Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2005) 128 – 145

УДК УДК 517.9

К. И. Чернышов

ПРИВОДИМОСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ[1]

1. Введение

Введем следующие обозначения: $X, Y-$ изоморфные комплексные банаховы пространства, $Hom\ (X,Y)-$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y, $End\ X-$ банахова алгебра эндоморфизмов пространства X, $Hom\ (X,X) = End\ X$, $I-$ тождественный оператор в X или Y, являющийся единицей в алгебре $End\ X$,
$\mathbf{0}$ – нулевой элемент в X или Y.

Пусть заданы линейные операторы F, G такие, что $F : D(F) \subset X \to Y$ – замкнутый оператор с областью определения $D(F) = \mathcal{D} \neq X$, $G \in Hom\,(X,Y)$, $Ker\ G \neq \mathbf{0}$. В [1, 2] для несингулярной упорядоченной пары операторов (F, G) с непустым резольвентным множеством $\rho(F,G)$ был получен критерий изолированности точки ∞ в ее расширенном спектре $\widetilde{\sigma}(F,G)$, который формулировался в терминах стабилизации подпространств. В параграфах 2, 3 данной статьи изучается стабилизация некоторых подпро-
странств при отсутствии условия несингулярности пары. Цель исследования – предъявить условия (см. предположения 2.1–2.3), не уступающие по эффективности условию несингулярности, обеспечивающему приводимость пары относительно разложений пространств X, Y в прямые суммы подпространств, однако не использующие понятие резольвенты пары. В этих предположениях подпространство $X^{(m)}$ (см. теорему 3.3) может служить фазовым пространством решений ЛДУ

$$G\dot{x} = Fx, \qquad t \in [0; +\infty). \tag{*}$$

Известны (см., например, [3, §10]) линейные преобразования уравнения $Fx = y$ с замкнутым оператором $F : D(F) \subset X \to Y$, приводящие его к эквивалентному уравнению $(KF)x = Ky$. Действуя аналогичным образом и рассматривая линейные преобразования уравнения $Fu = Gv$, можно пару (F, G) заменить при $Ker\ F = \mathbf{0}$ эквивалентными парами $(I, F^{-1}G)$ в X, (GF^{-1}, I) в Y, при $Ker\ G = \mathbf{0}$ – эквивалентными парами $(I, G^{-1}F)$ в X, (FG^{-1}, I) в Y. Замена $x(t) = \exp(\lambda_0 t)y(t)$ приводит

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04-01-00141

(*) к эквивалентному уравнению с парой $(\overline{F}, G)$, в которой оператор $\overline{F} = F - \lambda_0 G$ обратим, поэтому без ограничения общности можно при необходимости считать, что $Ker\ F = \mathbf{0}$. В то же время необратимость оператора G, стоящего в (*) при производной, устранить экспоненциальной заменой с $0 \neq \lambda_0 \in \rho(F, G)$ не удается, следовательно, $G^{-1}F$, FG^{-1} – это не линейные операторы, а линейные отношения. Введение *обобщенного обратного* к G оператора $H \in Hom\ (Y, X)$, аннулирующегося на специально выбранном прямом дополнении до $Im\ G$, позволяет обосновать корректность перехода от пары (F, G) к парам операторов (I, HF) в X, (FH, I) в Y, подробно изучить аналитическую и геометрическую структуру последовательностей подпространств, а также получить альтернативные разложения пространств X, Y в прямые суммы подпространств,

В данной статье на основе теории линейных отношений внесены уточнения в [4], где исследовался случай сингулярной упорядоченной пары операторов (F, G). Условимся придерживаться терминологии, принятой в [2, 5, 6], и отмечать знаками ◄, ► начало и конец доказательства.

Приведем результаты из спектральной теории замкнутых линейных отношений, которые понадобятся в дальнейшем. Большая их часть содержится в [5, 6].

Линейным отношением на X назовем любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times X$. Совокупность всех замкнутых линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$.

Подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \exists\ y \in X$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{A}\}$ называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$. Через $\mathcal{A}x$ обозначается множество $\{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$, в частности, $\mathcal{A}\mathbf{0} =$
$= \{y \in X \mid (\mathbf{0}, y) \in \mathcal{A}\}$. Подпространства $Ker\ \mathcal{A} = \{x \in X \mid (x, \mathbf{0}) \in \mathcal{A}\}$ и $Im\ \mathcal{A} = \{y \in X \mid \exists\ x \in D(\mathcal{A})$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\limits_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$ называются соответственно *ядром* и *образом* линейного (этот термин будет, как правило, опускаться) отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$.

Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то всегда существует обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} =$
$= \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\} \in LR(X)$. Непосредственно из определений для любых $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ получаем равенства

$$D(\mathcal{A}^{-1}) = Im\ \mathcal{A},\ \ Im\ \mathcal{A}^{-1} = D(\mathcal{A});\ \ Ker\ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathbf{0},\ \ \mathcal{A}^{-1}\mathbf{0} = Ker\ \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Суммой двух отношений $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство из $X \times X$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}),\ y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$. Значит, $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$, и под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$. *Произведением* отношений $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in D(\mathcal{B})$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{A}$ и $(y, z) \in \mathcal{B}\}$.

Лемма 1.1. Для любых $\mathcal{A},\mathcal{B} \in LR(X)$

$$D(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}D(\mathcal{B}), \qquad Im\ \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}(Im\ \mathcal{A}).$$

Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является *графиком* многозначного отображения $\widetilde{\mathcal{A}} : D(\widetilde{\mathcal{A}}) \subset X \to 2^X$, где $D(\widetilde{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A})$ и $\widetilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in D(\mathcal{A})$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(X)$ линейных замкнутых операторов можно считать включенным в $LR(X)$, и, следовательно, $End\ X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Ниже предполагается, что $dim\ \mathcal{A}\mathbf{0} \geqslant 1$, т. е. $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, причем $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \neq X \times X$. Запись $(x,y) \in \mathcal{A}$ здесь всегда означает, что $y \in \mathcal{A}x$ при $x \in D(\mathcal{A})$, и $y = \mathcal{A}x + y_0$, $\forall y_0 \in \mathcal{A}\mathbf{0}$. Иными словами, равенство $y = \mathcal{A}x$, $x \in D(\mathcal{A})$ понимается с точностью до произвольного вектора из подпространства $\mathcal{A}\mathbf{0}$.

В дополнение к результатам из [5, 6] подчеркнем, что важную роль в дальнейшем играют ненулевые векторы $x \in D(\mathcal{A})$, не входящие в $Ker\ \mathcal{A}$, которым отвечает равенство $y = \mathcal{A}x + y_0$ с $y_0 = \mathbf{0}$. Эту часть области определения назовем *сердцевиной* отношения $\mathcal{A}$ (см. определение 1.2). Кроме того, справедлива

Лемма 1.2. Для любых $\mathcal{A},\mathcal{B} \in LR(X)$

$$Ker\ \mathcal{B}\mathcal{A} = Ker\ \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}(Ker\ \widehat{\mathcal{B}}), \tag{1.2}$$

где $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \upharpoonright D(\mathcal{A}^{-1})$– сужение отношения $\mathcal{B}$ на подпространство $D(\mathcal{A}^{-1})$.

Лемма 1.3. Для любых $\mathcal{A},\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

◀ Действительно, $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\mathbf{0}) = \{(\mathbf{0},z) \in X \times X \mid \exists\, u \in Im\ \mathcal{A}$ такой, что $(\mathbf{0},u) \in \mathcal{A}$ и $(z,u) \in \mathcal{A}\} = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{0}) = \{(\mathbf{0},z) \in X \times X \mid \exists\, v \in D(\mathcal{A})$ такой, что $(v,\mathbf{0}) \in \mathcal{A}$ и $(v,z) \in \mathcal{A}\} = \mathbf{0}$. ▶

Условимся употреблять обычные (нерукописные) буквы во всех случаях, когда отношение является оператором, и рукописные буквы, когда отношение перестает быть оператором.

Следствие 1.1. Для любых $\mathcal{A},\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$

$$(\mathcal{A}^{-1})^i(\mathcal{A}^i\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{A}^i((\mathcal{A}^{-1})^i\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1.3^i}$$

Рассмотрим важный *частный* случай, когда $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, $A^{-1} \in End\ X$ и $Ker\ A^{-1} = \mathcal{A}\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$. Так как $A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, то $Ker\ \mathcal{A} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $A^{-1}(\mathcal{A}\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, однако $\mathcal{A}(A^{-1}\mathbf{0}) = \mathcal{A}\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$. В то же время образ $Im\ A^{-1}$ необратимого во всем пространстве X оператора A^{-1} имеет в X некоторое прямое дополнение $Coker\ A^{-1} \neq \mathbf{0}$, выбор которого неоднозначен. Для выполнения второго равенства в (1.3) представляется естественным считать, что оператор $A^{-1} \in End\ X$ является отношением $\mathcal{A}^{-1}$

и что $Ker\ \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{0} = Coker\ A^{-1}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, и, кроме того, справедливы соотношения $Im\ \mathcal{A}^{-1} \cap \mathcal{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $D(\mathcal{A}) \cap Ker\ \mathcal{A} = \mathbf{0}$.

Определение 1.1. Ядром отношения $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ в случае, когда $A^{-1} \in End\ X$, $Ker\ A^{-1} = \mathcal{A}\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$, назовем нетривиальное подпространство $Ker\ \mathcal{A}$, характеризующееся соотношениями

$$Ker\ \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{0} = Coker\ A^{-1}, \qquad D(\mathcal{A}) \cap Ker\ \mathcal{A} = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

Оператор $B \in End\ X$ называется *перестановочным с отношением* $\mathcal{A} \in LR(X)$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$, $\forall (x,y) \in \mathcal{A}$.

Замечание 1.1. Импликация $(x,y) \in \mathcal{A} \Longrightarrow (Bx, By) \in \mathcal{A}$ означает, что $Im\ B \subseteq D(\mathcal{A})$ и $B\mathcal{A} \subset \mathcal{A}B$ на $D(\mathcal{A})$.

Пара линейных подпространств $(X_0, Y_0) \subset X \times Y$ называется *инвариантной* относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(X,Y)$, если $\mathcal{A}x_0 \cap Y_0 \neq \mathbf{0}$, $\forall x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap X_0$. Пара линейных подпространств $(Z_0, Z_1) \subset X \times X$ называется *инвариантной* относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, если $\mathcal{A}z_0 \cap Z_1 \neq \mathbf{0}$, $\forall z_0 \in D(\mathcal{A}) \cap Z_0$. Линейное подпространство $X_0 \subset X$ называется *инвариантным* относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, если $\mathcal{A}x_0 \cap X_0 \neq \mathbf{0}$, $\forall x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap X_0$.

Сужением отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ на инвариантное подпространство X_0 называется линейное отношение вида $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (X_0 \times X_0) \in LR(X)$. Для него будет использоваться обозначение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \restriction X_0$.

При описании подпространств $D(\mathcal{A})$, $Im\ \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \subset X \times X$, важно иметь в виду, что $\mathbf{0}$ принадлежит обоим множествам, справедливы равенства (1.1), (1.3), полный прообраз отношения $\mathcal{A}$ (область определения $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ в расширенном смысле) содержит $Ker\ \mathcal{A}$, а в полный прообраз отношения $\mathcal{A}^{-1}$ входит $\mathcal{A}\mathbf{0}$. При этом линейное подпространство $Ker\ \mathcal{A}$ не является инвариантным относительно отношения $\mathcal{A}$, поскольку $\mathcal{A}x_0 \cap Ker\ \mathcal{A} = \mathbf{0}$, $\forall x_0 \in \widetilde{D(\mathcal{A})} \cap Ker\ \mathcal{A}$. Точно так же линейное подпространство $\mathcal{A}\mathbf{0}$ не является инвариантным относительно отношения $\mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, для построения инвариантных относительно отношения $\mathcal{A}$ замкнутых подпространств $\mathcal{A}^m\mathbf{0}$, $D(\mathcal{A}^m)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ условимся считать, что всегда

$$D_{co}(\mathcal{A}) \cap Ker\ \mathcal{A} = \mathbf{0}, \qquad Im_{co}\ \mathcal{A} \cap \mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

(сравни с (1.4)). Используемое здесь обозначение характеризует *существенную* область определения $D_{co}(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$, или его *сердцевину (core)*, а также *существенный* образ $Im_{co}\ \mathcal{A}$, совпадающий с сердцевиной отношения $\mathcal{A}^{-1}$. Ниже фигурируют именно такие множества, однако иногда они будут обозначаться обычным образом. В полном согласии с определением 1.1 введем следующее

Определение 1.2. Областью определения и образом отношения $\mathcal{A}^i \in LR(X) \setminus LO(X)$ будем называть такие множества $D(\mathcal{A}^i) = D_{co}(\mathcal{A}^i)$,

$Im\ \mathcal{A}^i = Im_{co}\ \mathcal{A}^i$, что

$$D_{co}(\mathcal{A}^i) \cap Ker\ \mathcal{A}^i = \mathbf{0}, \qquad Im_{co}\ \mathcal{A}^i \cap \mathcal{A}^i\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1.5^i}$$

Отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X)$ назовем *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in End\ X$, $Ker\ \mathcal{A} = \mathbf{0}$ и $Im\ \mathcal{A} = X$. *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых отношение $\mathcal{A} - \lambda I$ непрерывно обратимо. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ замкнут.

Замечание 1.2. Для непрерывно обратимого отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеем $Im_{co}\ \mathcal{A} = X$, и, вообще говоря, $D_{co}(\mathcal{A}) \neq X$.

Резольвентой отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется отображение

$$R(\ .\ ,\mathcal{A}) :\ \rho(\mathcal{A}) \to End\ X, \qquad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1},\ \ \lambda \in \rho(\mathcal{A}).$$

Расширенным спектром отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подмножество $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in End\ X$. Если $\mathcal{A} \notin End\ X$ (т. е. когда $D_{co}(\mathcal{A}) \neq X$ либо $\mathcal{A}\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$), то полагаем $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\widetilde{\rho}(\mathcal{A}) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называется *расширенным резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A}$.

Справедлива (см. [5, 6])

Теорема 1.1. Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то расширенный спектр $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ обратного к $\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ характеризуется соотношением

$$\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})\}.$$

Следствие 1.2. Для $\mathcal{A} \in LR(X)$ следующие условия эквивалентны:

$$1)\ \ \mathcal{A} \in End\ X; \qquad 2)\ \ \infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}); \qquad 3)\ \ 0 \notin \sigma(\mathcal{A}^{-1}).$$

Следствие 1.3. Для $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ равенство $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ имеет место точно тогда, когда оператор $A^{-1} \in End\ X$ квазинильпотентен.

Замечание 1.3. Теорема 1.1 в сочетании с равенствами (1.1) выражает свойство двойственности, которым связаны отношения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ из $LR(X)$.

Если $X = X_0 \oplus X_1$ – прямая сумма двух инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LR(X)$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \restriction X_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \restriction X_1$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ приводимо, является *прямой суммой отношений* $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Из [5, 6] известно, что если $\rho(\mathcal{A}) \neq \varnothing$ и в разложении $X = X_0 \oplus X_1$ подпространства X_0, X_1 инвариантны относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, то они инвариантны относительно $\mathcal{A}$, и тогда $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0) \cup \sigma(\mathcal{A}_1)$, причем $R(\lambda, \mathcal{A}_i) = R(\lambda, \mathcal{A}) \restriction X_i$, $i = 0, 1$. В данной статье будут получены разложения исходных пространств X, Y в прямые суммы подпространств инвариантных относительно сингулярных линейных отношений.

В п. 3.1 будет построен обобщенный обратный оператор $H \in Hom\ (Y, X)$ к оператору $G \in Hom\ (X, Y)$, играющий роль резольвенты пары (F, G) в точке ∞ и обладающий в согласии с определением 1.1 следующими свойствами:

1) $Ker\ H = G\mathbf{0} = Coker\ G$;
2) $Coker\ H = H\mathbf{0} = Ker\ G$;
3) $(Gx, x) \in \mathcal{H}$, $\forall x \in X$, $(Hy, y) \in \mathcal{G}$, $\forall y \in Y$.

2. Линейные отношения, порожденные упорядоченной парой операторов (F, G), структура степеней их ядер и образов

2.1. Линейные отношения и последовательности подпространств. По данным ненулевым операторам $F \in LO(\mathcal{D}, Y)$ и $G \in Hom\ (X, Y)$ с $Ker\ G \neq \mathbf{0}$ построим левое и правое отношения

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{G}^{-1}F \subset X \times X, \qquad \mathcal{A}_r = F\mathcal{G}^{-1} \subset Y \times Y, \tag{2.1}$$

а также обратные к ним отношения

$$\mathcal{A}_l^{-1} = \mathcal{F}^{-1}G \subset X \times X, \qquad \mathcal{A}_r^{-1} = G\mathcal{F}^{-1} \subset Y \times Y. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. В несингулярном случае существование операторов F^{-1}, G^{-1} из $Hom\ (Y, X)$ означает, что $0 \in \rho(F, G)$, $\infty \in \widetilde{\rho}(F, G)$ и $R(0; F, G) = F^{-1}$, $R(\infty; F, G) = G^{-1}$, где $R(\lambda) = R(\lambda; F, G)$ – резольвента пары (F, G). И тогда отношения из (2.1), (2.2) являлись бы значениями левой и правой *вырожденных* псевдорезольвент $R_l = R(\lambda)G$, $R_r = GR(\lambda)$ пары (F, G) в точках $0, \infty$ соответственно:

$$A_l = R_l(\infty), \quad A_r = R_r(\infty), \quad A_l^{-1} = R_l(0), \quad A_r^{-1} = R_r(0).$$

Введем в рассмотрение основные подпространства $X_0 = \mathbf{0}$, $Y_0 = \mathbf{0}$, $X^{(0)} = X$, $Y^{(0)} = Y$,

$$X_i = \mathcal{A}_l^i\mathbf{0}, \quad Y_i = \mathcal{A}_r^i\mathbf{0}, \quad X^{(i)} = D_{co}(\mathcal{A}_l^i), \quad Y^{(i)} = D_{co}(\mathcal{A}_r^i), \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

а также вспомогательные подпространства $L_0 = \mathbf{0}$, $M_0 = \mathbf{0}$, $L^{(0)} = \mathcal{D}$, $M^{(0)} = Y$,

$$L_i = (\mathcal{A}_l^{-1})^i\mathbf{0}, \ M_i = (\mathcal{A}_r^{-1})^i\mathbf{0}, \ L^{(i)} = Im_{co}\ \mathcal{A}_l^i, \ M^{(i)} = Im_{co}\ \mathcal{A}_r^i, \ i \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

В частности, $Ker\ G = X_1$, $Coker\ G = M_1$, $D_{co}(G) = L^{(1)}$, $Im_{co}\ G = Y^{(1)}$.

Замечание 2.2. Даже при отсутствии информации об обратимости операторов F, G последовательности в (2.3), (2.4) с нижними индексами, являясь ядрами отношений $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{-1}$, расширяются; последовательности с верхними индексами, являясь сердцевинами отношений $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{-1}$ (см. определение 1.2), сужаются.

Замечание 2.3. Аналоги последовательностей (2.3) для пары операторов изучались в [7, гл. 4, § 5, п. 5] (см. также [8, 9]).

Согласно определению 1.2 получаем, что

$$X^{(i)} \cap L_i = \mathbf{0}, \quad L^{(i)} \cap X_i = \mathbf{0}, \quad Y^{(i)} \cap M_i = \mathbf{0}, \quad M^{(i)} \cap Y_i = \mathbf{0}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Следствие 1.1 влечет соотношения

$$(A_l^{-1})^i X_i = \mathbf{0}, \quad A_l^i L_i = \mathbf{0}, \quad (A_r^{-1})^i Y_i = \mathbf{0}, \quad A_r^i M_i = \mathbf{0}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

2.2. **Жордановы цепочки, отвечающие точке $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$.** Напомним (см. [4]), что если $\infty \in \sigma_p(F, G)$, или $0 \in \sigma_p(G, F)$ и k – длина жордановой цепочки, то в $\mathcal{D}$ существуют ненулевые векторы $u_0, u_1, ..., u_{k-1}$ такие, что

$$Gu_0 = \mathbf{0}, \quad Fu_{i-1} = Gu_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

При этом уравнение $Fu_{k-1} = Gu_k$ неразрешимо, когда ненулевой вектор $Fu_{k-1} \notin Im\ G$. Если в качестве $Coker\ G = G\mathbf{0}$ выбрать подпространство FL_1, где L_1 – линейная оболочка всех последних присоединенных элементов, то $Fu_{k-1} \notin Im\ G$ и $u_k = \mathbf{0}$.

По аналогии с [10, гл. 3, § 2, п. 3] рассмотрим включение $(u, v) \in \mathcal{A}_l - \lambda I$ и введем грубую классификацию точек $\lambda \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$ в зависимости от нарушения одного из свойств его однозначной, корректной или плотной разрешимости.

Точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{A}_l)$ отношения $\mathcal{A}_l$ содержит такие значения $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}$, для которых $Ker\ (\mathcal{A}_l - \lambda I) \neq \mathbf{0}$.

Непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{A}_l)$ отношения $\mathcal{A}_l$ включает такие $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}$, что $\lambda \notin \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, $Im\ (\mathcal{A}_l - \lambda I) \neq X$, $\overline{Im\ (\mathcal{A}_l - \lambda I)} = X$.

Остаточный спектр $\sigma_r(\mathcal{A}_l)$ отношения $\mathcal{A}_l$ содержит $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}$, для которых $\lambda \notin \sigma_p(\mathcal{A}_l)$ и $\overline{Im\ (\mathcal{A}_l - \lambda I)} \neq X$.

По условию $Ker\ G \neq \mathbf{0}$, поэтому $Ker\ \mathcal{A}_l^{-1} \neq \mathbf{0}$ и $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. Введем множества ненулевых векторов вида

$$X_{i,j} = X_i \setminus X_j, \ 0 \leqslant j < i; \quad X^{(i,j)} = X^{(i)} \setminus X^{(j)}, \ 0 \leqslant i < j. \tag{2.7}$$

Определение 2.1. Любой вектор x_0 из $X_{1,0} \subset X_1 \subset X$, удовлетворяющий соотношению $(\mathbf{0}, x_0) \in \mathcal{A}_l$, называется *собственным* вектором отношения $\mathcal{A}_l \in LR(X)$, отвечающим собственному значению $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. Ненулевой вектор x_i, удовлетворяющий соотношению $(x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{A}_l$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, называется *присоединенным* к x_0 вектором порядка i. Вектор $x_i \in X_{i+1,i}$, поэтому его называют также корневым вектором высоты $i+1$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Будем говорить, что векторы $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ составляют жорданову цепочку длины k, отвечающую собственному значению $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, если отсутствует ненулевой вектор x такой, что $(x_{k-1}, x) \in \mathcal{A}_l$, и, следовательно, $x = \mathbf{0}$ и $x_{k-1} \in X_{k,k-1} \cap Ker\ \mathcal{A}_l = X_{k,k-1} \cap L_1$.

Замечание 2.4. Если имеется жорданова цепочка длины k, отвечающая собственному значению $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, то множество $X_{k,\ k-1} \ \cap\ L_1$, а вместе с ним и подпространство L_1 не входят в $X^{(1)} = D(\mathcal{A}_l)$, что согласуется с (2.6).

Из определения 2.1 следует, что подпространство X_k (вообще говоря, незамкнутое) состоит из корневых векторов отношения $\mathcal{A}_l$, отвечающих точке $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, высоты, не превосходящей k. В то же время X_k замкнуто, когда оно оказывается ядром некоторой степени замкнутого оператора.

Из определений подпространств X_k, $X^{(k)}$ вытекает, что

α) $x \in X_{k,0}$, если существуют такие $x_i \in X_{i,i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, что

$$(\mathbf{0}, x_1) \in \mathcal{A}_l, \quad (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{A}_l, \quad 2 \leqslant i \leqslant k-1, \quad (x_{k-1}, x) \in \mathcal{A}_l;$$

β) $x \in X^{(k)} \setminus \mathbf{0}$, если существуют такие $x^{(0)} \in X$, $x^{(i)} \in X^{(i)} \setminus \mathbf{0}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, что

$$(x^{(i+1)}, x^{(i)}) \in \mathcal{A}_l, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \quad (x, x^{(k-1)}) \in \mathcal{A}_l.$$

Замечание 2.5. Если вектор $x \in X_{k,0}$ типа α) является последним присоединенным элементом в жордановой цепочке длины k, то $x \in X_{k,k-1} \ \cap\ L_1$. Произвольный вектор $x^{(0)} \in X$ типа β) может при необходимости играть роль параметра. В частности, это позволяет добиваться совпадения цепочек α), β) при $x^{(0)} = \mathbf{0}$, $x^{(i)} = x_{k+1-i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Замечание 2.6. Пусть $k = 1$. Тогда $x \in X_{1,0}$ при $(\mathbf{0}, x) \in \mathcal{A}_l$. Если цепочка непродолжима, то $Ker\ \mathcal{A}_l = \mathcal{A}_l\mathbf{0}$, или $L_1 = X_1$. В то же время $x \in X^{(1)} \setminus \mathbf{0}$, когда существует $x^{(0)} \in X$ такой, что $(x, x^{(0)}) \in \mathcal{A}_l$.

Поскольку $\infty \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$ точно тогда, когда $0 \in \sigma(\mathcal{A}_l^{-1})$, то имеет место

Лемма 2.1. Отношение $\mathcal{A}_l \in LR(X) \setminus LO(X)$ имеет конечную жорданову цепочку $x_0, ..., x_{k-1}$ длины k, отвечающую точке $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, точно тогда, когда отношение $\mathcal{A}_l^{-1} \in LR(X) \setminus LO(X)$ имеет ту же жорданову цепочку $x_{k-1}, ..., x_0$ длины k, отвечающую точке $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l^{-1})$.

Так как по условию $Coker\ G \neq \mathbf{0}$, то $Ker\ \mathcal{A}_l = Ker\ F \cup F^{-1}(Ker\ G^{-1}) = Ker\ F \cup F^{-1}(Coker\ G) \neq \mathbf{0}$ и $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. На основании двойственности введем множества ненулевых векторов

$$L_{i,j} = L_i \setminus L_j, \ \ 0 \leqslant j < i; \quad L^{(i,j)} = L^{(i)} \setminus L^{(j)}, \ \ 0 \leqslant i < j, \tag{2.8}$$

а также

Определение 2.2. Любой вектор z_0 из $L_{1,0} \subset L_1 \subset X$, удовлетворяющий соотношению $(z_0, \mathbf{0}) \in \mathcal{A}_l$, называется *собственным* вектором отношения $\mathcal{A}_l \in LR(X)$, отвечающим собственному значению $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. Вектор z_i из $L_{i+1,i}$, удовлетворяющий соотношению $(z_i, z_{i-1}) \in \mathcal{A}_l$, называется *присоединенным* к x_0 вектором порядка i, или корневым вектором высоты $i+1$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Векторы

$z_0, \ldots, z_{k-1}$ составляют жорданову цепочку длины k, отвечающую собственному значению $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, если отсутствует ненулевой вектор z такой, что $(z, z_{k-1}) \in \mathcal{A}_l$, и, значит, $z = \mathbf{0}$, $z_{k-1} \in L_{k,\, k-1} \cap X_1$.

По аналогии с α), β) получаем, что

α') $z \in L_{k,0}$, если существуют такие $z_i \in L_{i,i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, что

$$(z_1, \mathbf{0}) \in \mathcal{A}_l, \quad (z_i, z_{i-1}) \in \mathcal{A}_l, \quad 2 \leqslant i \leqslant k-1, \quad (z, z_{k-1}) \in \mathcal{A}_l;$$

β') $z \in L^{(k)} \setminus \mathbf{0}$, если существуют такие $z^{(0)} \in X$, $z^{(i)} \in L^{(i)} \setminus \mathbf{0}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, что

$$(z^{(i)}, z^{(i+1)}) \in \mathcal{A}_l, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \quad (z^{(k-1)}, z) \in \mathcal{A}_l,$$

причем справедливы утверждения двойственные замечаниям 2.5, 2.6.

2.3. **Основные предположения.** Напомним, что точки $0, \infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. Будем говорить, что для подпространств (2.3) выполнено условие стабилизации порядка m, $m \geqslant 1$, если существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{0} \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{m-1} \subset X_m = X_{m+1}, \tag{2.9}$$

$$Y^{(m+1)} = Y^{(m)} \subset Y^{(m-1)} \subset \ldots \subset Y^{(1)} \subset Y \tag{2.10}$$

(включения строгие).

Предположение 2.1. Для подпространств (2.3) выполнено условие стабилизации порядка m, $m \geqslant 1$.

При $m = 0$ существует оператор $G^{-1} \in Hom\,(Y, X)$, а оператор F, вообще говоря, необратим. Если $m = 1$, то $X_1 = Ker\ G = X_2 \neq \mathbf{0}$, $Y \supset Y^{(1)} = Im\ G = Y^{(2)}$.

Пусть $m > 1$. Напомним, что в данной статье всегда $X_1 \neq \mathbf{0}$, $Y_1 \neq \mathbf{0}$, т. е. отношения $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_r$ не являются операторами. Введем в рассмотрение сужения F_m, G_m операторов F, G на подпространство X_m, а также сужения $(\mathcal{F}^{-1})^{(m)}$, $(\mathcal{G}^{-1})^{(m)}$ отношений $\mathcal{F}^{-1}, \mathcal{G}^{-1}$ на подпространство $Y^{(m)}$. Сужения отношений $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_l^{-1}$ на X_m, а также сужения отношений $\mathcal{A}_r$, $\mathcal{A}_r^{-1}$ на $Y^{(m)}$ снабдим соответствующими индексами.

Предположение 2.2. Существует $(A_l^{-1})_m \in LO(X_m)$.

Предположение 2.2 означает, что $Ker\ F \cap X_m = \mathbf{0}$, т. е. сужение F_m замкнутого оператора F на подпространство X_m обратимо и $Ker\ F = Ker\ F^{(m)}$.

Из (2.5) при $i = m$ получим, что $D_{co}(\mathcal{A}_l^m) \cap Ker\ \mathcal{A}_l^m = X^{(m)} \cap L_m = \mathbf{0}$, и составим прямую сумму

$$L_m \oplus \overline{X^{(m)}} = \widetilde{X},$$

где черта над множеством означает его замыкание.

Предположение 2.3. $\widetilde{X} = X$.

В условиях предположений 2.1–2.3 изучим более подробно структуру и свойства подпространств (2.3) с помощью подпространств (2.4).

2.4. **Структура подпространств** X_m, L_m. Обозначим через $X_{1,k,0}$, $L_{1,k,0}$ подпространство собственных векторов отношения $\mathcal{A}_l \in LR(X)$, отвечающих собственному значению $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$ соответственно, с длинами жордановых цепочек равными p_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, где

$$0 = p_{n+1} < p_n < p_{n-1} < \ldots < p_2 < p_1 = m, \qquad 1 \leqslant n \leqslant m. \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда

- сужения отношений $(\mathcal{A}_l^{-1})_m^j \restriction L_{1,0}$, $(\mathcal{A}_l)_m^j \restriction X_{1,0}$, $0 \leqslant j \leqslant m$ являются операторами, причем

$$(A_l)_m^{p_k} X_{1,k,0} = \mathbf{0}, \qquad (A_l^{-1})_m^{p_k} L_{1,k,0} = \mathbf{0}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

  в частности,

$$(A_l)_m^m X_{1,0} = \mathbf{0}, \qquad (A_l^{-1})_m^m L_{1,0} = \mathbf{0}; \tag{2.12$_X$}$$

$$X_{1,0} = \oplus_{k=1}^n (A_l^{-1})_m^{p_k-1} L_{1,k,0}, \qquad L_{1,0} = \oplus_{k=1}^n (A_l)_m^{p_k-1} X_{1,k,0},$$

$$X_{i,0} = \oplus_{j=0}^{i-1} (A_l)_m^j X_{1,0}, \qquad L_{i,0} = \oplus_{j=0}^{i-1} (A_l^{-1})_m^j L_{1,0}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m;$$

- существует $A_r^{(m)} \in LO(Y^{(m)})$, и оператор $(G^{-1})^{(m)}$, определенный на подпространстве $Y^{(m)}$, непрерывен;
- сердцевиной оператора $(A_r^m)^{(m)}$ служит подпространство $Y^{(m)}$;
- отношения $\mathcal{A}_l^{(m)}$, $\mathcal{A}_r^{(m)}$ являются подобными замкнутыми операторами, и $G^{(m)} A_l^{(m)} = A_r^{(m)} G^{(m)} = F^{(m)}$;
- справедливы соотношения

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} \subset X^{(m-1)} \subset \ldots \subset X^{(1)} \subset X \tag{2.13}$$

  (включения строгие), причем $X^{(m)}$ – сердцевина оператора $(A_l^m)^{(m)}$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Тогда, наряду с утверждениями теоремы 2.1,

- отношения $(\mathcal{A}_l^{-1})_m$, $(\mathcal{A}_r^{-1})_m$ являются подобными ограниченными нильпотентными операторами степени m, т. е. $(A_l^{-1})^{m-1} \neq 0$, $(A_l^{-1})^m = 0$, $(A_r^{-1})^{m-1} \neq 0$, $(A_r^{-1})^m = 0$, $F_m (A_l^{-1})_m = (A_r^{-1})_m F_m = G_m$;
- справедливы соотношения

$$\mathbf{0} \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_{m-1} \subset Y_m = Y_{m+1}. \tag{2.14}$$

Структуру подпространств X_m, L_m иллюстрируют диаграммы

$(A_l)_m^{m-1} X_{1,0}$
$(A_l)_m^{m-2} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l)_m^{p_2} X_{1,0}$
$(A_l)_m^{p_2-1} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l)_m^{p_3} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l)_m^{p_{n-1}-1} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l)_m^{p_n} X_{1,0}$
$(A_l)_m^{p_n-1} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l)_m X_{1,0}$
$X_{1,0} = (\mathcal{A}_l)_m \mathbf{0} \setminus \mathbf{0}$

Рис. 1.а

$L_{1,0} = (\mathcal{A}_l^{-1})_m \mathbf{0} \setminus \mathbf{0}$
$(A_l^{-1})_m L_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{p_n-1} L_{1,0}$
$(A_l^{-1})_m^{p_n} L_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{p_{n-1}-1} L_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{p_3} L_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{p_2-1} L_{1,0}$
$(A_l^{-1})_m^{p_2} L_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{m-2} L_{1,0}$
$(A_l^{-1})_m^{m-1} L_{1,0}$

Рис. 1.б

Как видно из рис. 1.а, 1.б, подпространства $X_{m,0}$ и $L_{m,0}$ при $m > 1$ получаются друг из друга переобозначениями и перегруппировкой элементов. При этом пара линейных подпространств $(L_{m,1}, X_{m,1})$ является инвариантной относительно отношения $\mathcal{A}_l$, так как $\mathcal{A}_l x \cap X_{m,1} \neq \mathbf{0}$, $\forall x \in D_{co}(\mathcal{A}_l) \cap L_{m,1}$. Подпространство X_m характеризуется эквивалентными соотношениями $\infty \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$, или $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l^{-1})$. Его перестройка приводит к формированию из тех же элементов подпространства L_m, характеризующегося соотношением $0 \in \sigma_p(\mathcal{A}_l)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.3. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ имеет место равенство $X_m = L_m$.

Замечание 2.7. Если $m > 1$ и $p_n = 1$, то $X_{1,0} \cap L_{1,0} = X_{1,n,0} = L_{1,n,0} \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 1$, или $p_1 = p_n = m$. Тогда все длины жордановых цепочек одинаковы и равны m, $m \geqslant 1$. Диаграмма принимает следующий вид:

$L_{1,0} = (A_l)_m^{m-1} X_{1,0}$
$(A_l^{-1})_m L_{1,0} = (A_l)_m^{m-2} X_{1,0}$
$\dots$
$(A_l^{-1})_m^{m-2} L_{1,0} = (A_l)_m X_{1,0}$
$(A_l^{-1})_m^{m-1} L_{1,0} = X_{1,0}$

Рис. 2

Здесь $(A_l^{-1})_m^j L_{1,0} = (A_l)_m^{m-1-j} X_{1,0}$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$; $X_{m,0} = \oplus_{j=0}^{m-1} (A_l)_m^j X_{1,0}$, $L_{m,0} = \oplus_{j=0}^{m-1} (A_l^{-1})_m^j L_{1,0}$.

Замечание 2.8. В условиях предположений 2.1–2.3 справедливы формулы и диаграммы, связывающие подпространства Y_m, M_m в пространстве Y. Для их записи следует в обозначениях операторов заменить нижний индекс l на r.

Замечание 2.9. При $m = 1$ получаем равенства $X_{1,0} = L_{1,0}$, $Y_{1,0} = M_{1,0}$. В общем случае, когда $1 < n \leqslant m$, к сожалению, невозможно получить простую формулу, выражающую связь между подпространствами без обращения к их клеточной структуре. Условие дополняемости подпространств в нашем исследовании носит лишь *вспомогательный* характер и используется для удобства обозначений и иллюстрации проводимых рассуждений.

Лемма 2.2. В условиях предположений 2.1–2.3 подпространства X_m, L_m замкнуты.

◀ Из (2.6) находим, что $X_m = Ker\ (A_l^{-1})_m^m$, где $(A_l^{-1})_m^m \in LO(X_m)$, $L_m = Ker\ (A_l)_m^m$, где $(A_l)_m^m \in LO(L_m)$. ▶

2.5. **Структура подпространств** $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Непосредственно из определений (см. (1.1), (2.3)) получаем следующее утверждение:

Лемма 2.3. Справедливы равенства

$$X^{(i)} = \mathcal{A}_l^{-1} X^{(i-1)}, \qquad Y^{(i)} = \mathcal{A}_r^{-1} Y^{(i-1)}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant m. \tag{2.15}$$

Замечание 2.10. Оба отношения $\mathcal{A}_l^{-1}$, $\mathcal{A}_r^{-1}$ в (2.15) действуют как операторы только при условии существования $F^{-1} \in LO(Y, X)$.

Лемма 2.4. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ справедливы соотношения

$$X^{(i)} = X^{(m)} \oplus \oplus_{j=i}^{m-1} (A_l^{-1})_m^j L_{1,0}, \qquad L^{(i)} = L^{(m)} \oplus \oplus_{j=i}^{m-1} (A_l)_m^j X_{1,0}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant m. \tag*{(2.16)$_X$}$$

Следствие 2.1. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$

$$X^{(m-1)} = X^{(m)} \oplus X_{1,1,0}, \qquad L^{(m-1)} = L^{(m)} \oplus L_{1,1,0}, \tag*{(2.17)$_X$}$$

и, значит,

$$X_{m-1,0} \cap (X^{(m-1)} \setminus \mathbf{0}) = X_{1,1,0} \neq \mathbf{0}, \qquad L_{m-1,0} \cap (L^{(m-1)} \setminus \mathbf{0}) = L_{1,1,0} \neq \mathbf{0}.$$

Замечание 2.11. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ справедливы аналогичные формулы в пространстве Y :

$$Y^{(i)} = Y^{(m)} \oplus \oplus_{j=i}^{m-1} (A_r^{-1})_m^j M_{1,0}, \quad M^{(i)} = M^{(m)} \oplus \oplus_{j=i}^{m-1} (A_r)_m^j Y_{1,0}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m, \tag*{(2.16)$_Y$}$$

и, кроме того,

$$Y_{m-1,0} \cap (Y^{(m-1)} \setminus \mathbf{0}) = Y_{1,1,0} \neq \mathbf{0}, \qquad M_{m-1,0} \cap (M^{(m-1)} \setminus \mathbf{0}) = M_{1,1,0} \neq \mathbf{0}. \tag*{(2.17)$_Y$}$$

Сужения отношений $(\mathcal{A}_r^{-1})_m^j \restriction M_{1,0}$, $(\mathcal{A}_r)_m^j \restriction Y_{1,0}$, $0 \leqslant j \leqslant m$ являются операторами, причем

$$(A_r)_m^{p_k} Y_{1,k.0} = \mathbf{0}, \qquad (A_r^{-1})_m^{p_k} M_{1,k,0} = \mathbf{0}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

в частности,

$$(A_r)_m^m Y_{1,0} = \mathbf{0}, \qquad (A_r^{-1})_m^m M_{1,0} = \mathbf{0}. \tag{2.12$_Y$}$$

Лемма 2.5. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ справедливо соотношение $X/L_m = X^{(m)}$.

◄ Пусть $v \in X/L_m$. Тогда $x - v \in L_m$, $\forall x \in X$. Так как $L_m = (\mathcal{A}_l^{-1})^m \mathbf{0}$, то $(x - v, \mathbf{0}) \in \mathcal{A}_l^m$. Это означает, что выбрав произвольное $x^{(0)} \in X$ так, что $(x, x^{(0)}) \in \mathcal{A}_l^m$, придем к включению $(v, x^{(0)}) \in \mathcal{A}_l^m$. Если положить $x^{(i)} \in (\mathcal{A}_l^{-1})^{m-i} v$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то получим цепочку $(x^{(i+1)}, x^{(i)}) \in \mathcal{A}_l^{-1}$,
$0 \leqslant i \leqslant m-1$ включений типа β'), в частности, $v = x^{(m)} \in X^{(m)}$. Обратно, пусть $v \in X^{(m)}$. Согласно прямому разложению $X = L_m \oplus \overline{X^{(m)}}$ имеем $x' - v \in L_m$, $\forall\, x' \in X$. Значит, $v \in X/L_m$. ►

Следствие 2.2. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ подпространство $X^{(m)}$ замкнуто.

◄ По лемме 2.2 подпространство L_m замкнуто. Тогда фактор-пространство X/L_m с нормой $\|Z\| = \inf\limits_{x \in Z} \|x\|$ является полным для любого класса смежности $Z \in X/L_m$ (см., например, [11, гл. 1, § 3, теорема 1.12.2]. Отсюда и из леммы 2.5 вытекает, что подпространство $X^{(m)}$ замкнуто. ►

Замечание 2.12. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ справедливы аналогичные утверждения в пространстве Y, а именно: имеет место равенство $Y/M_m = Y^{(m)}$ и подпространство $Y^{(m)}$ замкнуто.

Прямые разложения $X = L_m \oplus \overline{X^{(m)}}$, $Y = M_m \oplus \overline{Y^{(m)}}$, равенства $L_m = X_m$, $M_m = Y_m$ и следствие 2.2 с учетом замечаний 2.8, 2.12 позволяют сформулировать следующий результат:

Теорема 2.4. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Тогда $L_m = X_m$, $M_m = Y_m$, и имеют место прямые разложения

$$X = X_m \oplus X^{(m)}, \qquad Y = Y_m \oplus Y^{(m)}, \tag{2.18}$$

причем все подпространства в правых частях (2.18) являются замкнутыми.

Замечание 2.13. Если выполнены предположения 2.1–2.3 при $m > 1$, то для всех $1 \leqslant i \leqslant m-1$ имеем $L_i \neq X_i$, $M_i \neq Y_i$.

2.6. **Инвариантность подпространств.** Приводимость пары операторов (F, G) относительно прямых разложений (2.18) вытекает из следующих утверждений:

Лемма 2.6. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3 с $m > 1$. Тогда справедливы соотношения

$$F_m^{-1}(A_r^{-1})_m^i = (A_l^{-1})_m^i F_m^{-1}, \quad (G^{-1})^{(m)}(A_r^i)^{(m)} = (A_l^i)^{(m)}(G^{-1})^{(m)},$$

$$F_m(\mathcal{A}_l^i)_m = (\mathcal{A}_r^i)_m F_m, \quad G^{(m)}((\mathcal{A}_l^{-1})^i)^{(m)} = ((\mathcal{A}_r^{-1})^i)^{(m)} G^{(m)}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m;$$

$$G^{(m)} A_l^{(m)} = A_r^{(m)} G^{(m)} = F^{(m)}, \qquad F_m(A_l^{-1})_m = (A_r^{-1})_m F_m = G_m. \tag{2.19}$$

Лемма 2.7. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3, $Ker\ G = Ker\ G_m$ $\neq \mathbf{0}$ и пусть существует $F^{-1} \in LO(Y, X)$. Тогда в дополнение к (2.19) справедливы соотношения

$$(F^{-1})^{(m)} A_r^{(m)} = A_l^{(m)} (F^{-1})^{(m)} = (G^{-1})^{(m)},$$

$$(G^{-1})^{(m)} (A_r^{-1})^{(m)} = (A_l^{-1})^{(m)} (G^{-1})^{(m)} = (F^{-1})^{(m)};$$

$$F^{-1}(A_r^{-1})^i = (A_l^{-1})^i F^{-1}, \quad F\mathcal{A}_l^i = \mathcal{A}_r^i F, \quad 0 \leqslant i \leqslant m;$$

$$FA_l^{-1} = A_r^{-1} F = G. \tag{2.20}$$

Следствие 2.3. Равенство $A_r^{-1}F = G$ из (2.20) с учетом определения 1.1 дает $A_r^{-1}F\mathbf{0} = G\mathbf{0} = Coker\ G$. В то же время $\mathcal{A}_r^{-1}F\mathbf{0} = \mathcal{A}_r^{-1}\mathbf{0}$, значит, $Coker\ G = \mathcal{A}_r^{-1}\mathbf{0}$.

Лемма 2.8. Если выполнены предположения 2.1–2.3, то действия операторов F, G на подпространствах (2.3) характеризуются следующими соотношениями:

$$F_m X_m = Y_m, \qquad G_m X_m \subset Y_m, \qquad F^{(m)} X^{(m)} \subset Y^{(m)}, \qquad G^{(m)} X^{(m)} = Y^{(m)}.$$

◄ В самом деле, в силу (2.3) при $i = m$ имеем

$$F_m X_m = F_m \mathcal{A}_l^m \mathbf{0} = \mathcal{A}_r^m F_m \mathbf{0} = Y_m,$$

$$G_m X_m = G_m \mathcal{A}_l^m \mathbf{0} \subset F_m \mathcal{A}_l^{m-1} \mathbf{0} = \mathcal{A}_r^{m-1} F_m \mathbf{0} = Y_{m-1} \subset Y_m,$$

$$G^{(m)} X^{(m)} = G^{(m)} (\mathcal{A}_l^{-1})^m X = (\mathcal{A}_r^{-1})^m G^{(m)} X = (\mathcal{A}_r^{-1})^{m+1} F^{(m)} X =$$
$$= Y^{(m+1)} = Y^{(m)},$$

$$F^{(m)} X^{(m)} \subset G^{(m)} (A_l^{-1})^{m-1} X = (A_r^{-1})^{m-1} G^{(m)} X = (A_r^{-1})^m F^{(m)} X = Y^{(m)}. \ ►$$

Теорема 2.5. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Тогда
• пары подпространств $(X_m,\ Y_m)$, $(X^{(m)},\ Y^{(m)})$ инвариантны относительно пары операторов (F, G), являющейся приводимой относительно прямых разложений (2.18) пространств $X,\ Y$, т. е. представимой в виде прямой суммы пар $(F_m,\ G_m)$, $(F^{(m)},\ G^{(m)})$;

• сужения отношений $(\mathcal{A}_l^{-1})_m = F_m^{-1}G_m$, $(\mathcal{A}_r^{-1})_m = G_mF_m^{-1}$, $\mathcal{A}_l^{(m)} = (G^{-1})^{(m)}F^{(m)}$, $\mathcal{A}_r^{(m)} = F^{(m)}(G^{-1})^{(m)}$ являются операторами, и их действия на подпространствах (2.3) характеризуются включениями

$$(\mathcal{A}_l^{-1})_m X_m \subset X_m, \ (\mathcal{A}_r^{-1})_m Y_m \subset Y_m, \ \mathcal{A}_l^{(m)} X^{(m)} \subseteq X^{(m)}, \ \mathcal{A}_r^{(m)} Y^{(m)} \subseteq Y^{(m)};$$

• подпространства X_m, Y_m, $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ инвариантны относительно операторов $(\mathcal{A}_l^{-1})_m$, $(\mathcal{A}_r^{-1})_m$, $\mathcal{A}_l^{(m)}$, $\mathcal{A}_r^{(m)}$ соответственно, т. е. $(\mathcal{A}_l^{-1})_m \in End\ X_m$, $(\mathcal{A}_r^{-1})_m \in End\ Y_m$, $\mathcal{A}_l^{(m)} \in LO(X^{(m)})$, $\mathcal{A}_r^{(m)} \in LO(Y^{(m)})$.

Замечание 2.14. Согласно определению 1.2 единицами в алгебре $End\ X$ являются $\mathcal{A}_l\mathcal{A}_l^{-1}$, $\mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A}_l$. Если, к примеру, $\mathcal{A}_l^{-1} \in End\ X$, то $\mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A}_l X^{(1)} = X^{(1)}$. С другой стороны, $D(\mathcal{A}_l) \cap L_1 = \mathbf{0}$, однако, положив $\mathcal{A}_l^{-1}\mathbf{0} = Coker\ \mathcal{A}_l^{-1} = L_1$ (см. определение 1.1), находим, что $\mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A}_l L_1 = \mathcal{A}_l^{-1}\mathbf{0} = L_1$. Аналогично возникают единицы $\mathcal{A}_r\mathcal{A}_r^{-1}$, $\mathcal{A}_r^{-1}\mathcal{A}_r$ в алгебре $End\ Y$.

2.7. **Структура ядер отношений.** В силу (1.2) непосредственно из (2.1), (2.2) вытекает следующее утверждение:

Лемма 2.9. В условиях предположений 2.1–2.3 справедливы соотношения

$$\mathcal{A}_l\mathbf{0} = Ker\ G_m \ \oplus \ (G^{-1})^{(m)}(Ker\ (\mathcal{F}^{-1})^{(m)}),$$

$$\mathcal{A}_r\mathbf{0} = F_m(Ker\ G_m) \ \oplus \ Ker\ (\mathcal{F}^{-1})^{(m)},$$

$$\mathcal{A}_l^{-1}\mathbf{0} = F_m^{-1}(Ker\ \mathcal{G}_m^{-1}) \ \oplus \ Ker\ F^{(m)},$$

$$\mathcal{A}_r^{-1}\mathbf{0} = Ker\ \mathcal{G}_m^{-1} \ \oplus \ G^{(m)}(Ker\ F^{(m)}).$$

Следствие 2.4. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3, $Ker\ G = Ker\ G_m = X_1 \neq \mathbf{0}$ и существует $F^{-1} \in LO(Y, X)$. Тогда ядра всех отношений нетривиальны: $Ker\ \mathcal{A}_l^{-1} = Ker\ (\mathcal{A}_l^{-1})_m = X_1$, $Ker\ \mathcal{A}_r^{-1} = Ker\ (\mathcal{A}_r^{-1})_m = F_mX_1$, $Ker\ \mathcal{A}_l = Ker\ (\mathcal{A}_l)_m = F_m^{-1}(Ker\ \mathcal{G}_m^{-1}) = L_1$, $Ker\ \mathcal{A}_r = Ker\ (\mathcal{A}_r)_m = Ker\ \mathcal{G}_m^{-1} = Coker\ G_m = F_mL_1$.

3. Приводимость операторов $\overline{A}_l$, $\overline{A}_r$ и отношений

3.1. **Обобщенный обратный оператор** $H \in Hom\ (Y, X)$. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Построим обобщенный обратный оператор $H \in Hom\ (Y, X)$ к оператору $G \in Hom\ (X, Y)$ взамен отношения $\mathcal{G}^{-1} \in LR(Y, X)$.

В частном случае, когда $A_l^{-1} \in End\ X$, существует $F^{-1} \in Hom\ (Y, X)$ и тогда $A_l^{-1} = F^{-1}G \in End\ X$, $A_r^{-1} = GF^{-1} \in End\ Y$ – это соответственно левая и правая псевдорезольвента пары (F, G) в точке 0.

Если не существует $F^{-1} \in Hom\ (Y, X)$, то в наших предположениях тем не менее существуют $F_m^{-1} \in Hom\ (Y_m, X_m)$, $(G^{-1})^{(m)} \in Hom\ (Y^{(m)}, X^{(m)})$, а вместе с ними в силу теоремы Банаха существуют операторы $(A_l^{-1})_m \in End\ X_m$, $(A_r^{-1})_m \in End\ Y_m$, $A_l^{(m)} \in LO(X^{(m)})$, $A_r^{(m)} \in LO(Y^{(m)})$.

Оператор H из $Hom\ (Y, X)$, для которого 1) $Ker\ H = F_m L_1$;
2) $Coker\ H = X_1$; 3) $HGx = x$, $\forall x \in X \ominus X_1$, $GHy = y$, $\forall y \in Y \ominus F_m L_1$, по построению является обобщенным обратным оператором к $G \in Hom\ (X, Y)$, поскольку $X \ominus X_1 = X^{(m)} \oplus (X_m \ominus X_1)$, $Y \ominus F_m L_1 = Y^{(m)} \oplus (Y_m \ominus F_m L_1)$ и

1) $Ker\ H = G\mathbf{0} = Coker\ G = \mathcal{A}_r^{-1}\mathbf{0} = (\mathcal{A}_r^{-1})_m \mathbf{0} = F_m L_1$;

2) $Coker\ H = H\mathbf{0} = Ker\ G = \mathcal{A}_l \mathbf{0} = (\mathcal{A}_l)_m \mathbf{0} = X_1$;

3) $HGx = x$, $\forall x \in X^{(m)} \oplus (X_m \ominus X_1)$, $GHy = y$, $\forall y \in Y^{(m)} \oplus (Y_m \ominus F_m L_1)$.

Будем считать, что необратимые во всем пространстве ограниченные операторы G, H являются отношениями $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и положим

3′) $(\mathcal{G}x, x) \in \mathcal{H}$, $\forall x \in X$, $(\mathcal{H}y, y) \in \mathcal{G}$, $\forall y \in Y$.

Тогда $\mathcal{H}$ удовлетворяет всем требуемым свойствам, причем по аналогии с замечанием 2.14 имеем $\mathcal{H}\mathcal{G} = I \in End\ X$, $\mathcal{G}\mathcal{H} = I \in End\ Y$.

Замечание 3.1. В наших предположениях подпространства L_1 и X_1 являются изоморфными по построению. Если они к тому же конечномерны, то оператор H фредгольмов и $ind\ H = 0$.

Отметим несколько важных дополнительных свойств оператора H, который устанавливает связь между подпространствами $D_{co}\ (H) = Y^{(m)} \oplus (Y_m \ominus F_m L_1)$ и $Im_{co}\ H = (X^{(m)} \cap \mathcal{D}) \oplus (X_m \ominus X_1)$, а также описывает их структуру.

Лемма 3.1. В условиях предположений 2.1–2.3 с $m > 1$ операторы $A_l^{(m)} \in LO(X^{(m)})$, $A_r^{(m)} \in LO(Y^{(m)})$ допускают замкнутые расширения до операторов

$$\overline{A}_l = HF \in LO(\mathcal{D}, (X^{(m)} \cap \mathcal{D}) \oplus (X_m \ominus X_1)) \subset LO(\mathcal{D}),$$

$$\overline{A}_r = FH \in LO(Y, Y^{(m)} \oplus (Y_m \ominus F_m L_1)) \subset LO(Y).$$

Кроме того, пара линейных подпространств $(Y^{(m)}, X^{(m)})$ является инвариантной относительно обратимого оператора $H^{(m)} = (G^{-1})^{(m)} \in Hom\ (Y^{(m)}, X^{(m)})$, и справедливы соотношения $\overline{A}_l^{(m)} = A_l^{(m)}$, $\overline{A}_r^{(m)} = A_r^{(m)}$,

$$H^{(m)}\ Y^{(m)} = X^{(m)}, \qquad H_m(Y_m \ominus F_m L_1) = X_m \ominus X_1; \tag{3.1}$$

$$((\overline{A}_l)^{(m)})^i\ X^{(m)} \subseteq X^{(m)}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant m; \qquad (\overline{A}_l)_m^m\ X_m = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Следствие 3.1. В наших условиях $(\overline{A}_l)_m = (HF)_m$ является нильпотентным оператором индекса m, поскольку $(\overline{A}_l)_m^m = 0$, $(\overline{A}_l)_m^{m-1} \neq 0$.

3.2. **Основной результат.** Внесем уточнения в полученные прямые разложения (2.18).

Теорема 3.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3 с $m > 1$. Тогда справедливы прямые разложения

$$X = Ker\ \overline{A}_l^m \oplus Im_{co}\ \overline{A}_l^m, \qquad X = Ker\ (\mathcal{A}_l^{-1})^m \oplus Im_{co}\ (\mathcal{A}_l^{-1})^m, \tag{3.3}$$

где оператор $\overline{A}_l = HF$ и отношение $\mathcal{A}_l^{-1}$ являются прямыми суммами вида $\overline{A}_l = (\overline{A}_l)_m \oplus \overline{A}_l^{(m)}$, $\mathcal{A}_l^{-1} = (\mathcal{A}_l^{-1})_m \oplus (\mathcal{A}_l^{-1})^{(m)}$, причем $Ker\ (\mathcal{A}_l^{-1})^m = Ker\ \overline{A}_l^m$,

$$D_{co}((\overline{A}_l)_m^m) - Im_{co}\ (\mathcal{A}_l^{-1})_m^m = \mathbf{0}, \qquad D_{co}((\mathcal{A}_l^{-1})_m^m) = Im_{co}\ (\overline{A}_l)_m^m = \mathbf{0};$$

$$D_{co}(\overline{A}_l^m) = X^{(m)} \oplus \mathbf{0}, \qquad D_{co}((\mathcal{A}_l^{-1})^m) = L^{(m)} \oplus \mathbf{0};$$

$$\mathcal{A}_l^m\mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus (\mathcal{A}_l)_m^m\mathbf{0}, \qquad (\mathcal{A}_l^{-1})^m\mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus (\mathcal{A}_l^{-1})_m^m\mathbf{0}.$$

Все подпространства в правых частях (3.3) являются замкнутыми.

Рассмотрим частный случай $A_l^{-1} \in End\ X$, который вследствие теоремы Банаха возникает, когда замкнутый оператор F действует как обратимый оператор из $\mathcal{D} \subset X$ на Y и $F^{-1} \in Hom\ (Y, \mathcal{D}) \subset Hom\ (Y, X)$.

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{A}_l \in LR(X) \setminus LO(X)$, $A_l^{-1} \in End\ X$ и выполнены предположения 2.1–2.3 с $m > 1$. Тогда справедливы утверждения теоремы 3.1, причем $A_l^{-1} = (A_l^{-1})_m \oplus (A_l^{-1})^{(m)}$, $Ker\ \overline{A}_l^m = Coker\ (A_l^{-1})^m \neq \mathbf{0}$, $D_{co}((A_l^{-1})^m) = Im_{co}\ \overline{A}_l^m \neq X$.

Замечание 3.2. Справедливы аналоги теорем 3.1, 3.2, связанные с прямыми разложениями пространства Y и свойствами отношений $\mathcal{A}_r$, $\mathcal{A}_r^{-1}$.

В итоге исследований приходим к следующему основному результату:

Теорема 3.3. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Тогда имеют место прямые разложения

$$X = \mathcal{A}_l^m\mathbf{0} \oplus D_{co}(\mathcal{A}_l^m), \qquad X = Ker\ \overline{A}_l^m \oplus Im_{co}\ \overline{A}_l^m,$$

$$Y = \mathcal{A}_r^m\mathbf{0} \oplus D_{co}(\mathcal{A}_r^m), \qquad Y = Ker\ \overline{A}_r^m \oplus Im_{co}\ \overline{A}_r^m,$$

где $\overline{A}_l = HF \in LO(X)$, $\overline{A}_r = FH \in LO(Y)$. При этом $X_m = \mathcal{A}_l^m\mathbf{0} = Ker\ \overline{A}_l^m$, $Y_m = \mathcal{A}_r^m\mathbf{0} = Ker\ \overline{A}_r^m$, $X^{(m)} = D_{co}(\mathcal{A}_l^m)$, $Y^{(m)} = D_{co}(\mathcal{A}_r^m)$, все подпространства в правых частях прямых разложений являются замкнутыми. $Y_m = F_m X_m$, $X^{(m)} = (G^{-1})^{(m)} Y^{(m)}$.

В заключение отметим, что та же задача изучалась в [12, 13] для $F, G \in Hom\ (X, Y)$ при следующих пяти предположениях:

(A) максимальная длина любой цепочки $F-$ присоединенных векторов любого собственного вектора оператора G конечна;

(B) корневое подпространство X_m дополняемо в X, т. е. $\exists\, Z^{(m)}: \ X = X_m \oplus Z^{(m)}$, причем $FX_m = Y_m$, $GZ^{(m)} = W^{(m)}$;

(C) $Y = Y_m \oplus W^{(m)}$;

(D) существует оператор $F_m^{-1} \in Hom\ (Y_m, X_m)$, где $F_m = F \restriction X_m$.

В условии (A), свидетельствующем о стабилизации подпространств X_i, подразумевается наличие собственного значения $\nu = 0$ у оператора G, однако связь "несущественно особой точки $\lambda = \infty$" оператора F с этим значением и $F-$ жордановыми цепочками оператора G авторами не обсуждается. Условие (B) состоит из двух: (B_1) $X_m \cap Z^{(m)} = \mathbf{0}$, $X_m \oplus Z^{(m)} = \widetilde{X}$; (B_2) $\widetilde{X} = X$. В условиях $(B)-(C)$ речь идет об одновременной и согласованной с (A) стабилизации подпространств $X^{(i)}$ в X.

Список литературы

[1] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Об условиях компактности спектра упорядоченных пар линейных операторов* // Изв. РАЕН. МММИУ, 1999, **3**, № 3, 5–24.

[2] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Построение фазового пространства и решений линейных уравнений, не разрешенных относительно производной* // Докл. РАН, 2000, **371**, № 3, 295–298.

[3] Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* Наука, М., 1971.

[4] Чернышов К.И. *Упорядоченные пары операторов и стабилизация последовательностей подпространств* // Изв. РАЕН. МММИУ, 2001, **5**, № 3, 44–60.

[5] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы* // Функциональный анализ и его приложения, 2002, **36**, вып. 4, 65–70.

[6] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов* // Матем. сборник, 2002, **193**, № 11, 3–42.

[7] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.

[8] Kato T. *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators* // J. Analyse Math., 1958, **6**, 261–322.

[9] Gamelin T.W. *Decomposition theorems for Fredholm operators* // Pacific J. Math., 1965, **15**, 97–106.

[10] *Функциональный анализ, сер. СМБ* (под общей редакцией С.Г. Крейна). Наука, М., 1972.

[11] Хилле Е., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ., М., 1962.

[12] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л. *Необходимые и достаточные условия относительной $\sigma-$ ограниченности линейных операторов* // Докл. РАН, 1995, **345** № 1, 25–27.

[13] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л. *Относительная $\sigma-$ ограниченность линейных операторов* // Изв. вузов, сер. матем., 1997, № 7(422), 68–73.