Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 17-18 (56-57). 2005 г. № 1. С. 103-114

УДК 530.14

ПОТОК ПОЛЯРИТОНОВ В ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Дзедолик И.В.

ВВЕДЕНИЕ

Высокочастотные источники электромагнитного излучения, в частности, оптические, генерируют излучение в виде волновых пакетов, которые при распространении в среде вызывают локальное изменение ее свойств. Степень изменения свойств среды зависит от нелинейных и дисперсионных характеристик среды [1]. Даже при относительно малых величинах параметров нелинейности и дисперсии при распространении волнового пакета в среде на больших длинах имеют место накапливающиеся эффекты, которые не учитываются классической теорией. Эти изменения, в свою очередь, приводят к искажению начального профиля волнового пакета, обогащению его спектрального состава и т.п. [2,3].

Волновой пакет, распространяющийся в линейной или нелинейной среде, сформированный модами электромагнитного поля одного типа, можно рассматривать как сгусток точечных квазичастиц [4] – поляритонов [1]. Такой волновой пакет изменяется в нескольких (как минимум, двух) пространственно-временных масштабах: один из них соответствует быстрым осцилляциям на несущей частоте, второй – медленной модуляции. Усреднение волнового пакета по быстрым пространственно-временным осцилляциям соответствует введению квазичастиц в данной модели. Этот вариант метода усреднения основан на интегрировании произведения волновых функций в двух точках конфигурационного пространства $\Psi(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)$ по наименьшему периоду – «усреднение по двум точкам». Каждый поляритон тогда имеет координату $\mathbf{r}(t)$, импульс $\mathbf{p}(t)$ и энергию $\tilde{E} = \hbar\omega(t,\mathbf{r},\mathbf{k})$. Такой подход позволяет получить эволюционные уравнения Шредингера для описания динамики поляритонов, кинетическое уравнение для функции распределения Вигнера потока поляритонов, характеристические уравнения, а также гидродинамические уравнения для моментов функции распределения.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯРИТОНОВ

Найдем функцию распределения поляритонов, описывающую динамику волнового пакета в пространстве-времени. Для этого используем двойное преобразование Фурье для функций волнового поля

$$\Psi_1\Psi_2^* = \iint \phi_1\phi_2^* \mathbf{exp}[\,i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)]\frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6}, \qquad (1)$$

где $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}(t, \mathbf{k}_{1,2})$ - фурье-амплитуды функций $\Psi_{1,2} = \Psi_{1,2}(t, \mathbf{r}_{1,2})$, интегрирование осуществляется от $-\infty$ до ∞ . Произведение волновых функций $\Psi_1 \Psi_2^*$ содержит как быстрые, так и медленные пространственные осцилляции. Введем «быстрые» и «медленные» переменные [4]: $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ - медленные, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ - быстрые, и волновые вектора $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ - медленный, $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2$ - быстрый. Учтем, что $\mathbf{kR} + \mathbf{Kr} = \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2$ и найдем якобиан перехода от переменных $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ к переменным $(\mathbf{k}, \mathbf{K})$: $J = \partial(\mathbf{K}, \mathbf{k}) / \partial(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1$. Тогда преобразование Фурье (1) представим в виде

$$\Psi_1 \Psi_2^* = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) \, \mathbf{exp}(i \, \mathbf{kR}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} . \tag{2}$$

где $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \phi_1(t, \mathbf{k}, \mathbf{K}) \phi_2^*(t, \mathbf{k}, \mathbf{K}) \, \mathbf{exp}(i \, \mathbf{Kr}) \frac{d^3 K}{(2\pi)^3}$ - функция распределения Вигнера [5].

Функция распределения Вигнера $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})$ – вещественная величина, принимающая как положительные, так и отрицательные значения. Она вводится для того, чтобы описывать квантовомеханические смешанные состояния. Функция распределения Вигнера позволяет получать макроскопические квантовые уравнения и, таким образом, пользоваться аналогиями с классическими уравнениями. Обратное преобразование Фурье для (2) имеет вид

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \Psi_1 \Psi_2^* \, \mathbf{exp}(-i \, \mathbf{kR}) \, d^3 R . \tag{3}$$

В случае R = 0 (траектория, вырожденная в точку) и K = 0 (монохроматическая волна) из выражения (2) получаем

$$\left| \Psi(t, \mathbf{r}) \right|^2 = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tag{4}$$

- плотность поляритонов в конфигурационном пространстве в точке **r**.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Выведем уравнение для вигнеровской функции распределения поляритонов. Складывая уравнения Шредингера $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$ для волновых функций Ψ_1 и Ψ_2^*, умноженные слева на Ψ_2^* и Ψ_1, соответственно, $i\hbar \Psi_2^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \Psi_2^* \hat{H}_1 \Psi_1$, $-i\hbar \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial t} = \Psi_1 \hat{H}_2 \Psi_2^*$, получаем уравнение вида

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1\Psi_2^* = (\hat{H}_1 - \hat{H}_2)\Psi_1\Psi_2^*,$$

где $\hat{H}_1 = \hat{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1\right), \hat{H}_2 = \hat{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2\right)$. Произведем обратное преобразование Фурье (2) для этого уравнения, и используем замену переменных для координат

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = \int \mathbf{exp(-i\,kR)}\begin{bmatrix}\hat{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\hbar}{i2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\right) - \\ -\hat{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\hbar}{i2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{R}\right)\end{bmatrix}\Psi_1\Psi_2^* d^3R.$$

Преобразовав подынтегральное выражение так, чтобы оператор $\hat{H}$ действовал и на $\mathbf{exp(-i\,kR)}$, получаем уравнение Вигнера для функции распределения [4,5]

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\hat{H}\left(\hbar\mathbf{k} + \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right) - \hat{H}\left(\hbar\mathbf{k} - \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right)\right]f. \quad (5)$$

Это уравнение для функции распределения f поляритонов является точным.

Предполагая, что производные по ($\mathbf{r}$,$\mathbf{k}$) усредненного гамильтониана малы на рассматриваемых длинах, и учитывая только первые члены разложения гамильтониана, с точностью до первых производных из (5) получаем кинетическое уравнение для функции распределения поляритонов, аналогичное классическому

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = 0, \quad (6)$$

где $\omega = \tilde{H}(\mathbf{r},\mathbf{k})/\hbar$. Траекторию поляритона с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ можно найти с помощью характеристических уравнений кинетического уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7)$$

3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Динамику потока поляритонов возможно описать на основе гидродинамического подхода, если найти k-моменты функции распределения f. Найдем уравнения для нулевого и первого момента функции распределения. Проинтегрируем кинетическое уравнение (6) по $d^3k/(2\pi)^3$, получаем уравнение для нулевого момента функции распределения – уравнение непрерывности потока

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\rho\,\mathbf{v}) = 0, \tag{8}$$

где нулевой момент функции f является плотностью поляритонов в конфигурационном пространстве

$$\rho(t,\mathbf{r}) = \int f(t,\mathbf{r},\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{9}$$

а локальная скорость равна

$$\rho\,\mathbf{v}(t,\mathbf{r}) = \int \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} f \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{10}$$

Затем, умножая кинетическое уравнение (6) на $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ и интегрируя по $d^3k/(2\pi)^3$, получаем уравнение для первого момента – уравнение переноса скорости

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathbf{v}) + \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right) = \rho\,\mathbf{F}, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\frac{\partial\rho(t,\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right) = \int \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{12}$$

а локальная сила равна

$$\rho\,\mathbf{F}(t,\mathbf{r}) = \int \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{k}}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{13}$$

Предположим, что энергия поляритона задается дисперсионным соотношением вида

$$\hbar\omega(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \frac{1}{2m}\hbar^2\mathbf{k}^2 + U(\mathbf{r}), \tag{14}$$

а массу поляритона определим как $m = \hbar\omega_0/c^2$, где ω_0 - частота излучения. Тогда из (10) получаем выражение для локальной скорости

$$\rho\,\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\int \mathbf{k}\,f\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{15}$$

из (12) – выражение

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right)=\frac{\hbar^2}{m^2}\int\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad (16)$$

а из (13) – выражение для локальной силы

$$\rho\mathbf{F}=-\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\frac{1}{m}\int f\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=-\frac{\rho}{m}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \qquad (17)$$

Уравнение переноса в этом случае можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathbf{v})+\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\right)=-\frac{\rho}{m}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \qquad (18)$$

Представим волновую функцию пакета в виде

$$\Psi(t,\mathbf{r})=a(t,\mathbf{r})\mathbf{exp}[i\theta(t,\mathbf{r})], \qquad (19)$$

где $a(t,\mathbf{r})$ - действительная амплитуда, $\theta(t,\mathbf{r})$ - действительная фаза, т.е. полагаем, что все поляритоны находятся в одинаковом состоянии (волновой пакет состоит из мод одного типа). Нулевой момент функции f (9) является плотностью поляритонов в конфигурационном пространстве $|\Psi(t,\mathbf{r})|^2=a^2(t,\mathbf{r})\equiv\rho(t,\mathbf{r})$. Локальную фазу волнового пакета выразим через локальную частоту $\Omega(t,\mathbf{r})$ и локальный волновой вектор $\boldsymbol{\kappa}(t,\mathbf{r})$: $\theta(t,\mathbf{r})=\theta(0,\mathbf{r}_0)-\int_0^t\Omega dt+\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\boldsymbol{\kappa}\,d\mathbf{r}$, где интегрирование в конфигурационном пространстве производится вдоль траектории поляритона от точки $\mathbf{r}_0(0)$ до точки $\mathbf{r}(t)$, а локальная частота и локальный волновой вектор равны, соответственно, $\Omega(t,\mathbf{r})=-\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\boldsymbol{\kappa}(t,\mathbf{r})=\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}$.

Учтем, что

$\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\Psi_1\Psi_2^*=i\int\mathbf{k}\,f\,\mathbf{exp}(i\,\mathbf{k}\,\mathbf{R})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=\frac{1}{2}\left(\Psi_2^*\frac{\partial\Psi_1}{\partial\mathbf{r}_1}-\Psi_1\frac{\partial\Psi_2^*}{\partial\mathbf{r}_2}\right)=ia^2\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}$ при

$R=0$, а $\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Psi_1\Psi_2^*\right)=-\int\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{exp}(i\,\mathbf{k}\mathbf{R})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=$

$$=\frac{1}{4}\left[\Psi_2^*\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\mathbf{r}_1}\right)-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\mathbf{r}_1}\frac{\partial^2\Psi_2^*}{\partial\mathbf{r}_2^2}-\frac{\partial\Psi_2^*}{\partial\mathbf{r}_2}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial^2\mathbf{r}_1}+\Psi_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_2}\left(\frac{\partial\Psi_2^*}{\partial\mathbf{r}_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} a\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right)-\frac{\partial a}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}\right)^2-\frac{\partial a^2}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\mathbf{r}^2}\right)- \\ -2a^2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\mathbf{r}^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}-4a\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial a}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}} \end{array}\right],$$

причем

$$a\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right)-\frac{\partial a}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right)=a^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right).$$

Тогда, вводя обозначение для локального импульса $\mathbf{p}(t,\mathbf{r})=\hbar\boldsymbol{\kappa}$, перепишем уравнения (8) и (18) $\frac{\partial a^2}{\partial t}+\frac{1}{m}\frac{\partial\left(a^2\mathbf{p}\right)}{\partial\mathbf{r}}=0$, (20)

$$\frac{\partial\left(a^2\mathbf{p}\right)}{\partial t}+\frac{1}{m}\mathbf{p}\frac{\partial(a^2\mathbf{p})}{\partial\mathbf{r}}+\frac{1}{m}\mathbf{p}^2\frac{\partial a^2}{\partial\mathbf{r}}=-a^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(U(\mathbf{r})-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mathbf{r}^2}\right)-\frac{1}{2m}\frac{\partial(a^2\mathbf{p}^2)}{\partial\mathbf{r}}. \quad (21)$$

Если ввести локальную скорость $\mathbf{v}=\mathbf{p}/m$, то систему уравнений (20)-(21) можно представить в виде гидродинамических уравнений для потока поляритонов

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\rho=-\rho\nabla\mathbf{v}, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)(\rho\,\mathbf{v})=-\rho\nabla\left(\frac{1}{m}U(\mathbf{r})-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho}\right)-\nabla\left(\frac{\rho\,\mathbf{v}^2}{2}\right). \quad (23)$$

где $\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla$ - материальная производная, $\nabla\equiv\partial/\partial\mathbf{r}$.

4. ЛИНЕЙНАЯ СРЕДА

Потенциальная энергия поляритона в линейной среде с показателем преломления $n_1 = \mathrm{const}$, не зависящим ни от времени, ни от координат, постоянна $U = -b_1^2 n_1^2 / 2 = \mathrm{const}$. Траектории и скорости поляритонов с энергией $\hbar\omega = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m - b_1^2 n_1^2 / 2$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ определяются из характеристических уравнений (7). Скорость поляритона $\mathbf{v}_k = \hbar\mathbf{k}/m$ в линейной среде постоянна, а траектория $\mathbf{r}_k = \hbar\mathbf{k}t/m$ – прямая линия, т.е. волновой пакет, образованный сгустком поляритонов, как и следовало ожидать, при распространении в линейной среде расплывается.

Поток поляритонов с плотностью $\rho = a^2$ и локальной скоростью $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{\kappa}/m$ в линейной среде описывается гидродинамическими уравнениями (22)-(23), в которых градиент потенциала равен нулю $\nabla U = 0$. Перепишем уравнения (22)-(23) с учетом определения локальной скорости $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta$ в форме

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta\nabla)a = -\frac{\hbar}{2m} a\nabla^2\theta, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &a^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\nabla\theta\nabla\right)\nabla\theta + 2a\nabla\theta\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\nabla\theta\nabla\right)a = \\ &= \frac{\hbar}{2m}(a\nabla - \nabla a)(\nabla^2 a) - \frac{\hbar}{2m} a^2\nabla(\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta)^2 a\nabla a. \end{aligned} \tag{25}$$

Проанализируем, как изменяется амплитуда и фаза волнового пакета вдоль оси распространения пакета z. Тогда, учитывая, что $\nabla \to \mathbf{1}_z \partial/\partial z$, систему уравнений (24)-(25) представим в виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\hbar}{2m} a\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0, \tag{26}$$

$$a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial z} + 2a\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial t} + a^2\frac{2\hbar}{m}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{3\hbar}{m}a\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\hbar}{2m}\left(a\frac{\partial^3 a}{\partial z^3} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right) \tag{27}$$

Из системы уравнений (26)-(27) следует, что в пренебрежении квантовыми эффектами $\hbar \to 0$ амплитуда волнового пакета в линейной среде без поглощения и дисперсии не зависит от времени $a = \mathrm{const}$, а фаза, удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial z} = 0$, является функцией времени и координаты $\theta = \theta(t - z/v_0)$, где v_0 - скорость пакета, что совпадает с выводами классической оптики. С учетом квантовых эффектов даже в линейной среде система уравнений для плотности и фазы волнового пакета (26)-(27) является нелинейной.

Поток поляритонов в стационарном режиме описывается системой уравнений

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{1}{2}a\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0, \tag{28}$$

$$a^2\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-a\frac{\partial^3 a}{\partial z^3}+\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=0. \tag{29}$$

Решения системы уравнений (28)-(29) дают распределение плотности $\rho=a^2(z)$ и фазы $\theta(z)$ стационарного потока поляритонов в линейной среде вдоль оси распространения потока z. Переписывая систему уравнений (28)-(29) в форме

$$v_z\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{1}{2}a\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \tag{30}$$

$$a^2 v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\hbar^2}{m^2}\left(a\frac{\partial^3 a}{\partial z^3}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right), \tag{31}$$

можно найти распределение скорости v_z стационарного потока по z. На рис.1 представлены распределения плотности a^2 и локальной скорости v_z стационарного потока поляритонов, распространяющегося вдоль оси z в линейной среде.

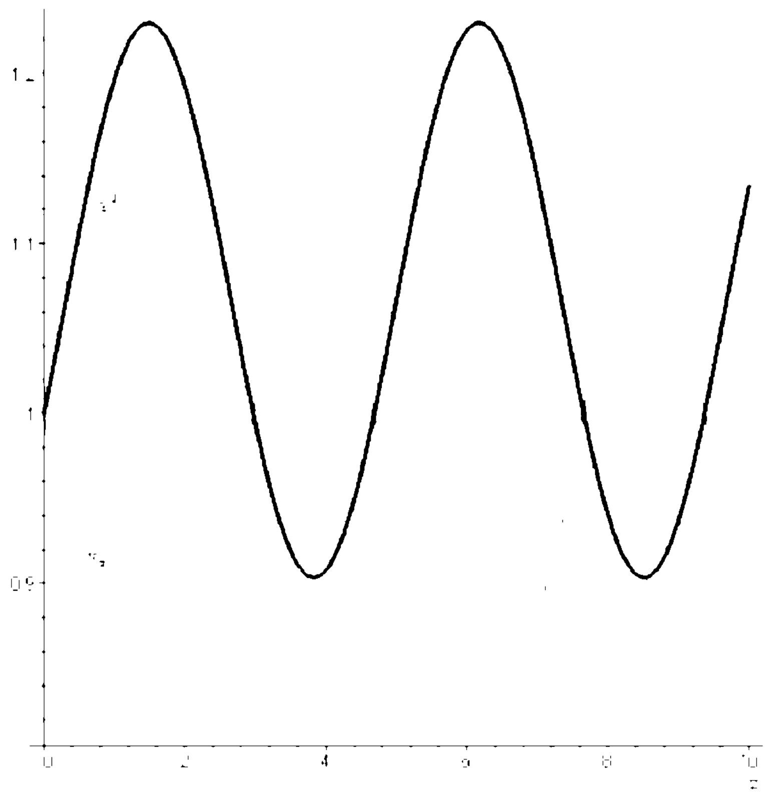

Рис.1. Распределение плотности a^2 и локальной скорости v_z стационарного потока поляритонов, распространяющегося вдоль оси z в линейной среде.

Плотность потока поляритонов в линейной среде осциллирует в противофазе с локальной скоростью потока вдоль оси его распространения. При этом отклонения локальной скорости от средней скорости потока v по оси z в большую и в меньшую сторону различны по величине.

5. НЕЛИНЕЙНАЯ СРЕДА

Энергию поляритона в нелинейной среде представим в виде $\hbar\omega = \hbar^2 \mathbf{k}^2/2m - b_1^2 n_1^2/2 - b_2^2|\psi|^2/2$, т.е. потенциальная энергия поляритона является функционалом, зависящим от волновой функции $U(\psi) = -b_1^2 n_1^2/2 - b_2^2|\psi|^2/2 = -b_1^2 n_1^2/2 - b_2^2\rho/2$. Тогда, подставляя выражение для энергии поляритона в характеристические уравнения (7), получаем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\hbar}{m}\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{b_2^2}{2\hbar}\nabla\rho . \qquad (32)$$

Из системы уравнений (32) следует, что в нелинейной среде скорость поляритона $\mathbf{v}_k$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\,\mathbf{v}_k}{d\,t} = \frac{b_2^2}{2m}\nabla\rho \qquad (33)$$

и является функцией времени. Система уравнений (32) для нелинейной среды не замкнута, и правая часть уравнения (33) не известна. Поэтому найти скорость поляритона в этом случае возможно, если определить плотность потока поляритонов $\rho = a^2$.

Система гидродинамических уравнений (22)-(23) в нелинейной среде приобретает вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta\nabla)a = -\frac{\hbar}{2m}a\nabla^2\theta, \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} &a^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\nabla\theta\nabla\right)\nabla\theta + 2a\nabla\theta\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{m}\nabla\theta\nabla\right)a = \\ &= \frac{b_2^2}{\hbar}a^3\nabla a + \frac{\hbar}{2m}(a\nabla - \nabla a)(\nabla^2 a) - \frac{\hbar}{2m}a^2\nabla(\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta)^2 a\nabla a. \end{aligned} \qquad (35)$$

Из системы уравнений (34)-(35) следует, что квантовыми эффектами в нелинейной среде пренебрегать нельзя.

Для волнового пакета, распространяющегося вдоль оси z, в нелинейной среде из (34)-(35) получаем систему уравнений, в которой уравнение непрерывности потока совпадает с уравнением (26), а в уравнении переноса скорости (27) в правую часть добавляется слагаемое $\frac{b_2^2}{\hbar}a^3\frac{\partial a}{\partial z}$. Для стационарного потока в нелинейной среде уравнение переноса скорости приобретает вид

$$a^2 v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{b_2^2}{m}a^3\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\hbar^2}{m^2}\left(a\frac{\partial^3 a}{\partial z^3} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right). \qquad (36)$$

Вид распределений плотности a^2 и локальной скорости v_z стационарного потока поляритонов в нелинейной среде представлен на рис.2.

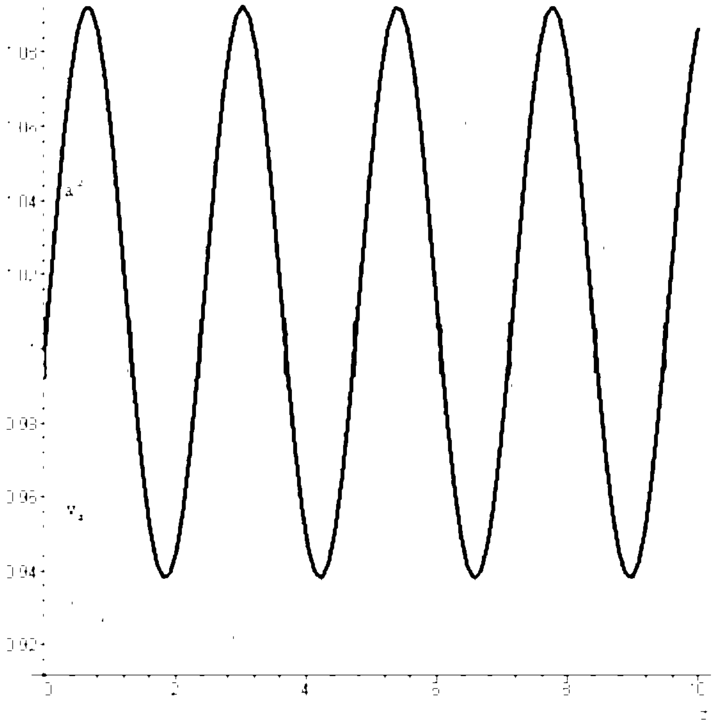

Рис.2. Распределение плотности a^2 и локальной скорости v_z стационарного потока поляритонов в нелинейной среде.

Осцилляции плотности и локальной скорости стационарного потока поляритонов в нелинейной среде по оси z имеют меньший период по сравнению с линейной средой. Это обусловлено наличием в правой части уравнения (36) нелинейного члена, пропорционального a^3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гидродинамические уравнения, описывающие динамику потока поляритонов в линейной и нелинейной диэлектрической среде, для рассматриваемых моделей получены из квантовых уравнений для волновых функций поляритонов в первом приближении. Учет квантовых эффектов в потоке поляритонов даже в первом приближении позволяет проанализировать динамику поляритонов, которая не описывается классической оптикой, как в линейной, так и в нелинейной среде. В частности, согласно выводам классической оптики, амплитуда волнового пакета в линейной недиспергирующей среде без поглощения не зависит от времени. Учет квантовых эффектов в такой среде приводит к выводу об осцилляциях плотности и локальной скорости сгустка поляритонов, представляющих волновой пакет. В нелинейной среде осцилляции плотности и локальной скорости поляритонного потока имеют тенденцию к уменьшению периода по сравнению с линейной средой. Эти осцилляции, которые описываются квантовыми моделями, обусловлены нелинейным взаимодействием поляритонов в данной среде.

Список литературы

1. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
2. Wolf C. Spectral distribution of photons in a domain where space is discretized // УФЖ, 1999. – Т.44, №6. – С.673-676.
3. Дзедолик И.В. Спонтанное нарушение симметрии в системе «электромагнитное поле - диэлектрическая среда» // ЖТФ, 2006. – Т.76, вып.7. – С. 116-120.
4. Маркувиц Н. Квазикорпускулярный подход к распространению волн // ТИИЭР, 1980. – Т.66, №11. – С.25-43.
5. де Грот С.Р., Сатторп Л.Г. Электродинамика. М.: Наука, 1982. – 560 с.
6.

Поступила в редакцию 23.11.2005