Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 27– 32
УДК 519.6

Ю.Б. Иванов

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ

Математическое моделирование гидродинамики прибрежных вод в природных замкнутых бассейнах больших размеров таких, например, как Черное море, является необходимым этапом исследования процессов формирования, трансформации и вариации гидродинамических и гидрохимических полей, проводимого с целью установления контроля над экологическим состоянием региона.

В настоящее время широко используются линейные модели, обладающие рядом достоинств, построенные на системе дифференциальных уравнений теории длинных волн [1]. В работе [2] на основе упомянутой теории рассмотрена задача о свободных колебаниях однородной жидкости в замкнутом бассейне, поставленная как задача отыскания частот и мод полиномиального операторного пучка, что приводит к необходимости численного решения соответствующего однородного уравнения, содержащего неизвестный спектральный параметр.

В данной работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях однородной жидкости, которая формулируется для упомянутого операторного пучка в виде неоднородного уравнения, содержащего в качестве параметра заданную частоту вынуждающего воздействия. Доказывается сходимость предлагаемого итерационного метода численного решения этой задачи.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях вращающейся однородной жидкости в приближении теории мелкой воды [3]. В этом случае движения жидкости определяются системой уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} u_t - fv + g\eta_x &= -\frac{1}{\rho_*}P_x \\ v_t + fu + g\eta_y &= -\frac{1}{\rho_*}P_y \\ (uH)_x + (vH)_y + \eta_t &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ - компоненты горизонтальной скорости; $\eta = \eta(x, y)$ - отклонение от стационарного положения равновесия свободной поверхности жидкости; $P = P(x, y)$ - давление; $H = H(x, y)$ - глубина бассейна; $f$ - параметр Кориолиса; $g$ - ускорение свободного падения; $\rho_*$ - плотность жидкости.

Решения системы (1) ищутся в ограниченной области $\Omega$ с границей $\Gamma$.

Относительно области $\Omega$, ее границы $\Gamma$ и коэффициента $H(x,y)$ будем предполагать, что они обладают следующими геометрическими свойствами.

**C1.Геометрические свойства.** Функция $H(x,y)$ непрерывна в конечной области $Z_0$ вещественной плоскости $R^2$; уравнение $H(x,y) = 0$ определяет некоторую кривую $\Gamma$, которая является границей односвязной области $\Omega \subset Z_0$; $H(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega$; первые производные коэффициента $H(x,y)$ ограничены в области $Z_0$, $|grad\ H(x,y)| < C$ для $(x,y) \in \bar{\Omega}$; в области $\bar{\Omega}$ ищем ограниченные решения системы (1), удовлетворяющие условию

$$\iint\limits_{\Omega} \eta(t,x,y)dxdy = 0;$$

граничные условия на решения системы (1) оставляем свободными.

Для периодического возмущения давления вида $P = e^{-i\omega_0 t}p(x,y)$ решение системы (1) ищем в виде

$$(u,v,\eta)(x,y,t) = e^{-i\omega_0 t}(u,v,\eta)(x,y).$$

Исключая скорости $u$ и $v$ из системы (1) и обобщая постановку краевой задачи, сформулируем ее в виде следующего уравнения колебаний свободной поверхности [2] :

$$g(\omega_0\mathbf{L} + i\cdot f\mathbf{M})\eta + \omega_0(f^2-\omega_0^2)\eta = -\frac{1}{\rho_*}(\omega_0\mathbf{L} + i\cdot f\mathbf{M})p,$$

которое в рассматриваемом случае вынужденных колебаний будет иметь не нулевую правую часть. После приведения уравнения к вещественному и безразмерному виду, получаем уравнение

$$(\lambda_0\mathbb{L} - \alpha\mathbb{M})\eta + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2)\eta = -(\lambda_0\mathbb{L} - \alpha\mathbb{M})p,$$

где $\lambda_0$ - безразмерная частота вынуждающего воздействия; $\alpha > 0$ - безразмерный коэффициент Кориолиса. Запишем теперь это уравнение в виде

$$\left(\lambda_0^3\mathbb{E} - \lambda_0(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}) + \alpha\mathbb{M}\right)\eta = (\lambda_0\mathbb{L} - \alpha\mathbb{M})\,p \tag{2}$$

и сделаем следующие предположения относительно свойств коэффициентов этого уравнения.

**C2. Свойства коэффициентов уравнения.** $\mathbb{E}$ - единичный оператор;

$\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}$ - неограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор с областью определения $\mathcal{D}(\mathbb{L}) \subset H^1(\Omega)$; $\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}$ - самосопряжен в $L_2(\Omega)$ и положительно определен;

оператор $\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}$ существует, самосопряжен, компактен в $L_2(\Omega)$ и положителен; оператор $\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ ограничен;

$\mathbb{M} : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ - ограниченный, самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор;

пространство $H^1(\Omega)$ вложено в пространство $L_2(\Omega)$ компактно.

Отметим, что множество краевых задач, в которых область $\Omega$ и коэффициент $H(x, y)$ системы (1) обладают геометрическими свойствами **C1** , а коэффициенты уравнения (2) обладают свойствами **C2** , не является пустым. Примером такой задачи может служить осесимметричная задача о собственных колебаниях однородной жидкости в бассейне с параболическим дном [1, стр.409]. В этом частном случае указанные свойства **C1** и **C2** легко проверяются.

Решения уравнения (2) будем искать для $\eta$ и $p$, принадлежащих области определения оператора $\mathbb{L}$: $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) \subset H^1(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) \subset H^1(\Omega)$. В уравнении (2) перейдем к неизвестной $\xi$ с областью определения $\Omega$:

$$\xi = \left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{1/2}\eta, \quad \eta = \left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}\xi. \tag{3}$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (2) оператор $\lambda_0^{-1}(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}$, приходим к уравнению

$$\xi - (\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}\left(\lambda_0^2\mathbb{E} + \frac{\alpha}{\lambda_0}\mathbb{M}\right)(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}\xi = -(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}\left(\mathbb{L} - \frac{\alpha}{\lambda_0}\mathbb{M}\right)p. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение отображение $\mathbb{A} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и элемент $f \in L_2(\Omega)$:

$$\mathbb{A} = (\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-\frac{1}{2}}\left(\lambda_0^2\mathbb{E} + \frac{\alpha}{\lambda_0}\mathbb{M}\right)(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-\frac{1}{2}}, \ f = -(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbb{L} - \frac{\alpha}{\lambda_0}\mathbb{M}\right)p.$$

Тогда в пространстве $L_2(\Omega)$ уравнение (4) запишется в виде

$$\xi - \mathbb{A}(\lambda_0)\xi = f, \quad f \in L_2(\Omega). \tag{5}$$

**Теорема.** *При выполнении свойств C2 на коэффициенты уравнения* (2) $\mathbb{A}(\lambda_0)$ – *компактный и самосопряженный в* $L_2(\Omega)$ *оператор.*

**Доказательство.** Пусть $X_0$ – произвольное ограниченное в $L_2(\Omega)$ множество. Докажем тогда, что образ $\mathbb{A}X_0$ – ограниченное в $H^1(\Omega)$ множество. Действительно, $X_1 = (\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}X_0$ – ограниченное в $H^1(\Omega)$ множество, так как $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ – непрерывный оператор. Далее. $X_2 = (\lambda_0^2\mathbb{E} + \alpha/\lambda_0\mathbb{M})X_1$ – ограниченное в $L_2(\Omega)$ множество, так как $\mathbb{M} : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – ограниченный оператор. И наконец, $X_3 = (\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}X_2$ – ограниченное в $H^1(\Omega)$ множество, так как $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ – непрерывный оператор.

Следовательно, множество $X_3 = \mathbb{A}X_0$ – ограничено в $H^1(\Omega)$, то есть компакт в $L_2(\Omega)$ в силу компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что $\mathbb{A} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ — компактный в $L_2(\Omega)$ оператор.

Самосопряженность оператора $\mathbb{A}$ непосредственно следует из его компактности в $L_2(\Omega)$ и из самосопряженности операторов $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}$ и $\mathbb{M}$. □

Уравнение (5) с вполне непрерывным самосопряженным оператором $\mathbb{A}(\lambda_0)$ является классическим уравнением Фредгольма второго рода. Для таких уравнений известны [4] теоремы существования и единственности решений. Из этих теорем существования и доказанной выше теоремы получаем

**Следствие.** Если единица не является собственным значением компактного симметрического оператора $\mathbb{A}(\lambda_0)$, то уравнение (5) имеет единственное решение для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$.

**Итерационный метод решения.** Рассмотрим уравнение

$$\mu \cdot \xi - \mathbb{A}\xi = f, \tag{6}$$

где $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\lambda_0)$ – симметрический, компактный в $L_2(\Omega)$ оператор и $\mu = 1$ не является собственным значением оператора $\mathbb{A}(\lambda_0)$, $f \in L_2(\Omega)$ – произвольный элемент.

По теореме Гильберта-Шмидта [4] ортонормированные собственные векторы $\xi_k$ образуют базис пространства $L_2(\Omega)$, а собственные значения $\mu_k$ образуют последовательность $|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \cdots > |\mu_k| \geqslant \cdots \geqslant 0$, такую что $|\mu_k| \to 0$, $k \to \infty$. Тогда у операторора $\mathbb{A}$ существует только конечное число $n$ собственных значений $\mu_k$, $k = 1, \ldots, n$ таких, что $|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \cdots \geqslant |\mu_n| > 1 > |\mu_{n+1}|$.

Обозначим через $H_1$ конечномерное подпространство с ортонормированным базисом $\{\xi_k, k = 1, \ldots, n\}$. Основное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ разложим в прямую сумму инвариантных для оператора $\mathbb{A}$ подпространств: $L_2(\Omega) = H_1 \oplus H_2$.

Введем операторы $P_k$, $k = 1, 2$ ортогонального проектирования на подпространства, такие что

$$P_k : L_2(\Omega) \to H_k, \quad P_k^2 = P_k, \quad P_1 + P_2 = E, \quad P_k = P_k^*.$$

Положим в уравнении (6) параметр $\mu = 1$ и будем искать его решения в виде

$$\xi = P_1\xi + P_2\xi. \tag{7}$$

Запишем правую часть уравнения в виде

$$f = P_1 f + P_2 f \tag{8}$$

и подставим (7) и (8) в уравнение (6)

$$P_1\xi + P_2\xi - \mathbb{A}P_1\xi - \mathbb{A}P_2\xi = P_1 f + P_2 f. \tag{9}$$

Умножим левую и правую части уравнения (9) скалярно на $P_1\eta$ и $P_2\eta$, где $\eta \in L_2(\Omega)$ – произвольный вектор. Приходим к уравнениям, которые можно записать в виде

$$(P_1\xi, \eta) - (P_1\mathbb{A}P_1\xi, \eta) - (P_1\mathbb{A}P_2\xi, \eta) = (P_1 f, \eta)$$
$$(P_2\xi, \eta) - (P_2\mathbb{A}P_1\xi, \eta) - (P_2\mathbb{A}P_2\xi, \eta) = (P_2 f, \eta).$$

Заметим, что $P_1\mathbb{A}P_2\xi = 0$ и $P_2\mathbb{A}P_1\xi = 0$, так как подпространства $H_1$ и $H_2$ являются ортогональными и инвариантными подпространствами оператора $\mathbb{A}$. С учетом этих равенств и в силу произвольности $\eta \in L_2$, приходим к системе уравнений

$$P_1\xi - P_1\mathbb{A}P_1\xi = P_1 f$$
$$P_2\xi - P_2\mathbb{A}P_2\xi = P_2 f.$$

Эта система распадается на два независимых уравнения для элементов $x = P_1\xi$ и $y = P_2\xi$, при этом $x + y = \xi$:

$$P_1\xi - P_1\mathbb{A}P_1\xi = f_1, \tag{10}$$

$$P_2\xi - P_2\mathbb{A}P_2\xi = f_2, \tag{11}$$

где $f_1 = P_1 f$, $f_2 = P_2 f$. Легко показать, что решение уравнения (10) можно записать либо в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_1, \xi_k)}{1 - \mu_k}\xi_k,$$

либо в эквивалентном виде

$$x = f_1 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{(f_1, \xi_k)}{1 - \mu_k}\xi_k,$$

где собственные значения $\mu_k$ таковы что $|\mu_k| > 1$, $k = 1, \ldots, n$ , $\xi_k$ – собственные векторы оператора $\mathbb{A}$.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости уравнения (11) и докажем следующее

**Утверждение.** Уравнение (11) имеет единственное решение $y \in H_2$ для произвольного элемента $f_2 \in H_2$.

**Доказательство.** Так как операторы $P_2$ и $\mathbb{A}$ перестановочны и учитывая указанные выше свойства оператора проектирования $P_2$, получаем следующие соотношения:

$$P_2\mathbb{A} = \mathbb{A}P_2, \quad P_2\mathbb{A} = P_2\mathbb{A}P_2, \quad ||P_2\mathbb{A}|| = ||P_2\mathbb{A}P_2|| = |\mu_{n+1}| < 1.$$

Обозначим $P_2\mathbb{A}P_2 \equiv B$ и запишем уравнение (11) в виде

$$y - By = f_2. \tag{12}$$

где $y \in H_2$ и $f_2 \in H_2$

Так как $||B|| < 1$, то из известной теоремы о разрешимости таких уравнений в банаховом пространстве [4] следует, что уравнение (12) на подпространстве $H_2$ имеет единственное решение, к которому сходится итерационнный процесс

$$y^{(k+1)} = By^{(k)} + f_2$$

для любого начального приближения $y^{(0)} \in H_2$. Кроме того, имеет место оценка

$$||y^{(k)} - Y|| \leqslant \frac{||y^{(k+1)} - y^{(k)}||}{1 - ||B||},$$

где $Y$ – точное решение уравнения . □

На основе полученных результатов о разрешимости уравнений (10) и (11) для численного решения задачи о вынужденных периодических колебаниях предлагается применять следующий

**Алгоритм.** Задаем:

$\varepsilon > 0$ (* допустимая погрешность решения уравнения *)

$\xi_k$, $k = 1, \ldots, n$ (* собственные векторы оператора $\mathbb{A}$ *)

$\mu$ (* оценка нормы, $||B|| \leqslant \mu < 1$ *).

Вычисляем правую часть и начальное приближение :

$$f_2 \Leftarrow f - \sum_{i=1}^{n} (f, \xi_i)\xi_i \quad (*\ f_2 = f - f_1\ *)$$

$$y^{(0)} \Leftarrow f_2.$$

Далее, для $k = 0, 1, \ldots$ проводим вычисления по схеме:

$$M1: \quad z^{(k+1)} \Leftarrow \mathbb{A} y^{(k)}$$

$$s^{(k+1)} \Leftarrow z^{(k+1)} - \sum_{i=1}^{n} \left( z^{(k+1)}, \xi_i \right) \xi_i \quad (*\ s^{(k+1)} = P_2 \mathbb{A} y^{(k)}\ *)$$

$$y^{(k+1)} \Leftarrow s^{(k+1)} + f_2$$

**Если** $||y^{(k+1)} - y^{(k)}|| > (1 - \mu)\varepsilon$

**то** $\left\{ y^{(k)} \Leftarrow y^{(k+1)}; \quad GOTO\ M1 \right\}$

$END$ (* $y^{(k)}$ – решение уравнения с оценкой $||y^{(k)} - Y|| \leqslant \varepsilon$ *).

Рассмотренный численный метод решения позволяет расщепить получение решения исходной задачи о вынужденных колебаниях на два этапа. Первый этап состоит в определлнии некоторого количества, в зависимости от значения параметра $\lambda_0$, наибольших собственных значений и соответствующих собственных векторов вполне непрерывного оператора $\mathbb{A}(\lambda_0)$. Затем, используя результаты первого этапа, вычисляем оставшуюся регулярную часть решения с помощью простого итерационного **Алгоритма**. Приемущества такого алгоритма численного решения задачи о вынужденных колебаниях становятся очевидными в случае, когда безразмерная частота вынуждающего воздействия $\lambda_0$ оказывается близкой к одной из собственных частот свободных колебаний системы.

## Список литературы

[1] Ламб Г. *Гидродинамика* – М.-Лен.: ОГИЗ, 1947. – 928 С.

[2] Иванов Ю.Б. *Обобщенные решения спектральной краевой задачи для системы уравнений теории мелкой воды* //Ученые записки ТНУ. Серия "Математика. Механика. Информатика."Т.14(53), № 1. – С.43-50

[3] Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане. Т.1* – М.: Мир, 1981. – 478 С.

[4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу* – М.: Мир, 1979. – 587 С.