Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 17-18 (56-57). 2005 г. № 1. С. 7-12

УДК 539. 391+514. 764.2

ДИНАМІКА СТРУНИ С НАТЯГОМ В ПРОСТОРАХ С ПЛАНАРНОЮ СИМЕТРІЄЮ

Леляков О.П.

ВСТУП

З моменту теоретичного пророкування можливості існування космічних струн не пройшло ще і тридцяти років, а сучасну космологію вже важко представити без цих об`єктів, що знайшли в ній саме широке застосування: від струнних механізмів утворення первинних неоднорідностей речовини в ранньому Всесвіті, що надалі привели до утворення галактик, до струнних механізмів інфляції. В останні три роки в наукових виданнях все частіше починають з'являтися публікації які присвячені експериментальному виявленню космічних струн у частині Всесвіті, що спостерігається [1,2]. Поки основним, але далеко не єдиним, фізичним ефектом який використовується при детектуванні космічної струни є ефект гравітаційного лінзування. Ефекти які в принципі можуть бути використані при експериментальному виявленні струн є результат теоретичного дослідження динаміки струни в різноманітних фонових гравітаційних полях. Цінність подібних досліджень полягає ще й у тому, що розв`язки рівнянь руху дозволяють одержати додаткову інформацію про самі гравітаційні поля, оскільки деякі їх властивості виявляються в особливостях руху струни.

У рамках різноманітних моделей Теорії Великого Об'єднання космічні струни виявляються як топологічні дефекти (поряд із доменними стінками і монополями) і тому являють собою стійкі утворення. В роботі [3] було показано, що наявність таких об'єктів у сучасному Всесвіті не суперечить мікрохвильовому реліктовому випромінюванню, що спостерігається, більш того, не виключено, що ці об'єкти могли зберегтися до сучасної епохи і, отже, можуть спостерігатися. Таким чином, актуальним є питання про вплив зазначених вище протягнених у просторі структур на динаміку один одного.

Дана робота присвячена вивченню динаміки замкнених струн в гравітаційному полі ``товстих`` планарно симетрічних об'єктів, що виникають з безмасового, речовинного скалярного поля. Квадратична форма таких просторів має наступний вигляд [4]

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt^2 - dz^2) - B\left(dx^2 + dy^2\right) \tag{1}$$

де: $\nu = \nu(q)$, $B = B(q)$, $q = t \pm z$.

Надалі, для визначеності, виберемо в (1)

$$q = t + z \,. \tag{2}$$

Основною трудністю, із якою доводиться зштовхуватися при переході від вивчення руху нуль-струни (струни з рівним нулю натягом) у псевдоріманових просторах до вивчення руху струни, – це істотне ускладнення рівнянь і зв'язків (яке пов'язане з появою похідних по простір подібному параметру σ), що ускладнює їх структуру і робить важким пошук загальних, точних розв`язків.

Для того, щоб обминути зазначену трудність, часто обмежуються пошуком окремих розв`язків рівнянь руху, що реалізують ту або іншу фізичну ситуацію. Так для просторів, які ми розглядаємо, було знайдено точний розв`язок рівнянь руху замкненої струни [5] у випадку

$$t = t(\tau);\ z = z(\tau);\ x = x(\tau,\sigma);\ y = y(\tau,\sigma) \quad (3)$$

Відзначимо, що вимозі (3) відповідає випадок, при якому замкнена струна, під час свого руху, у кожний момент часу t цілком лежить у площині x;y.

ДИНАМІКА СТРУНИ С НАТЯГОМ В ПРОСТОРАХ С ПЛАНАРНОЮ СИМЕТРІЄЮ

Легко показати, що рівняння руху струни [5] для (3) мають вигляд:

$$(t+z)_{,\tau\tau} + 2\nu_{,\tau}(t+z)_{,\tau} = 0 \,. \quad (4)$$

$$(t-z)_{,\tau\tau} + B_{,q}e^{-2\nu}\left\{\begin{matrix}(x_{,\tau})^2 + (y_{,\tau})^2 - \\ -(x_{,\sigma})^2 - (y_{,\sigma})^2\end{matrix}\right\} = 0 \,. \quad (5)$$

$$x_{,\tau\tau} + x_{,\tau}\frac{B_{,\tau}}{B} = x_{,\sigma\sigma} \,;\ y_{,\tau\tau} + y_{,\tau}\frac{B_{,\tau}}{B} = y_{,\sigma\sigma} \,. \quad (6)$$

А також зв'язки

$$e^{2\nu}((t_{,\tau})^2 - (z_{,\tau})^2) - B\left\{\begin{matrix}(x_{,\tau})^2 + (x_{,\sigma})^2 + \\ +(y_{,\tau})^2 + (y_{,\sigma})^2\end{matrix}\right\} = 0 \,. \quad (7)$$

$$x_{,\tau}x_{,\sigma} + y_{,\tau}y_{,\sigma} = 0 \,. \quad (8)$$

Помітимо, що в (4) – (8) $x_{,\tau} \neq 0;\ y_{,\tau} \neq 0;\ x_{,\sigma} \neq 0;\ y_{,\sigma} \neq 0$, оскільки у випадку $x_{,\tau} = 0;\ y_{,\tau} = 0$, як легко помітити, розв`язків рівнянь (6) у вигляді замкненої струни не існує, а випадок $x_{,\sigma} = 0;\ y_{,\sigma} = 0$ призводить до того, що замкнена струна вироджується в крапку.

Перший інтеграл для (4) може бути поданий як:

$$(t+z)_{,\tau} = \gamma e^{-2\nu} \,. \quad (9)$$

де: $\gamma = const$.

Використовуючи (8), рівняння (6) можуть бути подані у вигляді:

$$(x_{,\tau})^2 + (y_{,\tau})^2 + (x_{,\sigma})^2 + (y_{,\sigma})^2 = F\,;\quad F_{,\tau} = -2\frac{B_{,\tau}}{B}((x_{,\tau})^2 + (y_{,\tau})^2) \,. \quad (10)$$

де: $F = F(\tau)$ – константа інтегрування, $F > 0$.

З (10) випливає, що

$$(x_{,\tau})^2 + (y_{,\tau})^2 = \lambda^2(\tau)\,;\quad (x_{,\sigma})^2 + (y_{,\sigma})^2 = \omega^2(\tau) \,. \quad (11)$$

де: $\omega^2(\tau) = F - \lambda^2 > 0$.

Диференціюючи (11) по σ знаходимо

$$x_{,\tau}x_{,\tau\sigma} + y_{,\tau}y_{,\tau\sigma} = 0\,. \tag{12}$$

Використовуючи (8) співвідношення (12) може, також, бути подане як

$$x_{,\sigma}x_{,\tau\tau} + y_{,\sigma}y_{,\tau\tau} = 0\,, \tag{13}$$

або

$$x_{,\sigma}y_{,\tau\sigma} - y_{,\sigma}x_{,\tau\sigma} = 0\,. \tag{14}$$

Неважко перевірити, що співвідношення (13), (14) з урахуванням (8) приводяться до виду

$$\left(\frac{x_{,\tau}}{y_{,\tau}}\right)_{,\tau} = 0\,;\left(\frac{x_{,\sigma}}{y_{,\sigma}}\right)_{,\tau} = 0\,. \tag{15}$$

Відкіля, з урахуванням (8), знаходимо

$$x_{,\tau} = \alpha y_{,\tau}\,;\, x_{,\sigma} = -(1/\alpha)\,y_{,\sigma}\,, \tag{16}$$

де: $\alpha = \alpha(\sigma)$.

Підставляючи (16) у (11) знаходимо

$$x_{,\tau} = \frac{\pm\,\alpha\lambda}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad y_{,\tau} = \frac{\pm\,\lambda}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \tag{17}$$

$$x_{,\sigma} = -\frac{\pm\,\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad y_{,\sigma} = \frac{\pm\,\alpha\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{18}$$

Оскільки вимога

$$x_{,\tau\sigma} = x_{,\sigma\tau}\,;\, y_{,\tau\sigma} = y_{,\sigma\tau}\,, \tag{19}$$

повинна виконуватися, то, диференціюючи (17) по σ, а (18) по τ і підставляючи отримане в (19) приходимо до рівності

$$\frac{\omega_{,\tau}}{\lambda} = -\frac{\alpha_{,\sigma}}{1+\alpha^2}\,. \tag{20}$$

Оскільки в співвідношенні (20) зліва стоїть функція, що залежить тільки від τ а справа функція, що залежить тільки від σ , то з (20) випливає, що

$$\frac{\omega_{,\tau}}{\lambda} = \lambda_0\,, \tag{21}$$

$$\frac{\alpha_{,\sigma}}{1+\alpha^2} = -\lambda_0\,, \tag{22}$$

де: λ_0 – константа поділу.

Тоді з (21), (22) отримуємо

$$\alpha = -tg(\lambda_0\sigma)\,, \qquad \lambda = \frac{\omega_{,\tau}}{\lambda_0} \tag{23}$$

Підставляючи (23) у (17), (18) маємо

$$x_{,\tau}=\frac{\mp\omega_{,\tau}}{\lambda_0}Sin(\lambda_0\sigma);\quad x_{,\sigma}=\mp\omega Cos(\lambda_0\sigma). \qquad (24)$$

$$y_{,\tau}=\frac{\pm\omega_{,\tau}}{\lambda_0}Cos(\lambda_0\sigma);\quad y_{,\sigma}=\mp\omega Sin(\lambda_0\sigma). \qquad (25)$$

Відкіля

$$x=-\frac{\omega}{\lambda_0}Sin(\lambda_0\sigma),\qquad y=\frac{\omega}{\lambda_0}Cos(\lambda_0\sigma). \qquad (26)$$

Використовуючи (26) співвідношення (10) можуть бути подані у вигляді:

$$F=\frac{(\omega_{,\tau})^2}{(\lambda_0)^2}+\omega^2. \qquad (27)$$

$$F_{,\tau}=-2\frac{B_{,\tau}}{B}\frac{(\omega_{,\tau})^2}{(\lambda_0)^2}. \qquad (28)$$

Диференціюючи (27) по τ, і підставляючи результат у (28) знаходимо

$$\frac{\omega_{,\tau\tau}}{\omega}+\frac{\omega_{,\tau}}{\omega}\frac{B_{,\tau}}{B}+(\lambda_0)^2=0. \qquad (29)$$

Підставляючи (10), (26) у (7) отримаємо

$$(t-z)_{,\tau}=\frac{1}{\gamma}BF. \qquad (30)$$

Неважко перевірити те, що (30) є перший інтеграл для (5), а рівняння (6) для (26) виконуються тотожно.

З (26) випливає, що в усьому класі просторів з планарною симетрією [4], для (3), замкнена струна може існувати тільки у вигляді кола, радіус якого $r=\sqrt{x^2+y^2}=\left|\frac{\omega}{\lambda_0}\right|$, залежить від виду метрики і визначається з рівняння (29). Співвідношення (9) визначає зв'язок метричних функцій з параметрами на світовому листі струни і може бути подане як

$$\gamma\tau+t_0=\int e^{2\nu}dq. \qquad (31)$$

де: $t_0=const$.

Використовуючи (31), рівняння (29), (30) можуть бути представлені, у вигляді:

$$\frac{\omega_{,qq}}{\omega}+\frac{\omega_{,q}}{\omega}\left\{\frac{B_{,q}}{B}-2\nu_{,q}\right\}+\left(\frac{\lambda_0}{\gamma}\right)^2e^{4\nu}=0. \qquad (32)$$

$$(t-z)_{,q}=\frac{e^{2\nu}}{\gamma^2}BF. \qquad (33)$$

де: $F=(\gamma/\lambda_0)^2(\omega_{,q})^2e^{-4\nu}+\omega^2$, $\omega=\omega(q)$.

Таким чином, співвідношення (26), (31) – (33) цілком визначають динаміку замкненої струни в усьому класі просторів, які були розглянути в роботі [4].

Як приклад, розглянемо рух замкненої струни в просторі часі "товстого" планарно симетричного об'єкта, що задається функціями [4]:

$$e^{2\nu} = B = \frac{1}{1+(\alpha q)^2}, \tag{34}$$

де: $\alpha = const$.

Інтегруючи (32), (33) для (34) маємо

$$\omega = \frac{\beta q}{\sqrt{1 + (\alpha q)^2}}, \tag{35}$$

$$t - z = T_0 + (\beta / \lambda_0)^2 \int \frac{1 + 4(\alpha q)^2}{(1 + (\alpha q)^2)^4} dq, \tag{36}$$

де: β, T_0 – константи інтегрування.

Графік залежності $|\omega|$ від q, що відповідає (35), зображений на Рис.1.

З Рис.1. випливає, що замкнена струна радіуса $r = \beta / \alpha \lambda_0$ попадаючи в гравітаційне поле "товстого" планарно симетричного об'єкта, що задається функціями (34) стягається в точку а після проходження знову набуває початкового розміру.

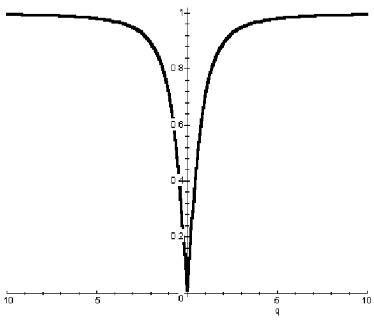

Рис.1. Змінювання радіуса замкненої струни при її русі в гравітаційному полі планарно симетричного об'єкта, що задається функціями (34), де: α = β =1.

ВИСНОВКИ

Таким чином ми отримали точний розв'язок рівнянь руху струни у випадку, коли замкнена струна в кожний момент часу t цілком лежить у площині x, y. Аналіз рівнянь руху у цьому випадку показує, що в усьому класі планарно симетричних просторів, виникаючих з безмасового, речовинного скалярного поля, замкнена струна може існувати тільки у вигляді кола, радіус якого залежить від виду метрики. Наведено приклад руху в одному із планарно симетричних просторів. Показано, що замкнена струна радіуса R, попадаючи в гравітаційне поле цього об'єкта, стискається в точку, а при проходженні знову набуває початкового розміру.

На закінченні хочу подякувати Аріфову Л.Я. і Рощупкіну С.М. за плідні обговорення та вагомі зауваження.

Список літератури

1. Sazhin M., Longo G., Capaccioli M., Alcala J.M., Silvotti R., Covone G., Khovanskaya O., Pavlov M., Pannella M., Radovich M., Testa V. CSL-1: chance projection effect or serendiptious discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string? Preprint Astro-ph/0302547.
2. Shild R. Masnyak I.S., Hnatyk B.I., and Zhdanov V.I. Anomalous fluctuations in observations of Q0957+561A.B: smoking gun of cosmic string? Preprint Astro-ph/0406434v1.
3. Richard Gass and Manash Mukherjle Domain Wall Spacetimes and Porticle Motion. Phys. Rev. D 60 (1999). O65011 Preprint gr-gs/9903012.
4. Lelyakov A.P. The possibility of originating planar-symmetrical structures in pseudo-riemannian spaces // Gravitation. Cosmology and Relativistic Astrophysics. – Kharkov: Kharkov National University, 2004. – P. 108-110.
5. Vilenkin A. Cosmic strings and domain walls // Phys. Reports. – 1985. – V. 121 – P. 263-287.

Поступила в редакцию 19.11.2004 г.