Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 33 – 41

УДК 514.12

Е.В. Комиссаренко, А.И. Криворучко

ОБ ИНВАРИАНТАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ

Введение. Известно, что линейная классификация нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном векторном пространстве V сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечной группы G, порожденной объединением попарно непересекающихся и поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений [1], т.е. такой группы, которая удовлетворяет следующим условиям:

(А) Группа порождается объединением образованных отражениями попарно непересекающихся множеств $M_1, \dots, M_k$, причем для каждого $i = 1, \dots, k$ множество M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а гиперплоскость P сопряжена d относительно φ_i, но не содержит d.

(Б) Если два отражения принадлежат $\bigcup_{j=1}^{k} M_j$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Для $k = 3$ эта задача решена [2–4]. Получены отдельные результаты для $k = 4$ (см. [5–9]). В частности, для группы, удовлетворяющей условиям (А) и (Б) и действующей на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, в случае $k = 4$ найдены некоторые ограничения на взаимное расположение плоскостей $A_1, \dots, A_4$. Такие ограничения имеются даже тогда, когда плоскости $A_1, \dots, A_3$ образуют прямую сумму, а плоскость A_4 имеет нулевое пересечение с каждой из плоскостей $A_1, \dots, A_3$ (см. [8] и [9]). Однако для плоскостей $A_1, \dots, A_4$, любые три из которых образуют прямую сумму, существует группа G, удовлетворяющая условиям (А) и (Б) и действующая на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, если размерность пространства V достаточно велика. В связи с этим естественно возникает *постановка следующей задачи*:

Найти инварианты группы G, которая удовлетворяет условиям (А), (Б) и

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

(В) $k = 4$ и при этом любые три из четырех плоскостей $A_1, \ldots, A_4$ образуют прямую сумму.

Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Цель работы – построение поля рациональных инвариантов группы отражений, удовлетворяющей указанным условиям (А)–(В), а также вычисление базисных полиномиальных инвариантов такой группы при выполнении некоторых дополнительных условий.

Основные результаты работы: В п. 1^o вычисляются образующие полей рациональных инвариантов бесконечных групп отражений, удовлетворяющих условиям (А)–(В). Описываются алгебры полиномиальных инвариантов таких групп. В п. 2^o для групп, удовлетворяющих некоторым дополнительным условия, вычисляются образующие алгебр полиномиальных инвариантов. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых алгебры полиномиальных инвариантов рассматриваемых групп свободны.

1^o. **Рациональные инварианты.** Пусть G обозначает группу преобразований пространства V, обладающую указанными выше свойствами (А)–(В). Для каждого $i = 1, \ldots, 4$ пусть $\mu_i : A_i \to V^*$ – линейное отображение, сопоставляющее каждому $a \in A_i$ линейную форму, сопряженную a относительно φ_i. Проективизация отображения μ_i определяется множеством M_i однозначно [1]. Если хотя бы одно из линейных отображений $\mu_1, \ldots, \mu_4$ не является мономорфизмом, то группа G содержит сдвиги и может действовать лишь на цилиндрических алгебраических гиперповерхностях.

Положим

$$s = \dim(A_4 \cap (A_1 + A_2 + A_3)).$$

На основании леммы, доказанной в [8], в пространстве V существует базис

$$(a_{ij},\ b_{il},\ c_q\ :\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le m_i;\ 1 \le l \le s_i;\ 1 \le q \le m)$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_{ij} = a^*_{ij}, \quad y_{il} = b^*_{il}, \quad z_q = c^*_q,$$

для которого

$$A_i = \langle a_{ij},\ b_{il}\ :\ j \le m_i;\ l \le s_i \rangle \quad (i \le 3),$$

$$A_4 = \langle a_{4j},\ b_{4l},\ b_{1p} + b_{2p} + b_{3p}\ :\ j \le m_4;\ l \le s_4;\ p \le s \rangle,$$

$$\mu_i(a_{ij}) = \varepsilon_{ij} x_{ij}, \text{ где } \varepsilon_{ij} \in \{-1;\ 1\} \quad (i,\ j \ge 1),$$

$$\{\mu_i(b_{il}),\ \mu_4(b_{1p} + b_{2p} + b_{3p})\ :\ i \le 4;\ l \le s_i;\ p \le s\} \subseteq \langle z_1, \ldots, z_m \rangle.$$

Зафиксируем такой базис и будем называть его каноническим базисом группы G. Пусть

$$\xi_{il} = \mu_i(b_{il}), \quad \theta_p = -\mu_4(b_{1p} + b_{2p} + b_{3p}) \quad (i,\ l \ge 1;\ p = 1, \ldots, s),$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

$$h_i = \sum_{j,l} (\varepsilon_{ij}\, x_{ij}^2 + 2\, y_{il}\, \xi_{il}) \quad (i \le 4),$$

$\bar{z}$ – кортеж координатных форм $z_1, \ldots, z_m$; K – кольцо всех полиномиальных отображений, а F – поле всех рациональных отображений из V в $\mathbb{R}$; K^G – алгебра полиномиальных инвариантов, а F^G – поле рациональных инвариантов группы G; если $s > 0$, то

$$\Delta = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1s} \\ \xi_{21} & \ldots & \xi_{2s} \\ \xi_{31} & \ldots & \xi_{3s} \\ \theta_1 & \ldots & \theta_s \end{bmatrix}$$

если $s \ge 2$, то

$$D_2 = \begin{vmatrix} \xi_{31} & \xi_{32} \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}, \quad H_i = \begin{vmatrix} h_i & \xi_{i1} & \xi_{i2} \\ h_3 & \xi_{31} & \xi_{32} \\ h_4 & \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} \quad (i \in \{1;\ 2\}),$$

а если $s \ge 3$, то

$$D_3 = \begin{vmatrix} \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} h_1 & \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ h_2 & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ h_3 & \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \\ h_4 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix}$$

Матрица Δ зависит от выбора канонического базиса, но ранг этой матрицы не изменяется при переходе от одного канонического базиса к другому каноническому базису группы G.

Теорема. 1. *Если* $s = 0$ *или* $\operatorname{rank}(\Delta) = 0$, *то*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z},\ h_1, \ldots,\ h_4), \quad K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ h_1, \ldots,\ h_4].$$

2. *Если* $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$, *то можно считать, что* $\theta_1 \ne 0$, *и в этом случае*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z},\ h_i\,\theta_1 - h_4\,\xi_{i1}\ :\ i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$K^G = K \cap \mathbb{R}[\bar{z},\ h_i - h_4\,\xi_{i1}\,\theta_1^{-1}\ :\ i = 1,\ 2,\ 3].$$

3. *Если* $\operatorname{rank}(\Delta) = 2$, *то можно считать, что* $D_2 \ne 0$, *и в этом случае*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z},\ H_1,\ H_2), \quad K^G = K \cap \mathbb{R}[\bar{z},\ H_1 D_2^{-1},\ H_2 D_2^{-1}].$$

4. *Если* $\operatorname{rank}(\Delta) = 3$, *то можно считать, что* $D_3 \ne 0$, *и в этом случае*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z},\ H), \quad K^G = K \cap \mathbb{R}[\bar{z},\ H D_3^{-1}].$$

5. *Пусть* $\operatorname{rank}(\Delta) = 4$. *Тогда*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z}), \quad K^G = \mathbb{R}[\bar{z}].$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

Доказательство. Очевидно, что $z_1, \ldots, z_m$ – инварианты группы G. При этом из [1]–[3] следует, что $h_1, \ldots, h_4,\ z_1, \ldots, z_m$ – образующие над $\mathbb{R}$ как поля рациональных инвариантов, так и алгебры полиномиальных инвариантов подгруппы группы G, порожденной объединением множеств M_1, M_2, M_3 и содержащегося в M_4 квадратичного множества отражений, определяемого плоскостью $\langle a_{4j} : j \geq 1\rangle \oplus \langle b_{4l} : l \geq 1\rangle$ и квадратичной формой h_4.

Пусть $r \in F^G$. Тогда, в силу сказанного выше,

$$r = f(\bar{z},\ h_1, \ldots, h_4) \in \mathbb{R}(\bar{z},\ h_1, \ldots, h_4), \tag{1}$$

причем если $r \in K^G$, то $f(\bar{z},\ h_1, \ldots, h_4) \in \mathbb{R}[\bar{z},\ h_1, \ldots, h_4]$.

Если $s = 0$ или $\operatorname{rank}(\Delta) = 0$, то h_4 сохранятся каждым отражением, принадлежащим M_4; но тогда из (1) следует, что $z_1, \ldots, z_m,\ h_1, \ldots, h_4$ – образующие над $\mathbb{R}$ поля F^G и алгебры K^G.

Предположим, что $\operatorname{rank}(\Delta) > 0$. Тогда за счет перехода к новому каноническому базису группы G можно считать, что $\theta_1 \neq 0$. Пусть $T(p,t)$ – отражение относительно гиперплоскости $\varepsilon_{41}\, x_{41} + t\,\theta_p = 0$ в направлении $a_{41} - t\,(b_{1p} + b_{2p} + b_{3p})$,

$$\Psi_p = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(T(p,t)\cdot T(p,0))\right)\bigg|_{t=0}$$

Из (1) и инвариантности r относительно $T(1,t)$ получаем

$$r = f(\bar{z},\ h_1', \ldots, h_4'),$$

где

$$h_i' = h_i + 4\,t\,\xi_{i1}\,(x_{41} + t\,\varepsilon_{41}^{-1}\,\theta_1) \quad (i \in \{1;\ 2;\ 3\}),$$

$$h_4' = h_4 + 4\,t\,\theta_1\,(x_{41} + t\,\varepsilon_{41}^{-1}\,\theta_1).$$

Уравнение

$$h_4 + 4\,t\,\theta_1\,(x_{41} + t\,\varepsilon_{41}^{-1}\,\theta_1) = 0$$

относительно неизвестной t имеет вещественные решения в каждой точке очевидным образом определяемого непустого открытого подмножества пространства V. Но для t, удовлетворяющего этому уравнению,

$$h_4' = 0, \quad h_i' = h_i - h_4\,\xi_{i1}\,\theta_1^{-1} \quad (i \in \{1;\ 2;\ 3\}),$$

и поэтому в поле F выполняется равенство

$$r = f(\bar{z},\ h_1 - h_4\,\xi_{11}\,\theta_1^{-1},\ h_2 - h_4\,\xi_{21}\,\theta_1^{-1},\ h_3 - h_4\,\xi_{31}\,\theta_1^{-1},\ 0). \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что если $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$, то для каждого $i \leq 3$ многочлен $h_i\,\theta_1 - h_4\,\xi_{i1}$ сохраняется отражениями, принадлежащими M_4, и поэтому $h_i\,\theta_1 - h_4\,\xi_{i1}$ – инвариант группы G.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF. To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

Допустим, что $\operatorname{rank}(\Delta) \geq 2$. Тогда можно считать, что $D_2 \neq 0$. При этом для любого $p \in \{2; \ldots; s\}$ оператор $\exp([t\,\varepsilon_{41}\,\Psi_1,\ \Psi_p])$ принадлежит замыканию группы G и в заданной канонической системе координат имеет следующее координатное представление:

$$y'_{i1} = y_{i1} + t\,\theta_p, \quad y'_{ip} = y_{i1} - t\,\theta_1 \quad (i \in \{1;\ 2;\ 3\}),$$

остальные координаты не изменяются.

Но из (2) и инвариантности r относительно $\exp[t\,\varepsilon_{41}\,\Psi_1,\ \Psi_2]$ в поле $F(t)$ получаем равенство

$$r = f(\bar{z},\ h'_1 - h_4\,\xi_{11}\,\theta_1^{-1},\ h'_2 - h_4\,\xi_{21}\,\theta_1^{-1},\ h'_3 - h_4\,\xi_{31}\,\theta_1^{-1},\ 0), \tag{3}$$

где

$$h'_i = h_i + t\,(\theta_2\,\xi_{i1} - \theta_1\,\xi_{i2}) \quad (i \in \{1;\ 2;\ 3\}).$$

Полагая

$$t = \frac{\xi_{31}\,h_4 - \theta_1\,h_3}{\theta_1\,D_2},$$

из (3) получим:

$$r = f(\bar{z},\ H_1\,D_2^{-1},\ H_2\,D_2^{-1},\ 0,\ 0). \tag{4}$$

Если $\operatorname{rank}(\Delta) = 2$, то многочлены H_1 и H_2 сохраняются отражениями, принадлежащими M_4, и поэтому H_1 и H_2 – инварианты группы G.

Формально равенство (4) получено при условиях $\theta_1 \neq 0$ и $D_2 \neq 0$. Однако если $\theta_1 = 0$, но $D_2 \neq 0$, то $\theta_2 \neq 0$, и равенство (4) остается верным.

Пусть теперь $\operatorname{rank}(\Delta) \geq 3$. Тогда можно считать, что $D_3 \neq 0$. Из (4) и инвариантности r относительно $\exp[t\,\varepsilon_{41}\,\Psi_1,\ \Psi_3]$ в поле $F(t)$ получаем равенство

$$r = f(\bar{z},\ H'_1\,D_2^{-1},\ H'_2\,D_2^{-1},\ 0,\ 0), \tag{5}$$

где

$$H'_i = \begin{vmatrix} h_i + t\,(\xi_{i1}\,\theta_3 - \xi_{i3}\,\theta_1) & \xi_{i1} & \xi_{i2} \\ h_3 + t\,(\xi_{31}\,\theta_3 - \xi_{33}\,\theta_1) & \xi_{31} & \xi_{32} \\ h_4 & \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} = H_i - t\,\theta_1 \begin{vmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2} & \xi_{i3} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} \quad (i \in \{1;\ 2\}).$$

Полагая

$$t = \frac{H_2}{\theta_1\,D_3},$$

из (5) получим:

$$r = f(\bar{z},\ H\,D_3^{-1},\ 0,\ 0,\ 0). \tag{6}$$

Если $\operatorname{rank}(\Delta) = 3$, то многочлен H сохраняется отражениями, принадлежащими M_4, и поэтому является инвариантом группы G.

Формально равенство (6) получено при условиях $\theta_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ и $D_3 \neq 0$; однако это равенство остается верным, если потребовать лишь $D_3 \neq 0$. В самом деле, если $D_3 \neq 0$, то переходя к новому каноническому базису группы G, в котором

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

соответствующим образом изменяется нумерация первых трех столбцов матрицы Δ, можно считать, что $\theta_1 \neq 0$ и $D_2 \neq 0$.

Пусть теперь $\operatorname{rank}(\Delta) = 4$. Положим

$$D_4 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{14} \\ \xi_{21} & \dots & \xi_{24} \\ \xi_{31} & \dots & \xi_{34} \\ \theta_1 & \dots & \theta_4 \end{vmatrix}$$

Можно считать, что $\theta_1 D_4 \neq 0$,. Из (6) и инвариантности r относительно оператора $\exp[t\,\varepsilon_{41}\,\Psi_1,\ \Psi_4]$ в поле $F(t)$ получаем равенство

$$r = f(\bar{z},\ H' D_3^{-1},\ 0,\ 0,\ 0), \tag{7}$$

где

$$H' = \begin{vmatrix} h_1 + t\,(\xi_{11}\,\theta_4 - \xi_{14}\,\theta_1) & \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ h_2 + t\,(\xi_{21}\,\theta_4 - \xi_{24}\,\theta_1) & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ h_3 + t\,(\xi_{31}\,\theta_4 - \xi_{34}\,\theta_1) & \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \\ h_4 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} = H + t\,\theta_1\,D_4.$$

Отсюда и из (7)

$$r = f(\bar{z},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

2^o. **Полиномиальные инварианты.** Хотя в доказанной выше теореме описывается строение алгебры полиномиальных инвариантов группы G, образующие этой алгебры в явном виде не указываются. Приведем некоторые следствия из теоремы, позволяющие в ряде случаев получить базисные полиномиальные инварианты группы G.

Следствие 1. *Если $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $\xi_{ip} = \alpha_i\theta_p$ для всех $i \leq 3$ и $p \leq s$, то*

$$K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ h_1 - \alpha_1\,h_4,\ h_2 - \alpha_2\,h_4,\ h_3 - \alpha_3\,h_4].$$

Отметим, что если $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$, $s > 1$, а формы $\theta_1, \dots, \theta_s$ линейно независимы (в частности, если μ_4 – мономорфизм), то можно считать, что $\xi_{ip} = \alpha_i\,\theta_p$ для всех $i \leq 3$ и $p \leq s$. При этом каждое α_i, отличное от 0, можно считать равным 1.

Следствие 2. *Пусть $s = 1$.*

а) *Если* $\operatorname{rank}(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}, \theta_1) = 2$, *то можно считать, что*

$$\xi_{i1} = \gamma_i\,\xi_{31} + \delta_i\,\theta_1 \quad (i \in \{1;\ 2\}),$$

где γ_i, δ_i принадлежат $\mathbb{R}$, и в этом случае

$$K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ h_3\,\theta_1 - h_4\,\xi_{31},\ h_1 - \gamma_1\,h_3 - \delta_1\,h_4,\ h_2 - \gamma_2\,h_3 - \delta_2\,h_4].$$

б) *Если* $\operatorname{rank}(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}, \theta_1) = 3$, *то можно считать, что*

$$\xi_{11} = \gamma_2\,\xi_{21} + \gamma_3\,\xi_{31} + \gamma_4\,\theta_1,$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

и в этом случае

$$K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ h_2\,\theta_1 - h_4\,\xi_{21},\ h_3\,\theta_1 - h_4\,\xi_{31},\ h_2\,\xi_{31} - h_3\,\xi_{21},\ h_1 - \gamma_2\,h_2 - \gamma_3\,h_3 - \gamma_4\,h_4].$$

в) K^G *несвободна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}, \theta_1) > 2$.

Следствие 3. *Если* $\operatorname{rank}(\Delta) > 1$, γ_i *и* δ_i *принадлежат* $\mathbb{R}$,

$$\xi_{ip} = \gamma_i\,\xi_{3p} + \delta_i\,\theta_p \quad (i \in \{1;\ 2\};\ \ p \in \{1; \ldots;\ s\}),$$

то

$$K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ h_1 - \gamma_1\,h_3 - \delta_1\,h_4,\ h_2 - \gamma_2\,h_3 - \delta_2\,h_4].$$

Следствие 4. *Пусть* $\operatorname{rank}(\Delta) > 1$, $\xi_{ip} = \theta_p$ *для всех* $i \geq 1$ *и* $p > 1$, *а линейные формы* $\xi_{11} - \theta_1$, $\xi_{21} - \theta_1$, $\xi_{31} - \theta_1$ *неколлинеарны и* $\xi_{31} \neq \theta_1$. *Тогда*

$$F^G = \mathbb{R}(\bar{z},\ (\xi_{31} - \theta_1)\,h_i + (\theta_1 - \xi_{i1})\,h_3 + (\xi_{i1} - \xi_{31})\,h_4\ :\ i \in \{1;\ 2\}),$$

$$K^G = K \cap \mathbb{R}[\bar{z},\ h_i - h_4 + (h_4 - h_3)\,(\xi_{i1} - \theta_1)\,(\xi_{31} - \theta_1)^{-1}\ :\ i \in \{1;\ 2\}].$$

При этом

а) *если* $\xi_{11} - \theta_1$, $\xi_{21} - \theta_1$, $\xi_{31} - \theta_1$ *компланарны, но* $\xi_{21} - \theta_1$, $\xi_{31} - \theta_1$ *неколлинеарны, то* $\xi_{11} = \gamma_2\,\xi_{21} + \gamma_2\,\xi_{31} + (1 - \gamma_2 - \gamma_3)\,\theta_1$, *где* γ_2 *и* γ_3 *принадлежат* $\mathbb{R}$, *и в этом случае* K^G *совпадает с*

$$\mathbb{R}[\bar{z},\ h_1 - \gamma_2\,h_2 - \gamma_3\,h_3 + (\gamma_2 + \gamma_3 - 1)\,h_4,\ (\xi_{31} - \theta_1)\,h_2 + (\theta_1 - \xi_{21})\,h_3 + (\xi_{21} - \xi_{31})\,h_4];$$

б) *если* $\xi_{11} - \theta_1$, $\xi_{21} - \theta_1$, $\xi_{31} - \theta_1$ *некомпланарны, то алгебра* K^G *совпадает с*

$$\mathbb{R}[\bar{z},\ (\xi_{21} - \theta_1)\,h_1 + (\theta_1 - \xi_{11})\,h_2 + (\xi_{11} - \xi_{21})\,h_4,$$

$$(\xi_{31} - \theta_1)\,h_i + (\theta_1 - \xi_{i1})\,h_3 + (\xi_{i1} - \xi_{31})\,h_4\ :\ i \in \{1;\ 2\}]$$

и несвободна.

Отметим, что, согласно [10], если $\operatorname{rank}(\Delta) = 2$, $s > 2$, а формы $\theta_1, \ldots, \theta_s$ линейно независимы, то, переходя к новому каноническому базису группы G, можно считать, что выполняются условия одного из следствий 3, 4; если же $\operatorname{rank}(\Delta) = 3$ и $s > 3$, то можно считать, что выполняется одно из следующих условий:

1) строки матрицы Δ линейно зависимы над $\mathbb{R}$;

2) ранг матрицы, полученной при вычеркивании первого столбца матрицы Δ, равен 2;

3) $\Delta = \begin{pmatrix} \theta_1 + \eta_1 & \theta_2 + \eta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \ldots & \theta_s \\ \theta_1 + \eta_3 & \theta_2 & \theta_3 - \eta_2 & \theta_4 & \ldots & \theta_s \\ \theta_1 & \theta_2 - \eta_3 & \theta_3 - \eta_1 & \theta_4 & \ldots & \theta_s \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \ldots & \theta_s \end{pmatrix}$, где η_1, η_2, η_3 принадлежат V^* и линейно независимы;

4) $s = 4$ и для каждого $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$

$$(\xi_{i1}\ \ \ldots\ \ \xi_{i4}) = (\theta_1\ \ \ldots\ \ \theta_4)\,S_4\,S_i,$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

где $S_1, \ldots, S_4$ – вещественные кососимметричные матрицы, $|S_4| \neq 0$, и при этом матрицы $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4^{-1}$ линейно независимы.

Следствие 5. *Если* $\operatorname{rank}(\Delta) = 3$ *и для некоторых вещественных* $\gamma_1,\ \gamma_2$ *и* γ_3

$$\theta_p = \gamma_1\, \xi_{1p} + \gamma_2\, \xi_{2p} + \gamma_3\, \xi_{3p} \quad (p = 1, \ldots, s),$$

то

$$K^G = \mathbb{R}[\bar{z},\ \ \gamma_1\, h_1 + \gamma_2\, h_2 + \gamma_3\, h_3 - h_4].$$

Доказательство всех этих утверждений аналогично доказательству соответствующих результатов работы [3], полученных в случае $k = 3$.

Заключение. *Основные результаты работы:*

Пусть G – удовлетворяющая условиям *(A)–(B)* бесконечная группа отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии. Построены образующие поля рациональных инвариантов такой группы. При некоторых дополнительных условиях вычислены базисные полиномиальные инварианты группы G. Получены необходимые и достаточные условия того, что алгебра полиномиальных инвариантов группы G свободна.

На основании этих результатов предполагается получить условия полноты группы G и невырожденности ее алгебры инвариантов.

Список литературы

[1] Криворучко А.И. О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 1. – С. 78–92.

[2] Криворучко А.И. О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. – 1999. – Вып. 18. – С. 170–177.

[3] Криворучко А.И. О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. – 2000. – Вып. 16. С. 124–129.

[4] Игнатенко В.Ф., Криворучко А.И. О кольцах инвариантов специальных групп косых симметрий // Труды математического факультета. Изд-во СГУ. Симферополь, 1997. С. 57–61.

[5] Игнатенко В.Ф. Об одной бесконечной группе косых симметрий // Изв. вузов. – Математика. – 1994. – № 3(382). – С. 32–34.

[6] Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. IV // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. Т.5, № 1/2. – С. 35–48.

[7] Игнатенко В.Ф., Плышевская С.П. Строение одного класса бесконечных групп косых симметрий // Ученые записки ТНУ. Симферополь, 1999. – Том 12, № 2. – С. 62–65.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF. To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

[8] Криворучко А.И. О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2001. – Том 14, № 1. – С. 60–65.

[9] Криворучко А.И. О взаимном расположении четырех линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы отражений // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2002. – Том 15, № 2. – С. 43–48.

[10] Криворучко А.И. О матрицах над пространствами линейных форм // Тезисы докладов Четвертой Крымской международной математ. школы. – Симферополь, 1998. – С. 37.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com