

УДК 538.123

РАСЧЁТ ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКОВОГО НАСТИЛА В ПРИСУТСТВИИ КОРОТКОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

Горская И.Ю., Фурсенко А.В.

ВВЕДЕНИЕ

В целом ряде технических приложений, связанных прежде всего с проектированием, конструированием и оптимизацией электрических машин, возникает необходимость расчёта распределения векторного магнитного потенциала токов различных обмоток в присутствии массивных ферромагнитных деталей, имеющих осевую симметрию. Для решения данной задачи обычно используют методы конечных разностей, конечных элементов, эквивалентных зарядов. Другой подход основан на выделении определённого класса задач, для которых оказывается возможным разработка специальных методов или модификации каких-либо алгоритмов. В данной работе предложена методика расчёта векторного магнитного потенциала бесконечного цилиндрического токового настила в присутствии короткого ферромагнитного цилиндра, которая основана на применении интегральных уравнений, составленных относительно векторных источников. Предлагаемая методика позволяет обобщить разработанный численный алгоритм на более сложные, с точки зрения геометрии, осесимметричные конструкции и создать гибкую программу, рационально использующую вычислительные ресурсы ЭВМ.

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКОВОГО НАСТИЛА В ПРИСУТСТВИИ КОРОТКОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим ферромагнитный цилиндр, расположенный во внешнем магнитном поле, векторный потенциал которого \vec{A}_0 . Радиус внутренней поверхности цилиндра R_1 , внешний радиус – R_2 , его толщина – H . Абсолютная магнитная проницаемость материала цилиндра равна μ . Исходное поле \vec{A}_0 создаётся токами обмотки, выполненными в виде равномерного токового настила, распределенного по внутренней поверхности расточки кругового цилиндра (рис. 1).

Будем считать, что эти токи бесконечны вдоль оси z и их поверхностная плотность изменяется по закону

$$j_0(\alpha) = j_{0m} \sin(p\alpha), \quad (1)$$

где j_{0m} – амплитудное значение тока; p – число пар полюсов обмотки.

Векторный потенциал \vec{A}_0 результирующего поля представим в виде суммы двух слагаемых: \vec{A}_0 – векторный потенциал внешнего поля, то есть поля обмотки, и \vec{A}_1 – векторный потенциал, обусловленный намагничением ферромагнитным цилиндром

$$\vec{A}_0 = \vec{A}_0 + \vec{A}_1. \quad (2)$$

Так как токи бесконечны вдоль оси z , то в плоскопараллельном случае

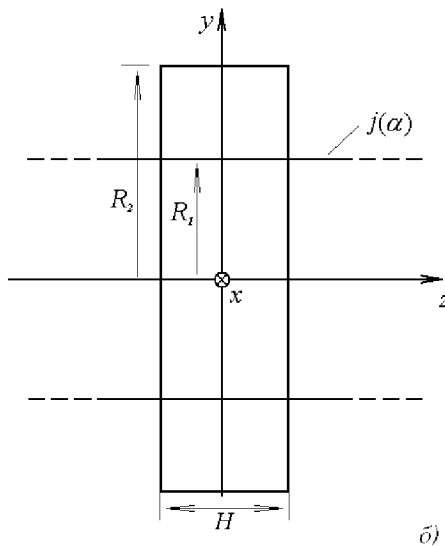
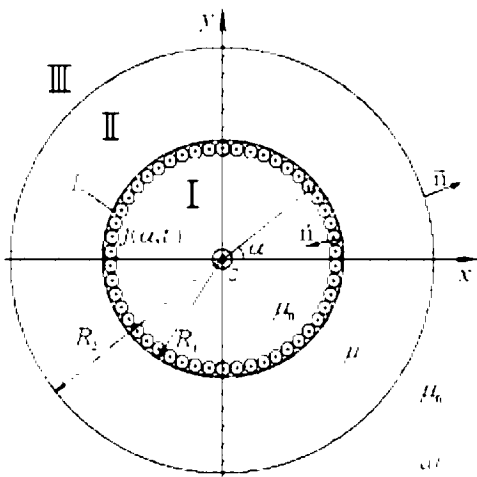


Рис. 1. Сечение ферромагнитного цилиндра:
а – поперечное;
б – продольное.

$$\vec{A}_0(M) = \vec{e}_z A_0(M),$$

$$A_0(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_L j_0(N) \ln \frac{1}{r_{NM}} dN, \quad (3)$$

где L – контур, ограничивающий в сечении внутреннюю поверхность цилиндра, то есть окружность радиуса R_1 .

Произведя элементарные тригонометрические преобразования, после интегрирования формулы (3) с использованием выражения, справедливого для плоского треугольника [2]:

$$\ln a = \begin{cases} \ln b - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c}{b}\right)^n \cos nA, & b > c; \\ \ln c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{c}\right)^n \cos nA, & c > b. \end{cases}$$

где a, b, c – стороны, противолежащие углам A, B, C , получим аналитическое выражение для векторного потенциала обмотки

$$A_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R_1}{2p} \left(\frac{R_1}{r}\right)^p j_{0m} \sin(p\beta), & r > R_1; \\ \frac{\mu_0 R_1}{2p} \left(\frac{r}{R_1}\right)^p j_{0m} \sin(p\beta), & r < R_1. \end{cases} \quad (4)$$

где r, β – координаты точки M .

Для нахождения потенциала \vec{A}_1 , обусловленного намагничением ферромагнетиком, используем векторные вторичные источники – поверхностные токи с плотностью \vec{j} :

$$\vec{A}_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}(P)}{r_{PM}} dS_P. \quad (5)$$

где S – поверхность ферромагнитного цилиндра; M – произвольная точка пространства.

Решая краевую задачу для векторного потенциала \vec{A}_1 , получаем следующее интегральное уравнение для плотности поверхностных токов [7]:

$$\begin{aligned} \vec{j}(Q) + \frac{1}{2\pi} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \oint_S \frac{[\vec{n}_Q \times [\vec{j}(P) \times \vec{r}_{PQ}]]}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \left[\vec{n}_Q \times \int_{V_0} \frac{[\vec{\delta}_0(P) \times \vec{r}_{PQ}]}{r_{PQ}^3} dV_P \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где V_0 – объём, занятый токами с объёмной плотностью $\vec{\delta}_0$, в поле которых находится ферромагнетик; Q – точка, принадлежащая поверхности цилиндра; \vec{n}_Q – внешняя нормаль к поверхности цилиндра в точке Q . По структуре, с точностью до коэффициента, интеграл в правой части выражения (6), в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа, есть внешнее поле \vec{B}_0 , созданное токами с объёмной плотностью $\vec{\delta}_0$. В нашем случае внешнее поле \vec{B}_0 создаётся токами обмотки в виде бесконечно тонкого токового настила, векторный потенциал \vec{A}_0 которого определяется соотношением (4). Тогда \vec{B}_0 (при условии, что $r > R_1$) найдём следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{B}_0(Q) = \text{rot} \vec{A}_0(Q) = \\ = \frac{\mu_0 R_1}{2p} j_{0m} \text{rot} \left(\left(\frac{R_1}{r} \right)^p \sin(p\beta) \vec{e}_z \right) = \\ = \frac{\mu_0}{2} j_{0m} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{p+1} (\sin(p\beta) \vec{e}_\alpha - \cos(p\beta) \vec{e}_r), \end{aligned} \quad (7)$$

а интегральное уравнение для плотности поверхностных токов, с учетом (7), запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{j}(Q) + \frac{1}{2\pi} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \oint_S \frac{[\vec{n}_Q \times [\vec{j}(P) \times \vec{r}_{PQ}]]}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} [\vec{n}_Q \times \vec{B}_0(Q)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Решив интегральное уравнение (8), определим плотность поверхностных токов $\vec{j}(P)$ на поверхности ферромагнитного цилиндра. Подставив полученный результат в формулу

(5). найдём векторный потенциал \vec{A}_1 ; используя аналитическое выражение (4), определим векторный потенциал \vec{A}_0 обмотки. Далее, на основании соотношения (2), рассчитаем векторный потенциал \vec{A}_e ферромагнитного цилиндра, находящегося в поле указанного токового слоя.

Для решения интегрального уравнения (8) применялся метод последовательных приближений. С целью проверки полученных результатов и выбора наиболее оптимального с точки зрения затрат машинного времени метода определения плотности вторичных источников, интегральное уравнение (8) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Полученная СЛАУ решалась методами Зейделя, обратной матрицы, Гаусса, а также методом Лавенберга-Маркардта, который является одной из модификаций метода градиентного спуска. Сравнение полученных решений показало, что, во-первых, все указанные методы дают один и тот же результат (отличие в значениях поверхностной плотности токов, полученной различными методами, не превосходило по абсолютной величине 3%); во-вторых, наименее затратным по времени оказался метод последовательных приближений.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЁТА ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ТОКОВОГО СЛОЯ В ПРИСУТСТВИИ КРУГОВОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

Для проверки численного алгоритма расчёта векторного потенциала была решена аналитическим методом разделения переменных аналогичная двумерная задача, в которой цилиндр считался бесконечно длинным вдоль оси z . При решении этой задачи векторный потенциал \vec{A}_e результирующего поля представлялся в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{A}_e = \vec{A}_0 + \vec{A}' \quad (9)$$

где \vec{A}_0 – векторный потенциал токового настила, решение для которого найдено в аналитическом виде (4), а \vec{A}' – векторный потенциал, обусловленный намагниченным ферромагнетиком.

Так как система бесконечно длинная вдоль оси z , то в плоскопараллельном случае векторный потенциал будет иметь только z -проекцию. Суммарный векторный потенциал A_e , а также его составляющая A_0 удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta A_e = 0;$$

$$\Delta A_0 = 0.$$

Из линейности оператора Лапласа следует, что и для составляющей A' выполняется аналогичное уравнение, то есть

$$\Delta A' = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что граничные условия для потенциала A' следуют из граничных условий для магнитных полей и на поверхности ферромагнитного цилиндра имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A^I &= A^{II}, & r &= R_1; \\
 \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A^I}{\partial n} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A^{II}}{\partial n} &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{\partial A_0}{\partial n} - j_0, & r &= R_1; \\
 A^{II} &= A^{III}, & r &= R_2; \\
 \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A^{III}}{\partial n} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A^{II}}{\partial n} &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{\partial A_0}{\partial n}, & r &= R_2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Решая методом разделения переменных уравнение Лапласа (10) и удовлетворяя краевым условиям на границе ферромагнетика (11), получаем следующее выражение для A^I в различных областях (рис. 1):

$$\begin{cases}
 A^I(r, \alpha) = D \sin(p\alpha) \cdot r^p; \\
 A^{II}(r, \alpha) = \sin(p\alpha) \cdot (Pr^p + Qr^{-p}); \\
 A^{III}(r, \alpha) = G \sin(p\alpha) \cdot r^{-p},
 \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\begin{cases}
 Q = \frac{j_{0m} \mu_0}{2p} R_1^{p+1} \left(\frac{1 - \lambda \xi}{1 - \xi} \right); \\
 P = \frac{j_{0m}}{p} \frac{\mu_0 \mu}{(\mu_0 - \mu)} \frac{R_1^{p+1}}{R_2^{2p}} \frac{1}{(1 - \xi)}; \\
 D = \frac{j_{0m} \mu_0}{2p} \frac{R_1^{p+1}}{1 - \xi} \left(\frac{2\mu}{(\mu_0 - \mu)} \frac{1}{R_2^{2p}} + (1 - \lambda \xi) \frac{1}{R_1^{2p}} \right); \\
 G = \frac{j_{0m} \mu_0}{2p} \frac{R_1^{p+1}}{1 - \xi} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \xi \right); \\
 \xi = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2p}, \quad \lambda = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu}.
 \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя полученные коэффициенты (13) в соотношения (12) и пользуясь формулой (4), можно найти векторный потенциал ферромагнитного бесконечно длинного цилиндра, находящегося в поле токового настила. На рис. 2 представлено распределение векторного потенциала вдоль радиуса при фиксированных значениях угла для цилиндра со следующими параметрами: внешний радиус – 130 мм; внутренний радиус – 100 мм; амплитудное значение тока в статорной обмотке – 1 А; частота тока – 50 Гц; относительная магнитная проницаемость материала цилиндра – 1000; число полюсов – 8.

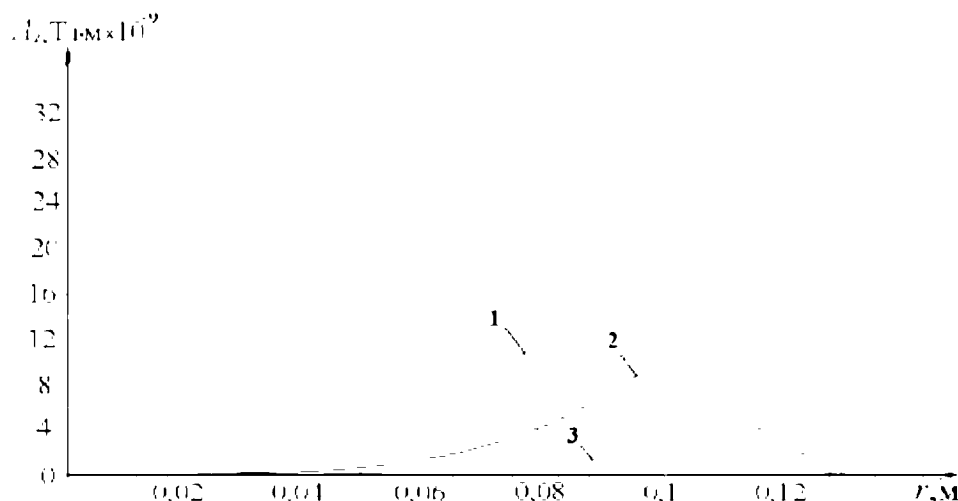


Рис. 2. Распределение векторного потенциала в двухмерной задаче вдоль радиуса при фиксированных значениях угла α :
 1 – $\alpha=65^\circ$; 2 – $\alpha=50^\circ$; 3 – $\alpha=46^\circ$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКОВОГО НАСТИЛА В ПРИСУТСТВИИ КОРОТКОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

Для сравнения численного и аналитического решений, с целью приближения трёхмерной модели к плоскопараллельному случаю, длина цилиндра была увеличена. Далее был рассчитан векторный потенциал трёхмерной задачи по выше описанному алгоритму в среднем сечении ферромагнитного цилиндра, и полученное решение сравнивалось с аналитическим результатом двумерной задачи. Данное сравнение показало, что результаты по абсолютной величине отличаются не более чем на 3%, что доказывает надёжность разработанного численного алгоритма.

На рис. 3, 4 представлены распределения результирующего векторного потенциала вдоль оси z при различных значениях угла и радиуса для цилиндра толщины $H=100$ мм, другие параметры цилиндра имеют те же значения, что и в предыдущем примере.

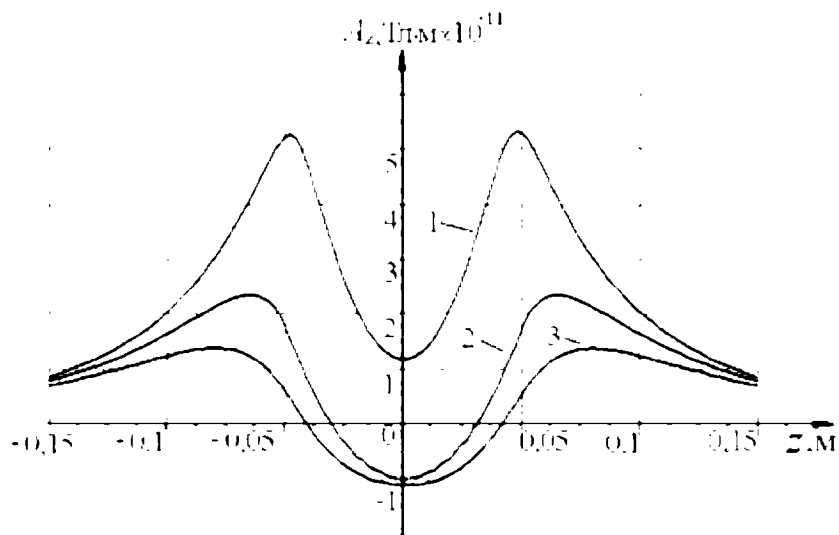


Рис. 3. Распределение z-компоненты векторного потенциала в трёхмерной задаче вдоль оси z для значения угла $\alpha = 0^\circ$ при фиксированных значениях радиуса:
1 – $r = 110$ мм; 2 – $r = 125$ мм; 3 – $r = 140$ мм.

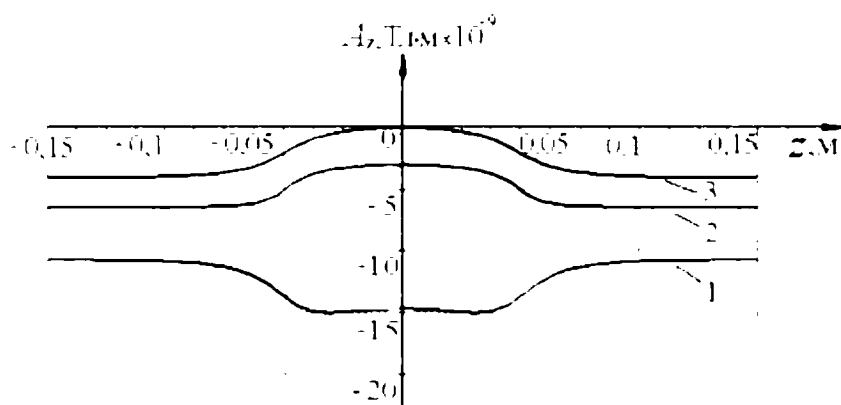


Рис. 4. Распределение z-компоненты векторного потенциала в трёхмерной задаче вдоль оси z для значения угла $\alpha = 22.5^\circ$ при фиксированных значениях радиуса:
1 – $r = 110$ мм; 2 – $r = 125$ мм; 3 – $r = 140$ мм.

ВЫВОДЫ

1. Решено численно интегральное уравнение относительно распределения микротоков на поверхности короткого ферромагнитного цилиндра, находящегося в поле бесконечного цилиндрического токового настила.
2. Получено аналитическое решение двухмерной задачи расчёта векторного потенциала токового слоя в присутствии бесконечного кругового цилиндра.
3. При существенно увеличенной длине цилиндра проведено сравнение полученного численного решения трёхмерной задачи с аналитическим решением аналогичной двухмерной задачи.
4. Приведены графики распределения векторного потенциала в объёме короткого ферромагнитного цилиндра.

Разработанный пакет прикладных программ расчёта векторного магнитного потенциала в дальнейшем будет использован для расчёта вихревых токов в шихтованном статоре электрической машины.

Список литературы

1. Горская И.Ю., Фурсенко А.В. Разработка методики расчёта вихревых токов в объёме ферромагнетика // Тезисы докладов третьей Международной научно-практической конференции «Динамика научных исследований 2004». – Днепропетровск. - 2004.
2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. 1977. –224с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 7-е изд. – М.: Наук. 1988. – 509 с.
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Часть III. – М.: Энергия. 1975. – 120 с.
5. Стадник И.П. Синтез схем замещения электромагнитных устройств с массивными проводниками: Дис... канд. техн. наук: 05.09.05.– Новочеркасск. 1971. 228 с.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука. 1989. – 504 с.
7. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974. – 352 с.

Поступила в редакцию 14.09.2005 г.