $\tilde{S}$ является J-самосопряженной дилатацией оператора A.

Определение. *Дилатации C и $\tilde{C}$ оператора A, действующие, соответственно в пространствах H и $\tilde{H}$ называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H на $\tilde{H}$, такое что*

1) $Uh = h$, $(\forall h \in \mathfrak{H})$,
2) $\tilde{C} = UCU^{-1}$.

Теорема. *Если пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – сепарабельные, то дилатации S и $\tilde{S}$ изоморфны.*

Доказательство. Для установления изоморфизма пространств H_+ и $\mathfrak{H}_+$ рассмотрим в пространстве $L_2(0,\infty)$ полную ортонормированную систему функций Чебышева-Лаггера:

$$\psi_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} e^{\frac{t}{2}} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (t^{k-1} e^{-t}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Обозначим через H_k подпространство пространства H_+, образованное функциями вида $\psi_k a$ $(a \in \mathfrak{H}_1)$. Очевидно, что $H_k \perp H_j$ при $k \neq j$. Далее

$$L_2(0,\infty;\mathfrak{H}_1) = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k. \tag{2}$$

Действительно, пусть $h \in H_+$ и ортогонально ко всем H_k, т.е.

$$\int_0^\infty \psi_k(t)(h(t),a)_{\mathfrak{H}_1} dt = 0, \quad \forall a \in \mathfrak{H}_1 \wedge k \in \mathbb{N},$$

тогда $(h(t),a)_{\mathfrak{H}_1} = 0$ всюду, кроме, может быть, точек множества E_a меры нуль. Заставляя a пробегать счетное плотное в $\mathfrak{H}_1$ множество ($\mathfrak{H}_1$ – сепарабельное) и взяв объединение соответствующих множеств E_a, получим множество E меры нуль. При этом $h(t) = 0$ вне E, т.е. почти всюду, следовательно $h = 0$. Равенство (2) доказано.

Заметим, что $||\psi_k(t)a||_{H_+} = ||a||_{\mathfrak{H}_1}$. Тогда из (2) следует, что между элементами рассматриваемых пространств существует изометрическое соответствие V, устанавливаемое формулами: если

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) a_k, \tag{3}$$

то $Vh(t) := (a_1, a_2, \ldots) = a$ и $||h(t)||_{H_+}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||a_k||_{\mathfrak{H}}^2 = ||a||_{\mathfrak{H}_+}^2$.

Аналогично можно установить изоморфизм пространств H_- и $\mathfrak{H}_-$, если в $L_2(-\infty,0)$ взять полную ортонормированную систему функций $\varphi_{-k}(t) = \psi_k(-t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Теперь найдем $V\frac{dh(t)}{dt}$, где $h(t)$ представимо в виде (3). Пусть $h(t) \in \mathfrak{D}(\mathcal{P}_+)$, тогда, учитывая (1), получим

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\psi_k(t) = \tfrac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_k(t) + \\
&+\tfrac{1}{(k-1)!}e^{\frac{t}{2}}\tfrac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}[(k-1)(k-2)t^{k-3}e^{-t} - (k-1)t^{k-2}e^{-t}] = \\
&= -\tfrac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_{k-1}(t) + \tfrac{1}{(k-3)!}e^{\frac{t}{2}}\tfrac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}(t^{k-3}e^{-t}) = \ldots \\
&\ldots = -\tfrac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_{k-1}(t) - \ldots - \psi_2(t) - \psi_1(t).
\end{aligned}$$

Используя это соотношение, имеем:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{dh(t)}{dt} = \tfrac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)a_k = \psi_1(t)(-\tfrac{1}{2}a_1 - \sum_{k=2}^{\infty}a_k) + \\
&+\psi_2(t)(-\tfrac{1}{2}a_2 - \sum_{k=3}^{\infty}a_k) + \ldots + \psi_n(t)(-\tfrac{1}{2}a_n - \sum_{k=n+1}^{\infty}a_k) + \ldots
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$V(i\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)a_k) = (iS_1a, iS_2a, \ldots),$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots)$.

Отображение $\tilde{V}$ между пространствами H_- и $\mathfrak{H}_-$ определяется равенством:

$$\tilde{V}h_-(t) = \tilde{V}(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}a_{-k}) = (\ldots, a_{-2}, a_{-1}).$$

Из соотношения:

$$\frac{d}{dt}\varphi_{-k}(t) = \frac{1}{2}\varphi_{-k}(t) + \varphi_{-k+1}(t) + \varphi_{-k+2}(t) + \ldots + \varphi_{-1}(t)$$

легко получить, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}(\mathcal{P}_-h_-) = \tilde{V}(\mathcal{P}_-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}(t)a_{-k}) = \\
&= (\ldots, iS_{-2}a', iS_{-1}a'),
\end{aligned}$$

где $a' = (\ldots, a'_{-2}, a'_{-1})$.

Теперь построим унитарное отображение U пространства H на $\tilde{H}$, действующее по правилу:

$$U\begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}h_-(t) \\ h_0 \\ Vh_+(t) \end{pmatrix}.$$

При отображении $U\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(\tilde{S})$. Действительно, условия 1) и 2) на $\mathfrak{D}(S)$ и$\mathfrak{D}(\tilde{S})$ эквивалентны. Докажем эквивалентность условий 3).

Так как $\varphi_{-k}(0) = \psi_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$ и $h_+(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)a_k$, $h_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}(t)a_{-k}$, то $h_+(0) = S_+a$, $h_-(0) = S_-a$.

Таким образом мы доказали, что $USh = \tilde{S}U^{-1}h$ ($\forall h \in \mathfrak{D}(S)$) и $Uh_0 = h_0$ ($\forall h_0 \in \mathfrak{H}$). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Кужель А.В. Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов. – Теория функций, функц. анализ и их прил. 1982, вып. 37, с.54-62.

[2] Кудряшов Ю.Л. J-эрмитовы и J-самосопряженные дилатации линейных операторов. – Динамич. системы, 1984, вып. 3. с. 94-98.