Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 17-18 (56-57). 2005 г. № 1. С. 17-19

УДК 531.49

НУЛЬ-СТРУНА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ, СЛАБО СИНГУЛЯРНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Жовтан А.В., Леляков А.П., Рощупкин С.Н.

Одним из главных вопросов в космологии является вопрос о генерации неоднородностей плотности вещества во Вселенной. Считается, что генерация неоднородностей плотности происходит вблизи пространственных сингулярностей. В связи с этим в последнее время все большее внимание уделяется исследованиям динамики протяженных объектов в присутствии сингулярностей [1].

В предлагаемой вниманию работе исследуется динамика нуль струн вблизи сингулярности плоской гравитационной волны, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = F(u,x,y)du^2 - dudv + dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

где $u = t - z$, $v = t + z$ – конусные переменные, а $F(u,x,y) = (x^2 - y^2)/u^\alpha, \alpha > 0$.

Уравнения движения и связи, описывающие нуль струну в пространстве-времени (1) имеют вид

$$u_{,\tau\tau} = 0, \tag{2}$$

$$v_{,\tau\tau} + \alpha u^{-\alpha-1}(x^2 - y^2)u_{,\tau}^2 - 4u^{-\alpha}u_{,\tau}(xx_{,\tau} - yy_{,\tau}) = 0, \tag{3}$$

$$x_{,\tau\tau} - u^{-\alpha}xu_{,\tau}^2 = 0, \tag{4}$$

$$y_{,\tau\tau} + u^{-\alpha}yu_{,\tau}^2 = 0, \tag{5}$$

$$(x^2 - y^2)u^{-\alpha}u_{,\tau}^2 - u_{,\tau}v_{,\tau} + x_{,\tau}^2 + y_{,\tau}^2 = 0, \tag{6}$$

$$u^{-\alpha}(x^2 - y^2)u_{,\tau}u_{,\sigma} - \tfrac{1}{2}u_{,\tau}v_{,\sigma} - \tfrac{1}{2}u_{,\sigma}v_{,\tau} + x_{,\tau}x_{,\sigma} + y_{,\tau}y_{,\sigma} = 0, \tag{7}$$

где $(...)_{,\tau} = \partial(...)/\partial\tau$, $(...)_{,\sigma} = \partial(...)/\partial\sigma$.

Из уравнения (2) находим

$$u(\tau) = p_v\tau, \tag{8}$$

где p_v --константа интегрирования. Дифференцируя связь (6) по σ, а связь (7) по τ, легко убедится в том, что связи непротиворечивы. Далее можно показать, что связь (6) представляет собой первый интеграл уравнения (3) и по этой причине уравнение (3) можно не учитывать. Решения оставшихся уравнений могут быть выражены через функции Бесселя $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ и их производные [2]

$$x(u,\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{p_v}}\sqrt{u}[C(\sigma)I_\nu(z) + D(\sigma)K_\nu(z)], \tag{9}$$

$$y(u,\sigma)=\tfrac{1}{\sqrt{p_\nu}}\sqrt{u}\,[A(\sigma)J_\nu(z)+B(\sigma)Y_\nu(z)], \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
v(u,\sigma)=\tfrac{2}{p_\nu}u^{\frac{1}{2\nu}}\{&I_\nu(z)I_\nu{}'(z)\int C(\sigma)C_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+\\
&+I_\nu(z)K_\nu{}'(z)\int D(\sigma)C_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+K_\nu(z)I_\nu{}'(z)\int C(\sigma)D_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+\\
&+K_\nu(z)K_\nu{}'(z)\int D(\sigma)D_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+J_\nu(z)J_\nu{}'(z)\int A(\sigma)A_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+\\
&+J_\nu(z)Y_\nu{}'(z)\int B(\sigma)A_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+Y_\nu(z)J_\nu{}'(z)\int A(\sigma)B_{,\sigma}(\sigma)d\sigma+\\
&+Y_\nu(z)Y_\nu{}'(z)\int B(\sigma)B_{,\sigma}(\sigma)d\sigma\},\qquad \nu=1/(2-\alpha),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $z=2\nu u^{\frac{1}{2\nu}}$, $u=p_\nu\tau$, а $A(\sigma),B(\sigma),C(\sigma),D(\sigma)$ --произвольные периодические функции σ. Из требования регулярности решений (9)-(11) вблизи сингулярности ($u\to 0$) следует, что $\alpha\in(0,2)$. Для иллюстрации рассмотрим частное решение, полагая в (9)-(11) $\alpha=1$ и

$$A(\sigma)=\cos\sigma,\quad C(\sigma)=\sin\sigma,\quad D(\sigma)=B(\sigma)=0\,. \tag{12}$$

Тогда после простых, но громоздких преобразований решение, описывающее динамику нуль струны вблизи сингулярности ($u\to 0$) может быть представлено в следующей форме:

$$x(u,\sigma)=\tfrac{1}{\sqrt{p_\nu}}u\sin\sigma\,, \tag{13}$$

$$y(u,\sigma)=\tfrac{1}{\sqrt{p_\nu}}u\cos\sigma\,, \tag{14}$$

$$v(u,\sigma)=\tfrac{1}{2p_\nu}\Big(u-\frac{u^2}{2}\cos\sigma\Big)\,. \tag{15}$$

Решения (13)-(15), а также вид мировой поверхности нуль струны приведены на рис. 1-4.

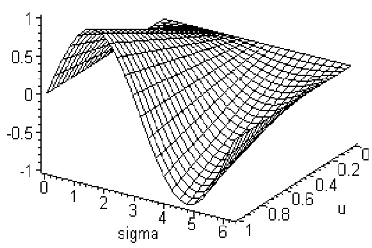

Рис.1 Поверхность x(u, σ) как функция конусной переменной u и параметра σ.

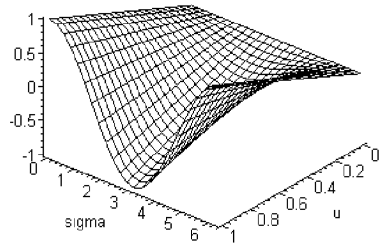

Рис.2 Поверхность y(u, σ) как функция конусной переменной u и параметра σ.

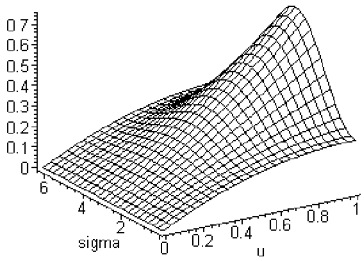

Рис.3 Пример поверхности v(u, σ) (формула (15)).

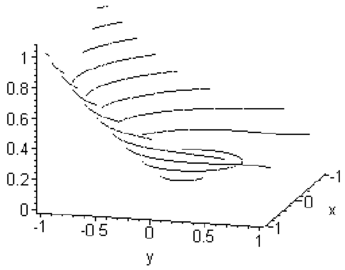

Рис.4 Мировая поверхность, заметаемая струной в процессе эволюции.

ВЫВОДЫ

Таким образом, требование регулярности решений (9)-(11) вблизи сингулярности накладывает ограничение на изменение параметра α $(0<\alpha<2)$. Что же касается струн, то как показано в работе [3], ограничения на параметр α являются более жесткими $(0<\alpha<1)$. Это наблюдение показывает, что изучая динамику нуль объектов можно получить более детальную информацию о пространственных сингулярностях, возникающих в первой квадратичной форме.

С другой стороны, в силу сильной нелинейности уравнений движения нуль струны, на первый план выступают численные методы, позволяющие в более полном объеме проанализировать динамику нуль объектов. Однако на этом пути имеется ряд вопросов, главный из которых – насколько адекватно численная схема описывает истинное движение нуль струны, и какова при этом погрешность численного метода [4]. Поэтому точные решения, полученные в работе, могут служить тестами для отработки тех или иных методов численного моделирования движения нуль струн в псевдоримановых пространствах.

Список литературы

1. Vega de H.J., Ramon Medrano M., Sanchez N. Classical and quantum strings near space-time singularities: gravitational plane waves with arbitrary polarization // Class. Quant. Grav. –1993.--V.10.--p. 2007-2019.
2. Абрамовиц М.А., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979.—830 с.
3. David J.R. Plane waves with weak singularities // hep-th/0303013.
4. Зінченко Є.М., Рощупкін С.М. Моделювання руху космічної струни в гравітаційному полі „кротової нори" // Укр. Фіз. Журн.—2002. -- Т 47, №2.—С. 113-117.

Поступила в редакцию 29.12.2004 г.