Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 17-18 (56-57). 2005 г. № 1. С. 13-16

УДК 539. 391+514. 764.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ КОСМИЧЕСКИХ СТРУН В D+1 – МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ–ВРЕМЕНИ РИНДЛЕРА

Жовтан А.В., Рощупкин С.Н.

ВВЕДЕНИЕ

Космические струны представляют собой линейные топологические дефекты, которые могли образовываться в ранней Вселенной в результате фазовых переходов [1-5], они могут быть либо бесконечной длины, либо замкнуты. Численные расчёты показывают [2], что бесконечные струны, образующиеся в результате фазового перехода в реалистических моделях, составляют около 80% от общего числа струн. Остальные струны возникают в виде замкнутых петель, причем плотность числа петель размера R в единице объема имеет вид $n_R \approx R^{-3}$, где размер петли R определяется как радиус наименьшей сферы, содержащей струну. Поскольку струны обладают энергией, то они, очевидно, взаимодействуют с гравитационным полем. Для струн, возникающих в рамках теории великого объединения, это взаимодействие уже нельзя считать исчезающе слабым. Влияние расширения Вселенной на эволюцию космических струн рассматривалось в ряде работ [1,2,5]. Результат этого анализа коротко сводится к следующему. Длинные (``бесконечные``) струны с размером, большим размера горизонта ct, в результате расширения Вселенной ``выпрямляются`` в масштабах, меньших ct, в то время как на эволюцию струн с $R << ct$ расширение Вселенной практически не влияет.

Замкнутые струны обладают массой и на расстояниях $r << R$ (R – размер струны) их гравитационное поле описывается ньютоновским потенциалом с $m \approx \mu R$ (μ –линейная плотность массы струны). Квадрупольный момент струны $J \approx mR^2 \approx \mu R^2$ изменяется со временем, что приводит к гравитационному излучению, и потери энергии струной определяются соотношением [6]

$$\frac{dE}{dt} \approx \gamma G \mu^2 R^6 \omega^6 \approx \gamma G \mu^2 . \qquad (1)$$

Численный счёт даёт для γ величину порядка 100. Время жизни струны из-за гравитационных потерь конечно и по порядку величины равно $R/\gamma G\mu$. Гравитационный распад, а также эффект дробления струн приводят к тому, что минимальный размер струны, которая, возникнув в момент фазового перехода, смогла дожить до настоящего времени, не превосходит величины $R_{min} \approx 0{,}3$ Мпк [7].

На современном этапе развития теории космических струн на первый план выступают задачи связанные с исследованием динамики струн в искривленных пространствах и обнаружение эффектов которые могли бы служить надежной основой для поиска космических струн во Вселенной.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

ДИНАМИКА СТРУН В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ РИНДЛЕРА

В настоящей работе мы рассмотрели некоторые точные решения уравнений движения классической бозонной струны в пространстве-времени Риндлера, первая квадратичная форма которого имеет вид [8]

$$dS^2 = (1+c^{-2}ax)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2}$$

Тело, покоящееся под действием каких-то "внешних сил" в точке $x=0$, в этом статическом гравитационном поле имеет 4-ускорение, равное a. Поэтому $g=-a$ есть ускорение свободного падения в этой точке в этой точке относительно выбранного покоящегося тела. В ньютоновском приближении, когда $|\varphi|/c^2 << 1$,

$$g_{00} = |g|x. \tag{3}$$

где φ – ньютоновский потенциал. Сопоставляя (2) с (3), мы видим, что метрика (2) отвечает случаю однородного гравитационного поля в ньютоновском приближении с потенциалом

$$\varphi = |g|x. \tag{4}$$

С телом, покоящимся в точке $x=y=z=0$, можно связать жесткую систему отсчета. Эту систему называют системой отсчета, покоящейся в однородном статическом гравитационном поле, или, коротко, G– системой. Особенно наглядный смысл G– система отсчета имеет в том случае, когда статическое гравитационное поле создается массивным тяготеющим телом. Например, можно рассматривать гравитационное поле вблизи поверхности Солнца, нейтронной звезды, доменной стенки и т.д. В области с размером $l << L$, где L– характерный радиус кривизны пространства-времени, для описания гравитационного поля такого массивного источника можно использовать метрику (2), причем G– система отсчета выделяется тем свойством, что она неподвижна относительно поверхности массивного тела.

Основная трудность с которой сталкиваются при изучении динамики струны в псевдоримановых пространствах – существенно нелинейный характер уравнений движения. В связи с этим нахождение точных решений уравнений движения струны в кривых пространствах чрезвычайно актуально.

Уравнения движения и связи для струны погруженной в псевдориманово пространство хорошо известны [9]

$$x^{\mu}_{,\tau\tau} - x^{\mu}_{,\sigma\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\left[x^{\nu}_{,\tau}x^{\rho}_{,\tau} - x^{\nu}_{,\sigma}x^{\rho}_{,\sigma}\right] = 0\ . \tag{5}$$

$$G_{\mu\nu}(x)(x^{\mu}_{,\tau}x^{\nu}_{,\tau} + x^{\mu}_{,\sigma}x^{\nu}_{,\sigma}) = 0\ ,\ x^{\mu}_{,\tau}G_{\mu\nu}(x)x^{\nu}_{,\sigma} = 0\ . \tag{6}$$

где $G_{\mu\nu}(x)$– метрика внешнего пространства, $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(G)$– символы Кристоффеля, $x^{\mu}_{,\tau} \equiv \partial x^{\mu}/\partial\tau$, $x^{\mu}_{,\sigma} \equiv \partial x^{\mu}/\partial\sigma$, а μ, ν, $\rho = 0,1,...D-1$.

Рассмотрим решение уравнений (5), (6) для $D+1$– мерного пространства аремени Риндлера, метрику которого запишем следующим образом:

$$dS^2 = a^2 x_1^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_i^2,\quad i = 2,3,...,D-1. \tag{7}$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

Отличные от нуля символы Кристоффеля легко вычисляются

$$\Gamma^0_{01} = 1/x_1, \quad \Gamma^1_{00} = a^2 x_1. \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в уравнения (5), (6) приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{gathered}
t_{,\tau\tau} - t_{,\sigma\sigma} + 2(t_{,\tau}x_{1,\tau} - t_{,\sigma}x_{1,\sigma})/x_1 = 0, \\
x_{1,\tau\tau} - x_{1,\sigma\sigma} + a^2(t_{,\tau}{}^2 - t_{,\sigma}{}^2)x_1 = 0, \\
x_{i,\tau\tau} - x_{i,\sigma\sigma} = 0, \\
a^2 x_1{}^2(t_{,\tau}{}^2 + t_{,\sigma}{}^2) - x_{1,\tau}{}^2 - x_{1,\sigma}{}^2 - x_{i,\tau}{}^2 - x_{i,\sigma}{}^2 = 0, \\
a^2 x_1{}^2 t_{,\tau} t_{,\sigma} - x_{1,\tau}x_{1,\sigma} - x_{i,\tau}x_{i,\sigma} = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для решения системы (9) используем анзац

$$t = t(\tau), \; x_1 = x_1(\tau), \; x_i = x_i(\tau, \sigma). \tag{10}$$

В результате система (9) существенно упрощается

$$t_{,\tau\tau} + 2t_{,\tau}x_{1,\tau}/x_1 = 0, \qquad x_{1,\tau\tau} + a^2 t_{,\tau}{}^2 x_1 = 0, \tag{11}$$

$$x_{i,\tau\tau} - x_{i,\sigma\sigma} = 0, \quad a^2 x_1{}^2 t_{,\tau}{}^2 - x_{1,\tau}{}^2 - x_{i,\tau}{}^2 - x_{i,\sigma}{}^2 = 0, \quad x_{i,\tau}x_{i,\sigma} = 0 \tag{12}$$

Частное решение уравнений (11) легко находится

$$t = 1/2a \ln\tau, \; x_1 = (2ac\tau)^{1/2}. \tag{13}$$

Используя явный вид решения (13), уравнения (12) можно привести к следующему виду:

$$x_{i,\tau\tau} - x_{i,\sigma\sigma} = 0, \quad x_{i,\tau}{}^2 + x_{i,\sigma}{}^2 = 0, \quad x_{i,\tau}x_{i,\sigma} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (14) следует дополнить граничными условиями, которые для свободной струны имеют вид

$$x_{i,\tau}(\tau, 0) = 0, \quad \sigma = 0, \quad \sigma = \pi, \tag{15}$$

а для замкнутой струны могут быть записаны следующим образом

$$x_i(\tau, 0) = x_i(\tau, 2\pi), \; x_{i,\sigma}(\tau, 0) = x_{i,\sigma}(\tau, 2\pi), \tag{16}$$

Общее решение уравнений (14) с граничными условиями (15) имеет вид

$$x_i(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0} \exp(-in\tau)\frac{\alpha_n}{n}\cos n\sigma + p_i\frac{\tau}{n} + Q_i, \; \alpha^i_n = \alpha^{i*}_{-n}, \; n \neq 0, \tag{17}$$

где p_i, Q_i – константы интегрирования. В случае периодических условий (16) решение уравнений (14) описывается следующим рядом Фурье:

$$x_i(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0} \frac{\exp(-in\tau)}{n}\left[\alpha^i_n \exp(-in\sigma) + \beta^i_n \exp(in\sigma)\right] + \frac{p_i}{2\pi} + Q_i, \tag{18}$$

Легко показать, что замкнутая струна обладает всеми решениями, которые существуют в теории открытой струны.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com

ВЫВОДЫ

Таким образом в настоящей работе показано, что динамика струны в $D+1$ – мерном пространстве Риндлера, как для замкнутой так и открытой бозонной струны, может быть сведена к изучению динамики струны в $D-1$– мерном плоском пространстве, где уравнение движения линеаризуются. Результаты, полученные в работе могут служить основой для построения квантовой теории протяженных обьектов в гравитационном поле массивного тела.

Список литературы

1. Vilenkin A. Cosmic strings and domain walls. Phys. Reports. Vol. 121. 1985. – p. 265-315.
2. Moorre J.N.,Shellard E.P.S., Martins C.J.A.P. On the Evolution of Abelian-Higgs String Networks. Preprint hep-th/0107171.
3. Bennet D.P. Evolution of cosmic strings. Phys. Rev. D. Vol. 33. 1986, p. 872-888.
4. Brandenberger R.H. Inflation fnd cosmic string: two mechanisms for producing structure in the Universe. Prepr. DAMPT. Cambridge, 1987.
5. Kibble T.W.B., Hindmarsh M.B.Cosmic strings. Preprint hep-th/9411342.
6. Garfinkle D., Vachaspti T. Radiation from kinky, cuspless cosmic loops. Phys. Rev. D. vol. 36. 1987. – p. 2229-2241.
7. Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects. – Cambridge University Press, 1994. – 495p.
8. Бирелл Н. Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. Москва "Мир", 1984.
9. Lelyakov A.P., Roshchupkin S.N.Null and tensile strings in Peres spacetime//Acta Phys.Polonica–2002– №2. – p. 593–601.

Поступила в редакцию 02.12.2004 г.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF. To remove this message, purchase the product at www.SolidDocuments.com